





## Programm heute

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

9

## RAM-Modell

- einfaches Rechnermodell für Laufzeitanalyse
- Ziel: **Abschätzung** der erforderlichen Ressourcen zur Ausführung eines Algorithmus
  - exakte Zeit der Ausführung ist nicht relevant
- Modell: **Random Access Machine**, kurz **RAM**

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

10

## Annahmen im RAM-Modell

- nur **sequentielle Ausführungen**
  - das heißt nur 1 Prozessor, keine Parallelität
- alle Daten liegen **direkt zugreifbar** im Speicher ( $\rightarrow$  RAM)
- jeder Speicherzugriff **dauert gleich lang**
  - das ist in Wahrheit nicht der Fall! (Speicher-Hierarchie)
- alle elementaren Verarbeitungsschritte benötigen **eine Zeiteinheit**
  - Wertzuweisung
  - Arithmetische Operationen: +, -, \*, /, %, ceil, floor
  - Vergleichsoperationen: <, >, !=
  - Kontrollflußoperationen: **if, else**

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

11

## Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus	Anzahl Schritte
<code>X = X+1;</code>	
<code>for i=1 to n {   X = X+1; }</code>	
<code>for i=1 to n {   for j=1 to n {     X = X+1;   } }</code>	

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

12

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

Komplexeres Beispiel:

Algorithmus A bestehend aus drei Teilen A1, A2, A3:

A = A1; A2; A3

mit

A1	A2	A3
X = X+1; Y = Y+1; Z = Z+1;	<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { X = X+Y; Y = Y*Z; }	<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { <b>for</b> j=1 <b>to</b> n { X = X+1; Y = Y+2; Z = Z+3; } }

Gesamt ist für A:  $T(n) = 3 + 2n + 3n^2$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

13

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

$$T(n) = 3 + 2n + 3n^2$$

- wie ist das Wachstum von  $T(n)$ ?
- Beispiel-Werte für n:

$n = 2$	$T(2) = 3 + 4 + 12$
$n = 10$	$T(10) = 3 + 20 + 300$
$n = 100$	$T(100) = 3 + 200 + 30000$
$n = 1000$	$T(1000) = 3 + 2000 + 3000000$

→ quadratischer Term dominiert

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

14

## Programm heute

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

15

## Komplexität

Beispiele zeigen: Term mit höchstem Exponent dominiert  
Wachstumsrate

Präzise Notation → Landau-Symbole

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

16

# Landau-Symbol $\Theta$

## Landau-Symbol $\Theta$

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Landau-Symbol  $\Theta(g)$  ist definiert als die Menge

$$\Theta(g) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \right. \\ \left. \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \right\}$$

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in \Theta(g)$  schreiben wir kurz:  $f = \Theta(g)$ .

- $f$  ist also bis auf konstanten Faktor im wesentlichen "gleich" der Funktion  $g$  für  $n \geq n_0$
- man sagt auch:  $g$  ist **asymptotisch scharfe Schranke** von  $f$  (von oben und unten)
- Kurznotation:  $f = \Theta(g)$  oder  $f(n) = \Theta(g(n))$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

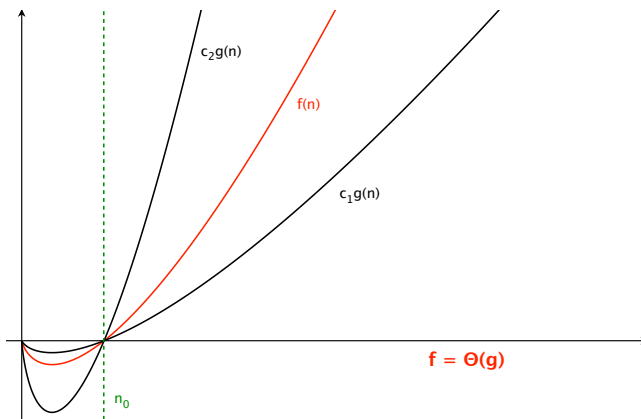
---

---

---

# Landau-Symbol $\Theta$

$$\Theta(g) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \right. \\ \left. \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \right\}$$



Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel: Laufzeit Insertion Sort I

