

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen**
 - Motivation und Spezifikation
 - Verifikation
 - Beispiel: Insertion Sort

Beispiele für Fehler I

- 1996: Explosion der Ariane 5 Rakete mit 4 Satelliten an Bord
 - **Schaden:** ca. 500 Millionen Dollar
 - **Ursache:** Wert der horizontalen Geschwindigkeit von 64 Bit Floating Point Zahl (`double`) konvertiert auf 16 Bit Ganzzahl (`signed short`)
 - Zahl grösser als $2^{15} = 32768$ → **overflow**
 - Zusammenbruch des Lenksystems
 - Backup-Rechner verwendet gleiches Programm, selber Fehler
 - Selbstzerstörung nach 36.7 Sekunden Flugzeit
- Annahme dass Rakete nie so schnell fliegen wird...

Beispiele für Fehler II

- 1995: Ausfall Stellwerk Hamburg-Altona
 - **Schaden:** 2 Tage kein Schienenverkehr in Hamburg-Altona, 2 Monate Notfahrplan
 - **Ursache:** Stack-Overflow
 - neues zentrales, computerisiertes Stellwerk für 62.6 Millionen D-Mark von Siemens
 - 3.5kB Stack für Stellbefehle (als sequentielle Liste)
 - zu klein schon für normalen Verkehr → **overflow**
 - Fehlerbehandlungsroutine fehlerhaft → Endlosschleife

Beispiele für Fehler III

- 1985 – 1987: Therac-25 Maschine zur Strahlentherapie
 - **Schaden:** 3 Todesfälle durch Strahlenüberdosis
 - **Ursache:** “race condition” in Software-Sperre für Strahl
(**race condition:** Ergebnis einer Operation hängt vom zeitlichen Verhalten der Einzeloperationen ab, siehe Multitasking)
 - **Overflow** in 8 Bit Test-Zähler zusammen mit Benutzereingabe deaktivieren Software-Sperre für Strahl
 - unkontrollierte Bestrahlung mit bis zu 100-facher Dosis
 - 40 - 200 Gray Dosis statt 2 Gray, ab 10 Gray tödlich
 - mind. 3 Personen sterben an Strahlenüberdosis

Relative Korrektheit

Die **Korrektheit** eines Algorithmus bezieht sich immer auf die **Spezifikation** dessen, was er tun **soll**.

- Korrektheit ist **relativ**
- Algorithmus kann nicht an sich als korrekt bewiesen werden, sondern nur in Bezug auf Spezifikation

Spezifikation: eindeutige Festlegung der berechneten Funktion bzw. des Terminierungsverhaltens einer Softwarekomponente

Nachweis der Korrektheit

Nachweis der Korrektheit durch

- **Verifikation:** formaler, mathematischer Beweis, dass Algorithmus korrekt bezüglich formaler Spezifikation
 - erfordert Formalisierung der Algorithmensprache und Spezifikation
- **Validation:** nicht-formaler Nachweis der Korrektheit etwa durch systematisches Testen
 - in der Regel kein 100%ig sicherer Nachweis der Korrektheit!

Verifikation vs. Validation

E.W. Dijkstra (1930 - 2002):

“Testing shows the presence, not the absence of bugs”

Analogie zur Mathematik:

- **Spezifikation:** entspricht Satz
- **Verifikation:** Beweis des Satzes
- **Validation:** Ausprobieren an Beispielwerten

Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen**
 - Motivation und Spezifikation
 - Verifikation**
 - Beispiel: Insertion Sort

Vor- und Nachbedingungen

Vor- und Nachbedingungen: Methode zur Spezifikation von gewünschten Eigenschaften von Algorithmen

{VOR} ANW {NACH}

- {VOR}: Aussage über Zustand **vor** Ausführung von ANW
- {NACH}: Aussage über Zustand **nach** Ausführung von ANW

Bedeutung:

- Gilt die Vorbedingung {VOR} unmittelbar vor Ausführung von ANW
- und terminiert ANW
- so gilt die Nachbedingung {NACH} unmittelbar nach Ausführung von ANW

Vor- und Nachbedingung

{VOR} ANW {NACH}

Sonderfälle:

- terminiert ANW nicht, so ist Aussage immer wahr
 - egal wie {VOR}, {NACH} aussehen
- gilt {VOR} nicht, so ist Aussage auch immer wahr
 - egal ob ANW terminiert oder ob {NACH} gilt

Vor- und Nachbedingung: Beispiele I

- Aussage

$$\{X==0\} X = X+1 \{X==1\}$$

ist wahr

- Aussage

$$\{\text{true}\} X = Y \{X==Y\}$$

ist wahr

- Aussage

$$\{Y==a\} X = Y \{X==a \wedge Y==a\}$$

ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$

Vor- und Nachbedingung: Beispiele II

- Aussage

$$\{X==a \wedge Y==b \wedge a \neq b\} X = Y; Y = X \{X==b \wedge Y==a\}$$

ist **falsch** für alle $a, b \in \mathbb{Z}$!

