

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen

Motivation

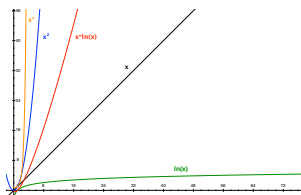
Das RAM-Modell

Landau-Symbole

2

Zusammenfassung Insertion Sort

- tatsächliche Kosten wurden abstrahiert in **Konstanten c_i**
 - der tatsächliche Wert der Konstanten ist abhängig von Compiler und Rechner
 - einfaches Modell hierfür: RAM-Modell (siehe 5.2)
- detaillierte Laufzeitanalyse ist aufwendig, schon im sehr einfachen Beispiel
- die wesentliche Information steckt im **Grad des Wachstums** bzw. im **asymptotischen Verhalten** der Laufzeit bei wachsendem n (siehe 5.3)
 - im Beispiel hier: linear im best case, quadratisch im worst case



Wachstumsraten illustriert

Annahme: Rechner mit 1GHz Taktfrequenz

- eine Operation benötigt 1ns (nano-Sekunde)
- n bezeichne Anzahl Operationen

n	$T(n) = \ln(n)$	$T(n) = n$	$T(n) = n \ln(n)$	$T(n) = n^2$	$T(n) = 2^n$	$T(n) = n!$
10	0.003 μ s	0.01 μ s	0.033 μ s	0.1 μ s	1 μ s	3.63ms
20	0.004 μ s	0.02 μ s	0.086 μ s	0.4 μ s	1ms	77.1 years
30	0.005 μ s	0.03 μ s	0.147 μ s	0.9 μ s	1s	$8.4 \cdot 10^{15}$ years
40	0.005 μ s	0.04 μ s	0.213 μ s	1.6 μ s	18.3min	
50	0.006 μ s	0.05 μ s	0.282 μ s	2.5 μ s	13 days	
100	0.007 μ s	0.1 μ s	0.644 μ s	10 μ s	$4 \cdot 10^{13}$ years	
1000	0.010 μ s	1.0 μ s	9.966 μ s	1ms		
10000	0.013 μ s	10 μ s	130 μ s	100ms		
100000	0.017 μ s	0.1ms	1.67ms	10s		
$1 \cdot 10^6$	0.020 μ s	1ms	19.93ms	16.7min		
$1 \cdot 10^7$	0.023 μ s	0.01s	0.23s	1.16 days		
$1 \cdot 10^8$	0.027 μ s	0.1s	2.66s	115.7 days		
$1 \cdot 10^9$	0.030 μ s	1s	29.9s	31.7 years		

Tabelle adaptiert von "The Algorithm Design Manual", S. Skiena, Springer

7

8

Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen

Motivation

Das RAM-Modell

Landau-Symbole

RAM-Modell

- einfaches Rechnermodell für Laufzeitanalyse
- Ziel: **Abschätzung** der erforderlichen Ressourcen zur Ausführung eines Algorithmus
 - exakte Zeit der Ausführung ist nicht relevant
- Modell: **Random Access Machine**, kurz **RAM**

9

10

Annahmen im RAM-Modell

- nur **sequentielle Ausführungen**
 - das heißt nur 1 Prozessor, keine Parallelität
- alle Daten liegen **direkt zugreifbar** im Speicher (\rightarrow RAM)
- jeder Speicherzugriff **dauert gleich lang**
 - das ist in Wahrheit nicht der Fall! (Speicher-Hierarchie)
- alle elementaren Verarbeitungsschritte benötigen **eine Zeiteinheit**
 - Wertzuweisung
 - Arithmetische Operationen: +, -, *, /, %, ceil, floor
 - Vergleichsoperationen: <, >, !=
 - Kontrollflußoperationen: **if**, **else**

Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus	Anzahl Schritte
$X = X+1;$	
for $i=1$ to n { $X = X+1;$ }	
for $i=1$ to n { for $j=1$ to n { $X = X+1;$ } }	

11

12

Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

Komplexeres Beispiel:

Algorithmus A bestehend aus drei Teilen A1, A2, A3:

A = A1; A2; A3

mit

A1	A2	A3
X = X+1; Y = Y+1; Z = Z+1;	for i=1 to n { X = X+Y; Y = Y*Z; }	for i=1 to n { for j=1 to n { X = X+1; Y = Y+2; Z = Z+3; } }

