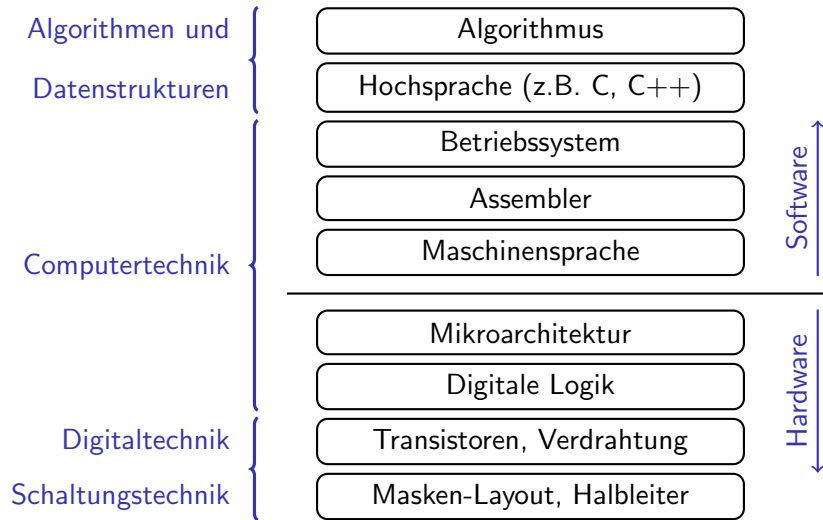


Wie funktioniert ein Computer?



Schema nach Prof. Diepold: Grundlagen der Informatik.

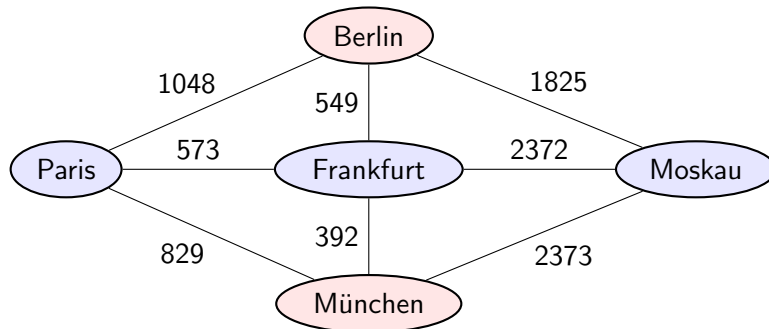
Notizen

Einordnung Algorithmen und Datenstrukturen

Beispiel-Problem Navigationssystem Auto:
 Finde kürzesten Weg von Berlin nach München.



- Datenstruktur: gewichteter Graph (→ Kapitel 7)



- Algorithmus: kürzester Pfad (→ Kapitel 9)

Notizen

Programm heute

- ① Einführung
Einordnung in das Computer-Schema

- ② Mathematische Grundlagen
 - Mengen
 - Abbildungen
 - Zahldarstellung

Notizen

Definition Menge

Menge nach Georg Cantor (1883)
Eine Menge ist eine Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

- die m heißen Elemente der Menge M
- in Zeichen: $m \in M$

Notizen

Mengen Beispiele

- $\emptyset = \{\}$ die leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen
- $\mathbb{R} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{Q} \text{ konvergent}\}$
die reellen Zahlen
- $M = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$
Mengen können auch Elemente von Mengen sein

Notizen

8

Russellsche Antinomie

Die Eigenschaft $E(x)$ bedeute daß $x \notin x$.

Definiere

$$M := \{x : E(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Frage: Ist $M \in M$ oder $M \notin M$?

Angenommen $M \notin M$. Dann hat M Eigenschaft E . Also $M \in M$.
Widerspruch!

Angenommen $M \in M$. Dann hat M nicht Eigenschaft E . Also
 $M \notin M$. Widerspruch!

Lösung: moderne Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel mit
Aussonderungsaxiom, M ist keine Menge.

Notizen

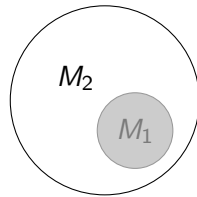
9

Teilmengen

Definition Teilmenge

Seien M_1, M_2 Mengen.

- M_1 ist eine **Teilmenge** von M_2 (in Zeichen: $M_1 \subset M_2$)
- genau dann, wenn
- aus $m \in M_1$ folgt $m \in M_2$



M_1 und M_2 sind gleich ($M_1 = M_2$), genau dann wenn $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$.

10

Notizen

Kardinalität

Kardinalität

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt **Kardinalität** und wird mit $|M|$ bezeichnet.