(nach erstem Schritt haben X, Y beide Wert b - typischer Fehler bei Wertetausch!)

- Aussage

$$\{X==a \wedge Y==b\} Z = X; X = Y; Y = Z \{X==b \wedge Y==a\}$$

ist wahr für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ (korrekter Wertetausch mit Hilfsvariable Z)

Vor- und Nachbedingung: Beispiele III

- Aussage

$\{\text{false}\}$ ANW $\{\text{NACH}\}$

ist wahr für alle ANW und NACH, da Vorbedingung falsch

- Aussage

$\{\text{true}\}$ ANW $\{\text{false}\}$

ist genau dann wahr, wenn ANW nicht terminiert

- Aussage

$\{X==a\}$ **while** $X \neq 0$ $\{ X = X-1 \}$ $\{X==0\}$

ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$

(auch für $a < 0$, da dann while-Schleife nicht terminiert!)

Partielle Korrektheit

Partielle Korrektheit

Ein Programm mit Anweisungen ANW sowie Vorbedingung $\{VOR\}$ und Nachbedingung $\{NACH\}$ heißt **partiell korrekt** bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

$$\{VOR\} \text{ ANW } \{NACH\}$$

wahr ist.

Das Programm heißt **total korrekt** bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

- es partiell korrekt ist bezüglich VOR, NACH ist und
- ANW immer dann terminiert, wenn VOR gilt.

Bausteine von Algorithmen

Wiederholung: Bausteine von Algorithmen

- Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung an Variable)
- Sequenz (elementare Schritte nacheinander)
- Bedingter Verarbeitungsschritt (z.B. if/else)
- Wiederholung (z.B. while-Schleife)

Korrektheit von Anweisungstypen I

- Elementarer Verarbeitungsschritt α

$$\{\text{VOR}\} \alpha \{\text{NACH}\}$$

- Sequenz $\alpha; \beta$

$$\{\text{VOR}\} \alpha; \beta \{\text{NACH}\}$$

wird gezeigt mittels Zwischenbedingung MITTE, also

$$\{\text{VOR}\} \alpha \{\text{MITTE}\}$$

und

$$\{\text{MITTE}\} \beta \{\text{NACH}\}$$

Korrektheit von Anweisungstypen II

- Bedingter Verarbeitungsschritt

$\{\text{VOR}\} \text{ if } (B) \{ \alpha \} \text{ else } \{ \beta \} \{\text{NACH}\}$

wird gezeigt mittels

$\{\text{VOR} \wedge B\} \alpha \{\text{NACH}\}$

und

$\{\text{VOR} \wedge \neg B\} \beta \{\text{NACH}\}$

→ zeige also dass NACH gilt, egal welcher Zweig ausgeführt wird!

Korrektheit von Anweisungstypen III

- Wiederholung

{VOR}
while (B) { β }
{NACH}

wird gezeigt mittels **Schleifeninvariante P**:

- 1 prüfe, daß $VOR \Rightarrow P$
(Vorbedingung garantiert Schleifeninvariante bei Eintritt in Schleife)

- 2 prüfe, daß

$$\{P \wedge B\} \beta \{P\}$$

(wenn Schleife durchlaufen, bleibt Schleifeninvariante wahr)

- 3 prüfe, daß $\{P \wedge \neg B\} \Rightarrow \text{NACH}$
(Nachbedingung muß nach Verlassen der Schleife gelten)

Verifikation: Beispiel I

Gauss'sche Summenformel

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algorithmus:

```
{ n > 0 }  
  sum = 0;  
  i = 0;  
  while (i < n) {  
    i = i + 1;  
    sum = sum + i;  
  }  
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Verifikation: Beispiel II

Sequenz mit Zwischenbedingung:

```
{ n > 0 }  
  sum = 0;  
{ n > 0 ∧ sum == 0 }  
  i = 0;  
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
```

Algorithmus:

```
{ n > 0 }  
  sum = 0;  
  i = 0;  
  while (i < n) {  
    i = i + 1;  
    sum = sum + i;  
  }  
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Verifikation: Beispiel III

Wiederholung mit **Invariante**:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }  
  while (i < n) {  
    i = i + 1;  
    sum = sum + i;  
  }  
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Passende Invariante P?

$$P = (\text{sum} == i*(i+1)/2 \wedge i \leq n)$$

Algorithmus:

```
{ n > 0 }  
  sum = 0;  
  i = 0;  
  while (i < n) {  
    i = i + 1;  
    sum = sum + i;  
  }  
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Verifikation: Beispiel IV

Prüfe:

① $\{\text{VOR}\} \Rightarrow \{\text{P}\}$

es ist $i==0$, also $i \leq n$, und
 $sum == 0 * 1 / 2 == 0$ ✓

② $\{\text{P} \wedge \text{B}\} \beta \{\text{P}\}$

es ist $i < n$, also nach $i=i+1$ immer
noch $i \leq n$, und für sum gilt

$$sum = \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) == \frac{(i+1)*(i+2)}{2} \quad \checkmark$$

③ $\{\text{P} \wedge \neg \text{B}\} \Rightarrow \{\text{NACH}\}$

es ist $\text{P} \wedge \neg \text{B} \Leftrightarrow \text{P} \wedge !(i < n)$

$$\Leftrightarrow sum == \frac{i(i+1)}{2} \wedge i \leq n \wedge !(i < n)$$

$$\Leftrightarrow sum == \frac{i(i+1)}{2} \wedge i == n$$

$$\Rightarrow sum == \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark$$

Wiederholung mit **Invariante**:

$$\{ n > 0 \wedge sum == 0 \wedge i == 0 \}$$

```
while (i < n) {  
    i = i + 1;  
    sum = sum + i;  
}
```

$$\{ sum == n*(n+1)/2 \}$$

Invariante P:

$$P = (sum == i*(i+1)/2 \wedge i \leq n)$$

Verifikation

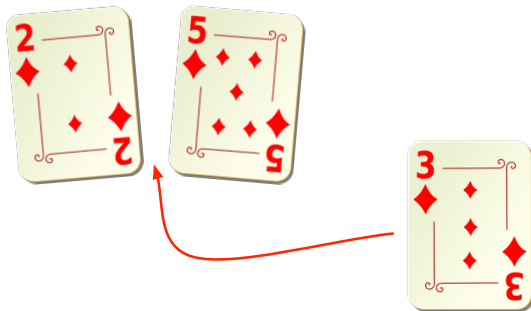
- Verifikation ist manuell sehr aufwendig
 - in Praxis daher leider sehr selten eingesetzt
- Vorgang lässt sich weitgehend automatisieren
 - Programm-Verifizierer
 - Programm mit Vor- und Nachbedingungen
 - Schleifen müssen Invarianten haben
 - nur möglich mit eingeschränkten Programmiersprachen
z.B. Lightweight Java
 - an der TUM: Programmsystem Isabelle (Informatik)
<http://isabelle.in.tum.de>

Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen**
 - Motivation und Spezifikation
 - Verifikation
 - Beispiel: Insertion Sort

Insertion Sort

Insertion Sort: Sortieren durch direktes Einfügen



Beschreibung von Insertion Sort

Beschreibung in Vorlesung durch C-ähnlichen Pseudocode:

Input: Feld $A[0..n-1]$ von n natürlichen Zahlen

Output: Feld A aufsteigend sortiert

InsertionSort(A):

```
for j=1 to länge(A)-1 {
    key = A[j];
    // füge A[j] in sortierte Liste A[0..j-1] ein
    i = j-1;
    while (i >= 0 && A[i] > key) {
        A[i+1] = A[i];
        i = i-1;
    }
    A[i+1] = key;
}
```

Pseudocode Konventionen I

- Einrücken und geschweifte Klammern {, } kennzeichnen **Blockstruktur**
- Sequenz durch Semikolon ;
- // bedeutet Rest der Zeile ist Kommentar (wird nicht ausgeführt)
- Wert-Zuweisung, z.B. x=5 weist der Variable x den Wert 5 zu
- Feld $A[0..n-1]$, Zugriff auf *i*-tes Element $A[i]$ mit **Index** *i* (meist 0-basiert!)

$A[0..n-1]$ bezeichnet die Elemente $A[0], A[1], \dots, A[n-1]$

Beispiel:

```
for j=1 to länge(A)-1 {  
    key = A[j];  
    // füge A[j] in sortierte  
    // Liste A[0..j-1] ein  
    i = j-1;  
    while (i >= 0 && A[i] > key) {  
        A[i+1] = A[i];  
        i = i-1;  
    }  
    A[i+1] = key;  
}
```

Pseudocode Konventionen II

- for-Schleife:

for j=Wert1 **to** Wert2 { ... }

Variable j nimmt schrittweise die Werte von Wert1 bis Wert2 an, jedes Mal wird Anweisung des Schleifenkörpers (...) ausgeführt

Am Ende der Schleife hat j den Wert Wert2+1

- while-Schleife:

while (Bedingung) { ... }

Führt Schleifenkörper (...) aus, solange Bedingung erfüllt ist

Beispiel:

```
for j=1 to länge(A)-1 {  
    key = A[j];  
    // füge A[j] in sortierte  
    // Liste A[0..j-1] ein  
    i = j-1;  
    while (i >= 0 && A[i] > key) {  
        A[i+1] = A[i];  
        i = i-1;  
    }  
    A[i+1] = key;  
}
```

Pseudocode Konventionen III

- if-Abfrage:

```
if (Bedingung) { ... }  
else { ... }
```

Verzweigung im Code anhand Bedingung. Falls Bedingung nicht erfüllt, kennzeichnet **else** den Zweig, der gewählt wird

- **print(x)** Anweisung gibt Wert von Variable x aus

Beispiel:

```
i=3;  
if (i==0) {  
    x=0;  
} else {  
    x=2;  
}  
print(x);
```

Insertion Sort: Ablauf

Beispielablauf:

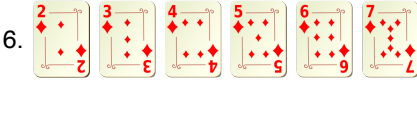
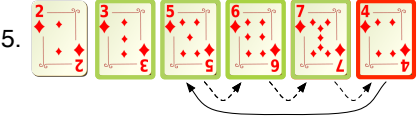
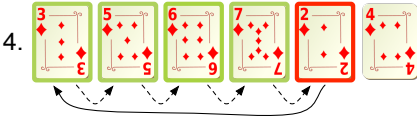
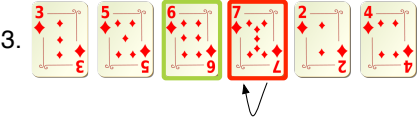
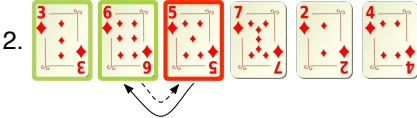
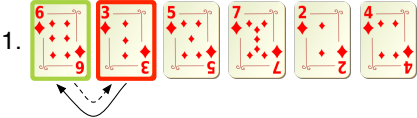
Eingabe: $A = 6, 3, 5, 7, 2, 4$

j			
key			
A[0..j-1]			
i			

InsertionSort(A):

```
for j=1 to länge(A)-1 {  
    key = A[j];  
    // füge A[j] in sortierte  
    // Liste A[0..j-1] ein  
    i = j-1;  
    while (i >= 0 && A[i] > key) {  
        A[i+1] = A[i];  
        i = i-1;  
    }  
    A[i+1] = key;  
}
```

Insertion Sort: Ablauf



Insertion Sort: Verifikation

Entscheidendes Kriterium: **Schleifen-Invariante P** der **for** Schleife

$P =$ Teilfeld $A[0..j-1]$ besteht aus den ursprünglich in $A[0..j-1]$ enthaltenen Werten und $A[0..j-1]$ ist geordnet

Prüfe:

- 1 Anfang $j=1$: Feld $A[0..j-1]$ enthält nur ein Element $A[0]$, ist sortiert ✓
- 2 aktuelles Element mit Wert key , die Werte $A[j-1]$, $A[j-2]$, ... werden jeweils eine Position nach rechts verschoben, bis korrekte Position $A[i]$ gefunden für aktuelles Element, Element wird dort eingefügt → Feld $A[0..j-1]$ sortiert ✓
- 3 Algorithmus terminiert wenn $j==n$, also gilt mit voriger Invariante P : $A[0..n-1]$ ist sortiert ✓

Zusammenfassung

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen**
 - Motivation und Spezifikation
 - Verifikation
 - Beispiel: Insertion Sort