Gesamt ist für A: $T(n) = 3 + 2n + 3n^2$

13

Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

$$T(n) = 3 + 2n + 3n^2$$

- wie ist das **Wachstum** von $T(n)$?
- Beispiel-Werte für n:

$$n = 2 \quad T(2) = 3 + 4 + 12$$

$$n = 10 \quad T(10) = 3 + 20 + 300$$

$$n = 100 \quad T(100) = 3 + 200 + 30000$$

$$n = 1000 \quad T(1000) = 3 + 2000 + 3000000$$

→ quadratischer Term dominiert

14

Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
 - Motivation
 - Das RAM-Modell
 - Landau-Symbole

15

Komplexität

Beispiele zeigen: Term mit höchstem Exponent dominiert
Wachstumsrate

Präzise Notation → Landau-Symbole

16

Landau-Symbol Θ

Landau-Symbol Θ

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Landau-Symbol $\Theta(g)$ ist definiert als die Menge

$$\Theta(g) := \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

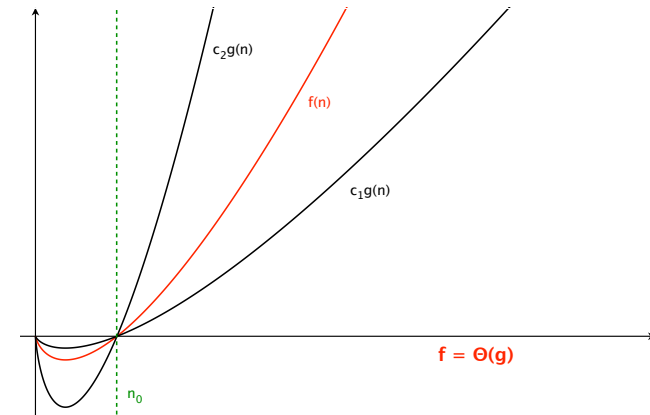
Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in \Theta(g)$ schreiben wir kurz: $f = \Theta(g)$.

- f ist also bis auf konstanten Faktor im wesentlichen "gleich" der Funktion g für $n \geq n_0$
- man sagt auch: g ist **asymptotisch scharfe Schranke** von f (von oben und unten)
- Kurznotation: $f = \Theta(g)$ oder $f(n) = \Theta(g(n))$

17

Landau-Symbol Θ

$$\Theta(g) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$



18

Beispiel: Laufzeit Insertion Sort I

- Laufzeit für worst case von Insertion Sort:

$$T(n) = an^2 + bn - c,$$

wobei $a = \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}$, $b = c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_9$ und $c = c_2 + c_4 + c_5 + c_9$

- weitere Annahme: alle Konstanten $c_i = 1$ für $i = 1, \dots, 9$

$$\rightarrow T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

19

Beispiel: Laufzeit Insertion Sort II

$$T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

Behauptung: $T(n) = \Theta(n^2)$

- Zu zeigen: finde $c_1, c_2 > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq c_1 n^2 \leq T(n) \leq c_2 n^2 \quad \text{für } n \geq n_0$$

- linke Seite:

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4 \quad \left| \frac{1}{n^2} \right.$$

$$0 \leq c_1 \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2}$$

Wähle z.B. $n_0 = 1$, dann $c_1 = 1$.

- rechte Seite: $n_0 = 1$ und $\frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2} \leq 5 = c_2$ ✓

20

Beispiel: Polynom 2. Grades

Allgemeiner:

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Behauptung: $f(n) = \Theta(n^2)$

- wähle $c_1 = \frac{a}{4}$, $c_2 = \frac{7a}{4}$ sowie $n_0 = 2 \cdot \max\left(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}}\right)$
- es folgt: $0 \leq c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n^2$ für $n \geq n_0$ ✓

21

Beispiel: Polynome vom Grad d

Noch allgemeiner:

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_d > 0$ (Polynom vom Grad d).

Dann gilt:

$$p(n) = \Theta(n^d)$$

22

Landau-Symbol O

Landau-Symbol O

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Landau-Symbol $O(g)$ ist definiert als die Menge

$$O(g) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

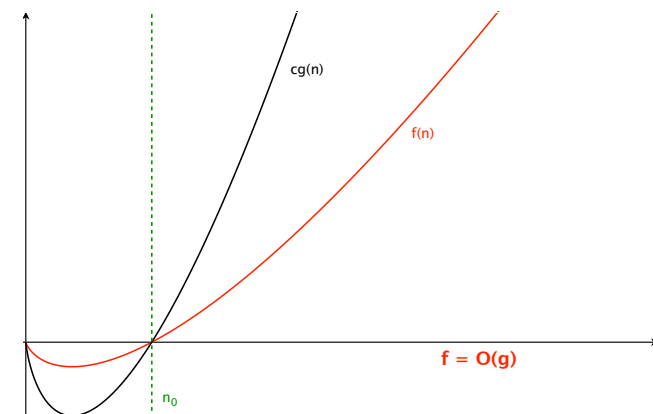
Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in O(g)$ schreiben wir kurz: $f = O(g)$.