- Laufzeit für worst case von Insertion Sort:

$$T(n) = an^2 + bn - c,$$

wobei  $a = \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}$ ,  $b = c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_9$   
und  $c = c_2 + c_4 + c_5 + c_9$

- weitere Annahme: alle Konstanten  $c_i = 1$  für  $i = 1, \dots, 9$

$$\rightarrow T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

19

## Beispiel: Laufzeit Insertion Sort II

$$T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

**Behauptung:**  $T(n) = \Theta(n^2)$

- Zu zeigen: finde  $c_1, c_2 > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq c_1 n^2 \leq T(n) \leq c_2 n^2 \quad \text{für } n \geq n_0$$

- linke Seite:

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4 \quad \left| \frac{1}{n^2} \right.$$

$$0 \leq c_1 \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2}$$

Wähle z.B.  $n_0 = 1$ , dann  $c_1 = 1$ .

- rechte Seite:  $n_0 = 1$  und  $\frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2} \leq 5 = c_2$  ✓

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

20



## Beispiel: Polynom 2. Grades

Allgemeiner:

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

**Behauptung:**  $f(n) = \Theta(n^2)$

- wähle  $c_1 = \frac{a}{4}$ ,  $c_2 = \frac{7a}{4}$  sowie  $n_0 = 2 \cdot \max\left(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}}\right)$
- es folgt:  $0 \leq c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n^2$  für  $n \geq n_0$  ✓

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

21

## Beispiel: Polynome vom Grad $d$

Noch allgemeiner:

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $a_d > 0$  (Polynom vom Grad  $d$ ).

Dann gilt:

$$p(n) = \Theta(n^d)$$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

22

# Landau-Symbol $O$

## Landau-Symbol $O$

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Landau-Symbol  $O(g)$  ist definiert als die Menge

$$O(g) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \\ \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in O(g)$  schreiben wir kurz:  $f = O(g)$ .

- man sagt auch:  $g$  ist **asymptotisch obere Schranke** von  $f$
- auch genannt: “**gross-O-Notation**”
- aus  $f = \Theta(g)$  folgt automatisch  $f = O(g)$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

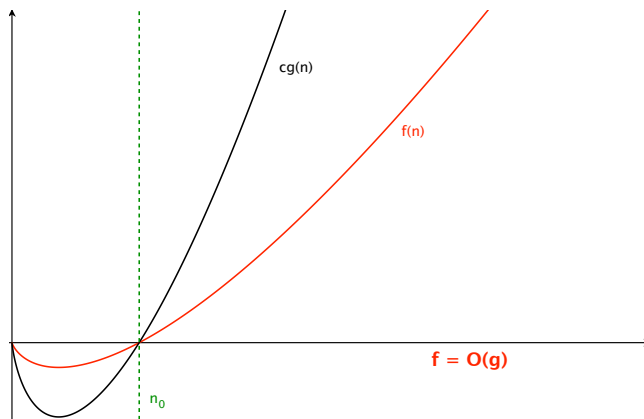
---

---

---

# Landau-Symbol $O$

$$O(g) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \\ \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$$



Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Beispiel: lineare Funktion

$$f(n) = 60n + 12$$

- **Behauptung:**  $f(n) = O(n)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn \quad \left| \frac{1}{n} \right.$$
$$0 \leq 60 + \frac{12}{n} \leq c$$

also z.B.  $n_0 = 12$  und  $c = 61$  ✓

- **Behauptung:**  $f(n) = O(n^2)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn^2 \iff 0 \leq \frac{60}{n} + \frac{12}{n^2} \leq c$$

also z.B.  $n_0 = 1$  und  $c = 73$  ✓

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

25

## Landau-Symbole $\Theta$ und $O$

- Landau-Symbole beschreiben **Wachstumsverhalten** von Funktionen
- $f = \Theta(g)$  bedeutet:  $g$  ist asymptotisch **scharfe** Schranke von  $f$
- $f = O(g)$  bedeutet:  $g$  ist asymptotisch **obere** Schranke von  $f$
- Landau-Symbol  $\Theta$  ist "exakt"
- Landau-Symbol  $O$  kann zu "grosszügig" sein (siehe vorige Folie)
- Landau-Symbol  $O$  beschreibt Laufzeit im schlechtesten Fall (worst case)

