

# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures  
Technische Universität München



## Programm heute

- ① Einführung
- ② Mathematische Grundlagen
- ③ Elementare Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- ⑥ Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs  
Entwurfsprinzipien  
Divide and Conquer

6

## Algorithmen-Entwurf

- Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!
  - insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar
- Programmieren ist **kreative** Tätigkeit
  - “The Art of Computer Programming” (D. Knuth)
- Unterstützung durch **Algorithmen-Muster**
  - auch **Design Patterns** genannt
  - “best practice”

## Entwurfsprinzip: Verfeinerung

- intuitive Vorgehensweise: **schrittweise Verfeinerung**
- auch genannt: **Top-Down Entwurf**
- Schema:
  - ① Lösungsidee mit groben Anweisungen
  - ② Schrittweise Verfeinerung der Anweisungen in detailliertere / konkretere Anweisungen
  - ③ Zielprogramm in Programmiersprache (z.B. C)

7

8

## Verfeinerung: Beispiel I

Beispiel-Problem: Tee-Zubereitung

- Lösungsidee mit groben Anweisungen:
  - 1 Wasser kochen
  - 2 Wasser in die Tasse
  - 3 Teebeutel in die Tasse
  - 4 Teebeutel herausnehmen
- Verfeinerung:
  - 1 Wasser kochen
    - 1 Wasser in Wasserkocher füllen
    - 2 Wasserkocher anstecken
    - 3 Wasserkocher anschalten
    - 4 Warten bis Wasser kocht
    - 5 Wasserkocher ausschalten
  - 2 Wasser in die Tasse
    - 1 Wasserkocher abstecken
    - 2 Wasser in Tasse füllen
  - 3 ...

9

## Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
  - 1 Eingabe Zahlenfolge X;
  - 2 Sortiere X;
  - 3 Bestimme Median  $xt$  von X;
  - 4 Gebe  $xt$  aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
  - 1  $X = \text{EingabeFolge}();$  // Eingabe der Folge
  - 2  $\text{Sort}(X);$  // rufe Sortiermethode auf
  - 3  $xt = X[\text{ceil}(X.\text{laenge} / 2)];$  // bestimme Median
  - 4  $\text{Output}(xt);$  // gib  $xt$  aus
- Verfeinerung (C++):
  - 1  $\text{int } X[] = \{3, 4, 7, 10, 11\};$  // Folge fest vorgegeben
  - 2  $\text{int } \text{length} = 5;$  // fixe Länge
  - 3  $\text{std::sort}(X, X+5);$  // sortiere Folge
  - 4  $\text{int } xt = X[\text{ceil}(\text{length} / 2)];$  // bestimme Median
  - 5  $\text{std::cout} \ll \text{"Median ist " } \ll xt;$  // gib  $xt$  aus
- ...

11

## Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

### Definition Median

Sei  $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{N}$  eine aufsteigend sortierte Folge natürlicher Zahlen mit  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Der Median  $\tilde{x}$  ist definiert als

$$\tilde{x} := x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Beispiele:

- Folge 3, 4, 7, 10, 11: Median ist 7
- Folge 21, 33, 47, 111: Median ist 33

(Bemerkung: manchmal ist der Median im Fall von  $n$  gerade auch als arithmetisches Mittel von  $x_{\frac{n}{2}}$  und  $x_{\frac{n}{2}+1}$  definiert)

10

## Verfeinerung

- keine festen Regeln für Verfeinerungs-Prozess
- passende Notation für Detailstufe verwenden (z.B. Pseudocode)
- jeder Verfeinerungsschritt enthält **Entwurfs-Entscheidungen**
  - bestimmt z.B. Art der Eingabe von Daten
  - bestimmt z.B. Laufzeitverhalten des Programms (Größe, Geschwindigkeit)

12

## Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- **Idee:** allgemeines **Algorithmen-Muster** entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: **Design Pattern** oder “best practice” Strategie
- **Beispiel Problemklasse:** finden einer optimalen Lösung bezüglich Kosten in großem Lösungsraum
  - konkret z.B. kürzester Weg zwischen zwei Städten
- **Verfahrensweise** Algorithmen-Muster:
  - Beschreibung des Lösungsverfahrens an möglichst einfachem Beispiel
  - Transfer auf konkrete Problemstellung

13

## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- 6 **Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs**
  - Entwurfsprinzipien
  - Divide and Conquer

14

## Entwurfsprinzip: Divide and Conquer

### Definition: Divide and Conquer (nach G. Saake)

Divide and Conquer ist die **rekursive** Rückführung eines zu lösenden Problems auf ein **identisches** Problem mit **kleinerer** Eingabemenge.