- man sagt auch: g ist **asymptotisch obere Schranke** von f
- auch genannt: "gross-O-Notation"
- aus $f = \Theta(g)$ folgt automatisch $f = O(g)$

23

Landau-Symbol O

$$O(g) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$



24

Beispiel: lineare Funktion

$$f(n) = 60n + 12$$

- **Behauptung:** $f(n) = O(n)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn \quad \left| \frac{1}{n} \right.$$
$$0 \leq 60 + \frac{12}{n} \leq c$$

also z.B. $n_0 = 12$ und $c = 61$ ✓

- **Behauptung:** $f(n) = O(n^2)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn^2 \iff 0 \leq \frac{60}{n} + \frac{12}{n^2} \leq c$$

also z.B. $n_0 = 1$ und $c = 73$ ✓

25

Landau-Symbole Θ und O

- Landau-Symbole beschreiben **Wachstumsverhalten** von Funktionen
- $f = \Theta(g)$ bedeutet: g ist asymptotisch **scharfe** Schranke von f
- $f = O(g)$ bedeutet: g ist asymptotisch **obere** Schranke von f
- Landau-Symbol Θ ist "exakt"
- Landau-Symbol O kann zu "grosszügig" sein (siehe vorige Folie)
- Landau-Symbol O beschreibt Laufzeit im schlechtesten Fall (worst case)

26

Effizienz von Algorithmen I

O -Notation erlaubt **Kategorisierung** der Effizienz von Algorithmen

- $O(1)$: **konstante Laufzeit**
 - unabhängig von Problemgröße
 - *Beispiel:* Löschen von erstem Element in verketteter Liste
- $O(\log n)$: **logarithmische Laufzeit**
 - Laufzeit wächst langsamer als Problemgröße
 - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
 - *Beispiel:* Suchen in sortierter Liste (Binäre Suche, s. Kapitel 8)
- $O(n)$: **lineare Laufzeit**
 - Laufzeit wächst vergleichbar zur Problemgröße
 - jedes Eingabe-Element erfordert $O(1)$ Arbeit
 - *Beispiele:* Suchen in unsortierter Liste, Löschen von Element in sequentieller Liste

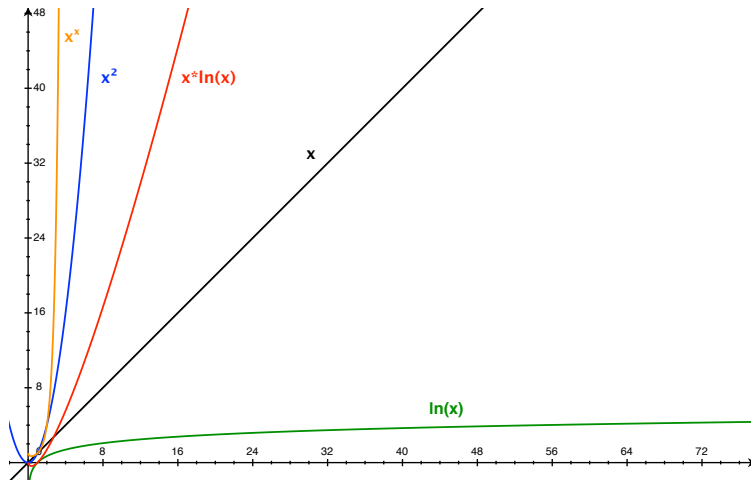
27

Effizienz von Algorithmen II

- $O(n \log n)$: "loglinear" Laufzeit
 - Laufzeit wächst schneller als Problemgröße
 - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
 - *Beispiele:* Quicksort (s. Kapitel 6), FFT (s. Kapitel 10)
- $O(n^2)$: **quadratische Laufzeit**
 - typisch für Algorithmen, die Element paarweise kombinieren
 - *Beispiele:* Insertion Sort, Matrix-Vektor Multiplikation (s. Kapitel 10)
- $O(n^3)$: **kubische Laufzeit**
 - *Beispiel:* Matrix-Matrix Multiplikation
- $O(2^n)$: **exponentielle Laufzeit**
 - auch als "unlösbar" bezeichnet (intractable)
 - *Beispiel:* Traveling Salesman (kürzeste Route, so dass alle Städte exakt einmal besucht)