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

26

# Effizienz von Algorithmen I

O-Notation erlaubt **Kategorisierung** der Effizienz von Algorithmen

- $O(1)$ : konstante Laufzeit
  - unabhängig von Problemgröße
  - *Beispiel*: Löschen von erstem Element in verketteter Liste
- $O(\log n)$ : logarithmische Laufzeit
  - Laufzeit wächst langsamer als Problemgröße
  - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
  - *Beispiele*: Suchen in sortierter Liste (Binäre Suche, s. Kapitel 8)
- $O(n)$ : lineare Laufzeit
  - Laufzeit wächst vergleichbar zur Problemgröße
  - jedes Eingabe-Element erfordert  $O(1)$  Arbeit
  - *Beispiele*: Suchen in unsortierter Liste, Löschen von Element in sequentieller Liste

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Effizienz von Algorithmen II

- $O(n \log n)$ : "loglinear" Laufzeit
  - Laufzeit wächst schneller als Problemgröße
  - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
  - *Beispiele*: Quicksort (s. Kapitel 6), FFT (s. Kapitel 10)
- $O(n^2)$ : quadratische Laufzeit
  - typisch für Algorithmen, die Element paarweise kombinieren
  - *Beispiele*: Insertion Sort, Matrix-Vektor Multiplikation (s. Kapitel 10)
- $O(n^3)$ : kubische Laufzeit
  - *Beispiel*: Matrix-Matrix Multiplikation
- $O(2^n)$ : exponentielle Laufzeit
  - auch als "unlösbar" bezeichnet (intractable)
  - *Beispiel*: Traveling Salesman (kürzeste Route, so dass alle Städte exakt einmal besucht)