- **Divide and Conquer:** zu deutsch “Teile und herrsche”
- **Prinzip:**
  - teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
  - rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf

15

## Muster: Divide and Conquer

### Divide and Conquer als Algorithmen-Muster:

- 1 **Teile** gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
  - löse Teilaufgaben einzeln
  - setze Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen **zusammen**
- 2 Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann
- 3 Jede Teilaufgabe sollte **von derselben Art** sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

16

## Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer-Muster als Pseudocode:

**Input:** Aufgabe  $A$

**DivideAndConquer**( $A$ ):

```
if (A klein) {
  löse A explizit;
}
else {
  teile A in Teilaufgaben  $A_1, \dots, A_n$  auf;
  DivideAndConquer( $A_1$ );
  ...
  DivideAndConquer( $A_n$ );
  setze Lösung für  $A$  zusammen aus Lösungen für  $A_1, \dots, A_n$ 
}
```

17

## Divide and Conquer: MergeSort

Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  Feld mit  $n$  natürlichen Zahlen  $a_i \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe:** sortiere  $A$  in aufsteigender Reihenfolge.

- Lösung mit Divide and Conquer-Muster: [Merge Sort](#)
- Idee:
  - **Divide:** teile  $A$  auf in zwei gleich große Teilfelder
  - **Rekursion:** rufe Merge Sort rekursiv für die zwei Teilfelder auf
  - **Conquer:** setze die Teilfelder zusammen ([merge](#) bzw. mischen)
- Wann ist Teilfolge "klein", d.h. wann löst man explizit?  
→ Teilfolge mit nur [einem](#) Element → sortiert!

18

## MergeSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld  $A$

**Output:** sortiertes Feld

**MergeSort**( $A$ ):

```
if (A ein-elementig) { // Teilfeld ist klein
  return A;
}
else {
  halbiere A in  $A_1$  und  $A_2$ ; // Divide
   $A_1 = \mathbf{MergeSort}(A_1)$ ; // Rekursion
   $A_2 = \mathbf{MergeSort}(A_2)$ ; // Rekursion
  return Merge( $A_1, A_2$ ); // Conquer
}
```

→ "komplizierter" Teil ist in **Merge**!

19

## MergeSort: Merge Funktion

**Input:** zu sortierende Felder  $A_1, A_2$

**Output:** sortiertes Feld  $B$

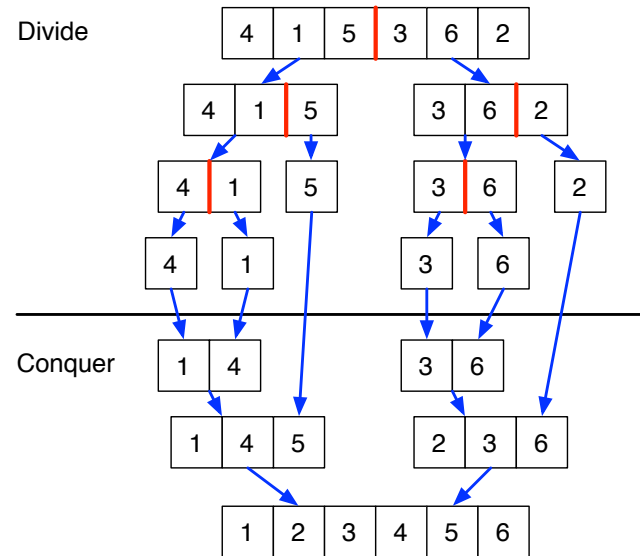
**Merge**( $A_1, A_2$ ):

```
 $B =$  leeres Feld;
while ( $A_1$  und  $A_2$  nicht leer) {
  entferne das kleinere der Anfangselemente von  $A_1$  bzw.  $A_2$ ;
  hänge dieses Element an  $B$  an;
}
häng das verbliebene, nicht-leere Feld  $A_1$  oder  $A_2$  an  $B$  an;
return  $B$ ;
```

→ tatsächliche Implementation muß Entfernen/Anhängen effizient lösen!

20

## MergeSort: Beispiel



21

## MergeSort: Eigenschaften

- Merge Sort benötigt **zusätzlichen Speicher** in Funktion **Merge**
  - insgesamt  $n$  zusätzliche Elemente falls  $A$  Länge  $n$
- best und worst case sind identisch
- die meiste Arbeit steckt in **Merge**
  - wie viel genau?

22

## MergeSort: Komplexität Merge Funktion

- $|A| = n$
- Sei  $|A_1| = n_1, |A_2| = n_2$   
 $\rightarrow n_1 + n_2 \leq n$
- Annahme:
  - entfernen ist  $O(1)$
  - anhängen ist  $O(1)$
- Anzahl **while** Durchläufe:  
 $\min(n_1, n_2)$
- anschließend  
 $\max(n_1, n_2) - \min(n_1, n_2)$   
Anhänge-Operationen  
 $\rightarrow$  **Merge** ist  $O(n_1 + n_2)$
- also ist **Merge** auch  $O(n)$ !