28

Wiederholung: Wachstumsraten



Wiederholung: Wachstumsraten illustriert

Annahme: Rechner mit 1GHz Taktfrequenz

- eine Operation benötigt 1ns (nano-Sekunde)
- n bezeichne Anzahl Operationen

n	$T(n) = \ln(n)$	$T(n) = n$	$T(n) = n \ln(n)$	$T(n) = n^2$	$T(n) = 2^n$	$T(n) = n!$
10	0.003 μ s	0.01 μ s	0.033 μ s	0.1 μ s	1 μ s	3.63ms
20	0.004 μ s	0.02 μ s	0.086 μ s	0.4 μ s	1ms	77.1 years
30	0.005 μ s	0.03 μ s	0.147 μ s	0.9 μ s	1s	$8.4 \cdot 10^{15}$ years
40	0.005 μ s	0.04 μ s	0.213 μ s	1.6 μ s	18.3min	
50	0.006 μ s	0.05 μ s	0.282 μ s	2.5 μ s	13 days	
100	0.007 μ s	0.1 μ s	0.644 μ s	10 μ s	$4 \cdot 10^{13}$ years	
1000	0.010 μ s	1.0 μ s	9.966 μ s	1ms		
10000	0.013 μ s	10 μ s	130 μ s	100ms		
100000	0.017 μ s	0.1ms	1.67ms	10s		
$1 \cdot 10^6$	0.020 μ s	1ms	19.93ms	16.7min		
$1 \cdot 10^7$	0.023 μ s	0.01s	0.23s	1.16 days		
$1 \cdot 10^8$	0.027 μ s	0.1s	2.66s	115.7 days		
$1 \cdot 10^9$	0.030 μ s	1s	29.9s	31.7 years		

Tabelle adaptiert von "The Algorithm Design Manual", S. Skiena, Springer

29

30

Konstanten in Landau-Symbolen

- Landau-Symbole Θ , O enthalten Konstanten c_1, c_2 bzw. c
 → für asymptotisches Verhalten ($n \rightarrow \infty$) vernachlässigbar
- Aber: ist n klein, spielen die Konstanten sehr wohl eine Rolle!
 - es kann angebracht sein einen eigentlich komplexeren Algorithmus einzusetzen, da bei kleinem n die Konstanten mehr zählen
 - Beispiel: Insertion Sort

Rechenregel für O-Notation I

Addition in O-Notation

Seien A_1, A_2 zwei Algorithmen mit Laufzeiten

$$T_1(n) = O(f(n)), \quad T_2(n) = O(g(n))$$

für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat der Algorithmus $A = A_1; A_2$ (sequentielle Ausführung von A_1, A_2) die Komplexität

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

Beispiel: Sei $A_1 = O(\log n)$, $A_2 = O(n^2)$. Dann ist für $A = A_1; A_2$

$$A = O(\max(\log n, n^2)) = O(n^2)$$

31

32

Rechenregel für O -Notation II

Zu zeigen:

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

- da $T_1(n) = O(f(n))$, gibt es $c_1 > 0$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$T_1(n) \leq c_1 f(n) \quad \text{für } n \geq n_1$$

- da $T_2(n) = O(g(n))$, gibt es $c_2 > 0$ und $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$T_2(n) \leq c_2 g(n) \quad \text{für } n \geq n_2$$

- Setze $n_0 := \max(n_1, n_2)$, dann ist für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq (c_1 + c_2) \max(f(n), g(n)) \end{aligned}$$

- das bedeutet $T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$ ✓

33

Komplexität der elementaren Bausteine

- Elementarer Verarbeitungsschritt:
 - $O(1)$
- Sequenz:
 - Addition in O -Notation
- Bedingter Verarbeitungsschritt:
 - Maximum von Komplexität von if und else Block, sowie
 - $O(1)$ für Auswertung der Bedingung
- Wiederholung:
 - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit Komplexität Schleifenkörper, sowie
 - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit $O(1)$ für Auswertung der Schleifenbedingung

34

Komplexität eines Algorithmus

Algorithmus besteht aus elementaren Bausteinen

→ Komplexität eines ganzen Algorithmus ergibt sich aus

- Komplexität der elementaren Bausteine
- und der Addition in O -Notation

35

Komplexität Operationen elementarer Datenstrukturen

- sequentielle Liste:
 - elementAt $O(1)$, insert $O(n)$, erase $O(n)$
- verkettete Liste:
 - elementAt $O(n)$, insert $O(n)$, erase $O(n)$
- Stack als sequentielle Liste:
 - push, pop, top alle $O(1)$
- Stack als verkettete Liste:
 - push, pop, top alle $O(1)$
- Queue als verkettete Liste:
 - enqueue, dequeue beide $O(1)$

36

Zusammenfassung

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
 - Motivation
 - Das RAM-Modell
 - Landau-Symbole