Beispiele:

- $|\{0, 8, 15\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\mathbb{N}| = \infty$, d.h. \mathbb{N} hat unendlich viele Elemente

11

Notizen

Operationen auf Mengen

Seien M, N Mengen.

- Vereinigung: $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$
- Durchschnitt: $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$

Notizen

12

Operationen auf Mengen: Rechenregeln

Seien A, B, C Mengen.

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{kommutativ}$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad \text{assoziativ}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{distributiv}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C) \quad \text{de Morgan Gesetz}$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Notizen

13

Potenzmenge

Potenzmenge
Sei M Menge. Die Menge
$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \subset M\}$$
heißt **Potenzmenge** von M .

Eigenschaft: Ist $|M| = n$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beispiel:

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = ?$

Notizen

Kartesisches Produkt von Mengen

Statt Mengen $\{x, y\}$ kann man auch **geordnete Paare** (x, y) betrachten.

Kartesisches Produkt
Seien X, Y Mengen. Die Menge
$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$
heißt **kartesisches Produkt** von X und Y .

Eigenschaft: $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Beispiele:

- $\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ zwei-dimensionaler Raum
- x -Achse = $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, y -Achse = $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$

Notizen

Programm heute

- ① Einführung
Einordnung in das Computer-Schema

- ② Mathematische Grundlagen
Mengen
Abbildungen
Zahldarstellung

Notizen

Definition Abbildung

Abbildung / Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt **Abbildung** oder **Funktion**.

Das dem $x \in X$ zugeordnete $y \in Y$ wird bezeichnet mit

$$y = f(x)$$

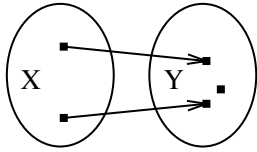
und heißt *das Bild* von x unter f . x heißt *ein Urbild* von y unter f .
 X heißt **Definitionsbereich** von f , Y heißt **Bildbereich** von f .

Kurzschreibweise: $f : X \rightarrow Y$ oder $f : x \mapsto y$.

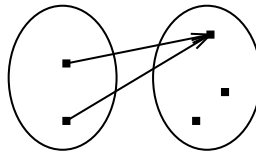
Achtung: Es muss nicht jedes $y \in Y$ als Bild eines $x \in X$ auftreten.

Notizen

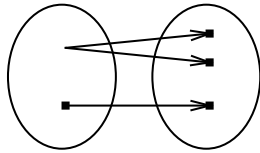
Abbildung Beispiele



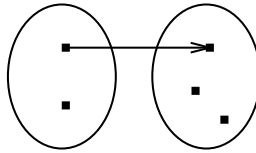
Abbildung



Abbildung



keine Abbildung
(Zwei y haben dasselbe Urbild)



keine Abbildung
(Ein x hat kein Bild)

Notizen

19

Abbildung Beispiele

Beispiel-Problem Navigationssystem Auto:



X = Menge der Verbindungen zwischen den Städten
(z.B. München-Frankfurt)

$Y = \mathbb{R}$ reelle Zahlen

$f : X \rightarrow Y$ weist jeder Verbindung die Distanz in Kilometer zu

z.B. $f(\text{München-Frankfurt}) = 392$

$f(\text{Frankfurt-Berlin}) = 549$

Notizen

20

Abbildungseigenschaften

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Sei $f : X \rightarrow Y$ Abbildung.

- f heißt **injektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in Y$ **höchstens ein** $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.
- f heißt **surjektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in Y$ **mindestens ein** $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.
- f heißt **bijektiv** genau dann, wenn zu jedem $y \in Y$ **genau ein** $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

Eigenschaft: f ist bijektiv genau dann, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Beispiel: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv (da $1 \notin f(\mathbb{N})$) und damit nicht bijektiv.

Notizen

Folgen

Folge

Sei M Menge. Eine **Folge** ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ mit

$$i \mapsto a_i \quad \text{bzw.} \quad a(i) = a_i.$$

Eine **endliche Folge** ist eine Abbildung $a : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ für $n \in \mathbb{N}$. n ist die **Länge** der Folge.

Kurzschreibweise: $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $(a_i)_{i=1, \dots, n}$

Beispiele:

- Folge der Primzahlen: $(2, 3, 5, 7, \dots)$
- Folge der ersten acht Zweierpotenzen: $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256)$

Notizen

Polynome

Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x^1 + c_0$$

heißt **Polynom** in x vom **Grad** n . Hierbei heißen die $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, **Koeffizienten** von p , $c_n \neq 0$.