**Input:** zu sortierende Felder  $A_1, A_2$   
**Output:** sortiertes Feld  $B$

**Merge( $A_1, A_2$ ):**  
 $B =$  leeres Feld;  
**while** ( $A_1$  und  $A_2$  nicht leer) {  
entferne das kleinere der Anfangs-  
elemente von  $A_1$  bzw.  $A_2$ ;  
hänge dieses Element an  $B$  an;  
}  
hänge das verbliebene, nicht-leere  
Feld  $A_1$  oder  $A_2$  an  $B$  an;  
**return**  $B$ ;

23

## MergeSort: Komplexität I

- Laufzeit von Merge Sort  
 $T(n) = ?$
- Zeilen 1-3: "Problem klein"  
 $O(1)$
- Zeile 5: Divide  
 $O(1)$
- Zeile 6 und 7: Rekursion  
jeweils  $T(n/2)$
- Zeile 8: Conquer  
 $O(n)$

**Input:** zu sortierendes Feld  $A$   
**Output:** sortiertes Feld

**MergeSort( $A$ ):**  
1 **if** ( $A$  ein-elementig) {  
2 **return**  $A$ ;  
3 }  
4 **else** {  
5 halbiere  $A$  in  $A_1$  und  $A_2$ ;  
6  $A_1 =$  **MergeSort**( $A_1$ );  
7  $A_2 =$  **MergeSort**( $A_2$ );  
8 **return** **Merge**( $A_1, A_2$ );  
9 }

$$\rightarrow T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

24

## MergeSort: Komplexität II

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

liefert durch Auflösen der Rekursionsgleichung

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Wie kann man das zeigen?

- Master-Theorem (s. Cormen, Kapitel 4.5)
- intuitiver: Rekursions-Baum

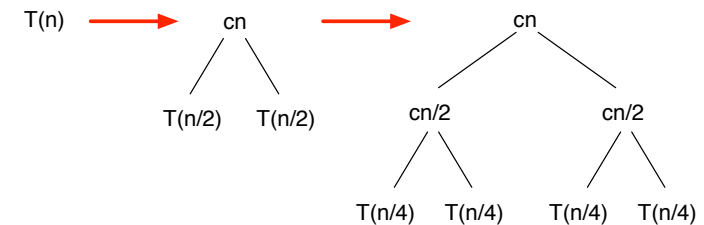
hierzu Annahme:  $c$  passende Konstante, so daß

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

und sei  $n$  Zweier-Potenz, d.h.  $n = 2^k$  für  $k \in \mathbb{N}$

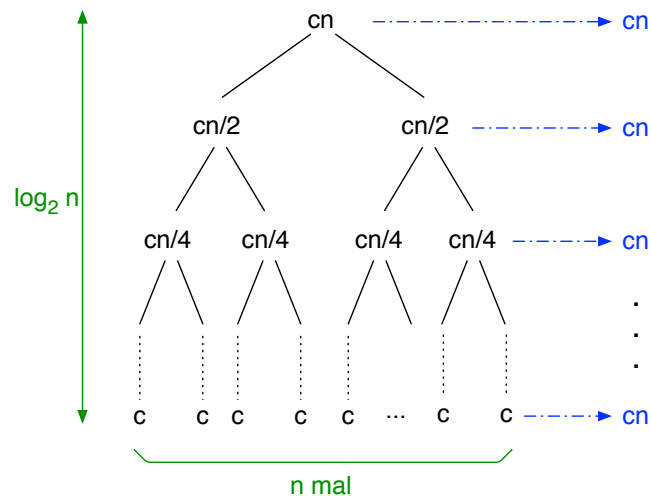
25

## MergeSort: Rekursions-Baum



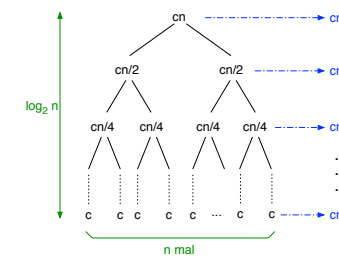
26

## MergeSort: Rekursions-Baum



27

## MergeSort: Komplexität III



- Baum hat Höhe  $\log_2 n$ , also  $\log_2 n + 1$  Ebenen
- pro Ebene  $cn$  Kosten  
→ Gesamtkosten  $cn(\log_2 n + 1) = cn \log_2 n + cn$

$$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n) \quad \checkmark$$

28

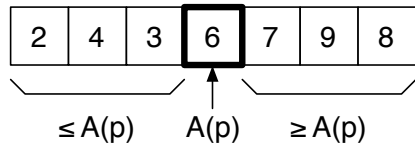
## Divide and Conquer: QuickSort

QuickSort:

- Muster: Divide and Conquer
- in-place (ohne extra Speicherbedarf)