Notizen

---

---

---

---

---

---

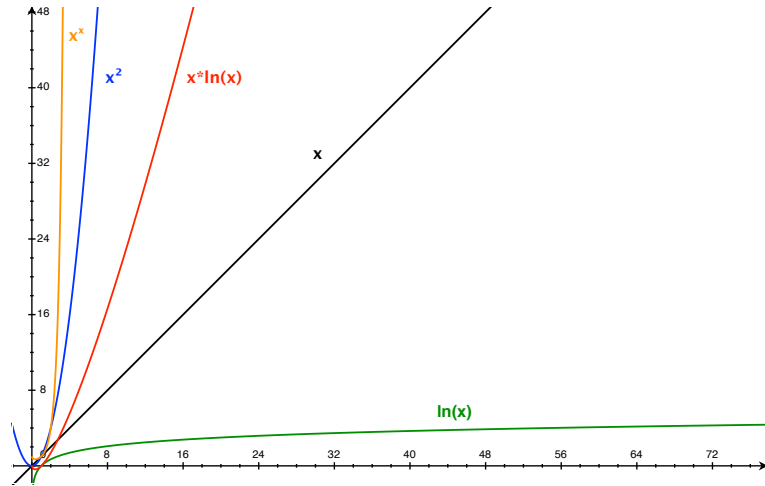
---

---

---

---

## Wiederholung: Wachstumsraten



Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

29

## Wiederholung: Wachstumsraten illustriert

Annahme: Rechner mit 1GHz Taktfrequenz

- eine Operation benötigt 1ns (nano-Sekunde)
- n bezeichne Anzahl Operationen

$n$	$T(n) = \ln(n)$	$T(n) = n$	$T(n) = n \ln(n)$	$T(n) = n^2$	$T(n) = 2^n$	$T(n) = n!$
10	0.003 $\mu$ s	0.01 $\mu$ s	0.033 $\mu$ s	0.1 $\mu$ s	1 $\mu$ s	3.63ms
20	0.004 $\mu$ s	0.02 $\mu$ s	0.086 $\mu$ s	0.4 $\mu$ s	1ms	77.1 years
30	0.005 $\mu$ s	0.03 $\mu$ s	0.147 $\mu$ s	0.9 $\mu$ s	1s	$8.4 \cdot 10^{15}$ years
40	0.005 $\mu$ s	0.04 $\mu$ s	0.213 $\mu$ s	1.6 $\mu$ s	18.3min	
50	0.006 $\mu$ s	0.05 $\mu$ s	0.282 $\mu$ s	2.5 $\mu$ s	13 days	
100	0.007 $\mu$ s	0.1 $\mu$ s	0.644 $\mu$ s	10 $\mu$ s	$4 \cdot 10^{13}$ years	
1000	0.010 $\mu$ s	1.0 $\mu$ s	9.966 $\mu$ s	1ms		
10000	0.013 $\mu$ s	10 $\mu$ s	130 $\mu$ s	100ms		
100000	0.017 $\mu$ s	0.1ms	1.67ms	10s		
$1 \cdot 10^6$	0.020 $\mu$ s	1ms	19.93ms	16.7min		
$1 \cdot 10^7$	0.023 $\mu$ s	0.01s	0.23s	1.16 days		
$1 \cdot 10^8$	0.027 $\mu$ s	0.1s	2.66s	115.7 days		
$1 \cdot 10^9$	0.030 $\mu$ s	1s	29.9s	31.7 years		

Tabelle adaptiert von "The Algorithm Design Manual", S. Skiena, Springer

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

30

# Konstanten in Landau-Symbolen

- Landau-Symbole  $\Theta, O$  enthalten Konstanten  $c_1, c_2$  bzw.  $c$   
→ für **asymptotisches Verhalten** ( $n \rightarrow \infty$ ) vernachlässigbar
- Aber: ist  $n$  **klein**, spielen die Konstanten sehr wohl eine Rolle!
  - es kann angebracht sein einen eigentlich komplexeren Algorithmus einzusetzen, da bei kleinem  $n$  die Konstanten mehr zählen
  - Beispiel: Insertion Sort

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Rechenregel für O-Notation I

## Addition in O-Notation

Seien  $A_1, A_2$  zwei Algorithmen mit Laufzeiten

$$T_1(n) = O(f(n)), \quad T_2(n) = O(g(n))$$

für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann hat der Algorithmus  $A = A_1; A_2$  (sequentielle Ausführung von  $A_1, A_2$ ) die Komplexität

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

**Beispiel:** Sei  $A_1 = O(\log n), A_2 = O(n^2)$ . Dann ist für  $A = A_1; A_2$

$$A = O(\max(\log n, n^2)) = O(n^2)$$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rechenregel für O-Notation II

Zu zeigen:

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

- da  $T_1(n) = O(f(n))$ , gibt es  $c_1 > 0$  und  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit

$$T_1(n) \leq c_1 f(n) \quad \text{für } n \geq n_1$$

- da  $T_2(n) = O(g(n))$ , gibt es  $c_2 > 0$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$T_2(n) \leq c_2 g(n) \quad \text{für } n \geq n_2$$

- Setze  $n_0 := \max(n_1, n_2)$ , dann ist für  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq (c_1 + c_2) \max(f(n), g(n)) \end{aligned}$$

- das bedeutet  $T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$  ✓

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

33

## Komplexität der elementaren Bausteine

- Elementarer Verarbeitungsschritt:
  - $O(1)$
- Sequenz:
  - Addition in O-Notation
- Bedingter Verarbeitungsschritt:
  - Maximum von Komplexität von if und else Block, sowie
  - $O(1)$  für Auswertung der Bedingung
- Wiederholung:
  - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit Komplexität Schleifenkörper, sowie
  - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit  $O(1)$  für Auswertung der Schleifenbedingung

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

34

## Komplexität eines Algorithmus

Algorithmus besteht aus elementaren Bausteinen

→ Komplexität eines ganzen Algorithmus ergibt sich aus

- Komplexität der elementaren Bausteine
- und der Addition in  $O$ -Notation

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

35

## Komplexität Operationen elementarer Datenstrukturen

- sequentielle Liste:
  - elementAt  $O(1)$ , insert  $O(n)$ , erase  $O(n)$
- verkettete Liste:
  - elementAt  $O(n)$ , insert  $O(n)$ , erase  $O(n)$
- Stack als sequentielle Liste:
  - push, pop, top alle  $O(1)$
- Stack als verkettete Liste:
  - push, pop, top alle  $O(1)$
- Queue als verkettete Liste:
  - enqueue, dequeue beide  $O(1)$

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

36



# Zusammenfassung

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notizen

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---