Beispiel: Dezimaldarstellung von Zahlen

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Notizen

Programm heute

- ① Einführung
Einordnung in das Computer-Schema

- ② Mathematische Grundlagen
Mengen
Abbildungen
Zahldarstellung

Notizen

Zahldarstellung

- **Dezimalsystem:**
 - Basis $x = 10$
 - Koeffizienten $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 - Beispiel: $123_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
- **Binärsystem:**
 - Basis $x = 2$
 - Koeffizienten $c_n \in \{0, 1\}$
 - Beispiel: $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13_{10}$

Notizen

25

Zahldarstellung

- **Oktalsystem:**
 - Basis $x = 8 (= 2^3)$
 - Koeffizienten $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 - Beispiel: $173_8 = 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 123_{10}$
- **Hexadezimalsystem:**
 - Basis $x = 16 (= 2^4)$
 - Koeffizienten $c_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
 - Beispiel: $7B_{16} = 7 \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 123_{10}$

Notizen

26

Wie viele Ziffern pro Zahl?

Problem

Gegeben Zahl $z \in \mathbb{N}$, wie viele Ziffern m werden bezüglich Basis x benötigt?

Lösung

$$m = \lfloor \log_x(z) \rfloor + 1$$

Erläuterung: ($a \in \mathbb{R}$)

- $\lfloor a \rfloor = \text{floor}(a) =$ größte ganze Zahl kleiner gleich a
- $\lceil a \rceil = \text{ceil}(a) =$ kleinste ganze Zahl größer gleich a

$$a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a \leq \lceil a \rceil < a + 1$$

- $\log_x(z) = \frac{\ln(z)}{\ln(x)}$, wobei „ln“ der natürliche Logarithmus ist

27

Notizen

Wie viele Ziffern pro Zahl?

Lösung

$$m = \lfloor \log_x(z) \rfloor + 1$$

Beispiele: $z = 123$

- Basis $x = 10$:

$$m = \lfloor \log_{10}(123) \rfloor + 1 = \lfloor 2.0899 \dots \rfloor + 1 = 3$$

- Basis $x = 2$:

$$m = \lfloor \log_2(123) \rfloor + 1 = \lfloor 6.9425 \dots \rfloor + 1 = 7$$

- Basis $x = 8$:

$$m = \lfloor \log_8(123) \rfloor + 1 = \lfloor 2.3141 \dots \rfloor + 1 = 3$$

- Basis $x = 16$:

$$m = \lfloor \log_{16}(123) \rfloor + 1 = \lfloor 1.7356 \dots \rfloor + 1 = 2$$

28

Notizen

Größte Zahl pro Anzahl Ziffern?

Problem

Gegeben Basis x und m Ziffern, was ist die größte darstellbare Zahl?

Lösung

$$z_{max} = x^m - 1$$

Beispiele:

- $x = 2, m = 4$:

$$z_{max} = 2^4 - 1 = 15 = 1111_2$$

- $x = 2, m = 8$:

$$z_{max} = 2^8 - 1 = 255 = 11111111_2$$

- $x = 16, m = 2$:

$$z_{max} = 16^2 - 1 = 255 = FF_{16}$$

29

Notizen

Primitive Datentypen

Primitive Datentypen

In Computern verwendet man **Binärdarstellung** mit einer fixen Anzahl Ziffern (genannt **Bits**).

Die **primitiven Datentypen** sind

- **8 Bits** (auch genannt **Byte**), darstellbare Zahlen: $\{0, \dots, 255\}$
in C, C++: `unsigned char`
- **16 Bits**, darstellbare Zahlen: $\{0, \dots, 65535\}$
in C, C++: `unsigned short int` oder nur `unsigned short`
- **32 Bits**, darstellbare Zahlen: $\{0, \dots, 4294967295\}$
in C, C++: `long int` oder nur `unsigned long`, 32 Bit System: `unsigned int`
- **64 Bits**, darstellbare Zahlen: $\{0, \dots, 2^{64} - 1\}$
in C, C++: `unsigned long long`, 64 Bit System: `unsigned int`

30

Notizen

```

      1001110010001
    0101001001000100010001
  001000101010100100100010001
 1110010001010101001001000100011
 10010001      010101      00100100
 01001110      00101      00010011
 001001110      10011      011100101
10010001010      0100110      00111010111
010011100001001110000100111011101100110
110100 1001110010100011010001110 101001
11010 01001110010001110101100 01011
10011 000100111010010100111 10100
010100 01001110100101100 001001
10101110 010010100 10011101
100101010      010011101
001001110100110110010
0010011101011

```

Notizen

Zusammenfassung

- ① Einführung
 - Einordnung in das Computer-Schema

- ② Mathematische Grundlagen
 - Mengen
 - Abbildungen
 - Zahldarstellung

Notizen