Hauptidee:

- teile Feld  $A$  mittels **Pivot-Element**  $A(p)$  in zwei Teile
- links vom Pivot-Element  $A(p)$  sind alle Elemente kleiner als  $A(p)$
- rechts vom Pivot-Element  $A(p)$  sind alle Elemente größer als  $A(p)$



29

## QuickSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld  $A$   
Indices untere und obere Grenze  $u, o$

```

QuickSort:( $A, u, o$ )
  if ( $o > u$ ) {
    bestimme Index  $p$  des Pivot-Elements; // ist beliebig
     $pn = \text{Partition}(A, u, o, p)$ ; // Divide
    QuickSort( $A, u, pn - 1$ ); // Rekursion
    QuickSort( $A, pn + 1, o$ ); // Rekursion
  }
    
```

→ "Intelligenz" in **Partition**

30

## QuickSort: Funktion Partition I

**Input:** zu zerlegendes Feld  $A$ ,  
Indices von unterer und oberer Grenze  $u, o$ ,  
Position  $p$  des Pivot-Elements

**Output:** neue Position  $pn$  des Pivot-Elements

**Partition**( $A, u, o, p$ )

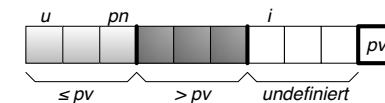
```

 $pn = u$ ;
 $p_v = A(p)$ ;
tausche  $A(p)$  und  $A(o)$ ; // Pivot-Element nach rechts
for  $i = u$  to  $o - 1$  {
  if ( $A(i) \leq p_v$ ) {
    tausche  $A(pn)$  und  $A(i)$ ;
     $pn = pn + 1$ ;
  }
}
tausche  $A(o)$  und  $A(pn)$ ; // Pivot-Element zurück
return  $pn$ ;
    
```

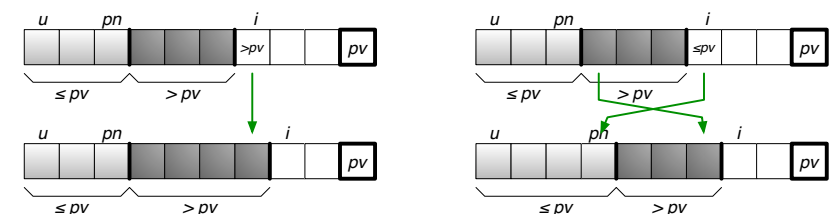
31

## QuickSort: Funktion Partition II

Partitions-Prinzip:

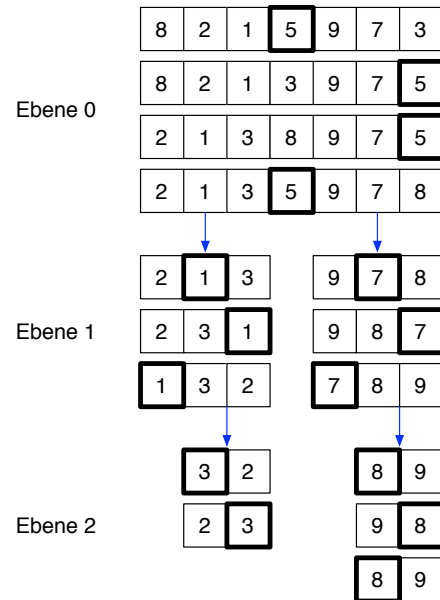


Austausch-Schritt:



32

## QuickSort: Beispiel



33

## QuickSort: Komplexität

Komplexität von QuickSort:

- worst case:  $\Theta(n^2)$ 
  - tritt ein wenn Pivot-Element ständig unbalanciert ist (d.h. ein Teilfeld leer)
  - insbesondere wenn Feld bereits sortiert
- best case:  $O(n \log n)$ 
  - wenn Pivot-Element Folge laufend halbiert
- im Durchschnitt:  $O(n \log n)$ 
  - Beweis aufwendig
- typische Verbesserung: randomisierte Wahl von Pivot-Element
  - Komplexität dann immer noch  $O(n \log n)$

Bei Interesse an Beweis/Herleitung: s. Cormen, Kapitel 7.2 und 7.4

34

## Vergleich Sortier-Algorithmen

- Insertion Sort
  - in-place
  - Komplexität  $O(n^2)$ , best case:  $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
  - in-place
  - Komplexität  $O(n^2)$
- MergeSort
  - benötigt zusätzlichen Speicher
  - Komplexität  $O(n \log n)$
- QuickSort
  - in-place
  - Komplexität im Mittel  $O(n \log n)$ , worst case:  $O(n^2)$

35

## Zusammenfassung

- 1 Einführung
- 2 Mathematische Grundlagen
- 3 Elementare Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- 6 Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
  - Entwurfsprinzipien
  - Divide and Conquer

36