Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

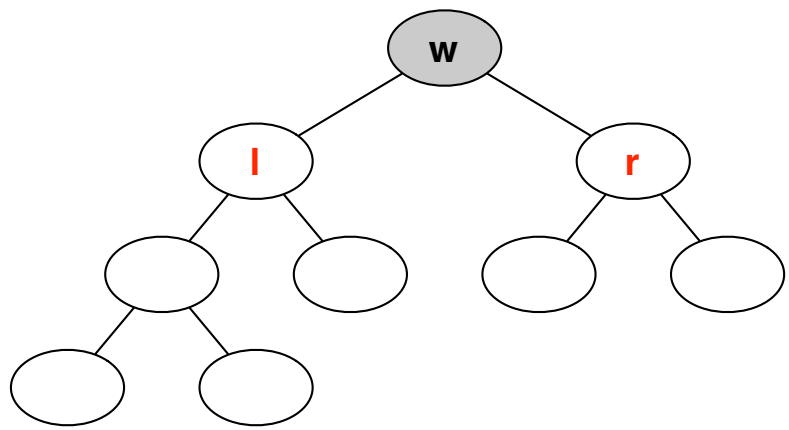
7. Fortgeschrittene Datenstrukturen
   - Graphen
   - Bäume
   - Heaps

Traversierung von Binärbäumen

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

In welcher Reihenfolge durchläuft man G?

- Wurzel zuerst
- danach linker oder rechter Kind-Knoten l bzw. r?
- falls l: danach Kind-Knoten von l oder zuerst r?
- falls r: danach Kind-Knoten von r oder zuerst l?



$\rightarrow$ falls zuerst in die Tiefe: Depth-first search (DFS)

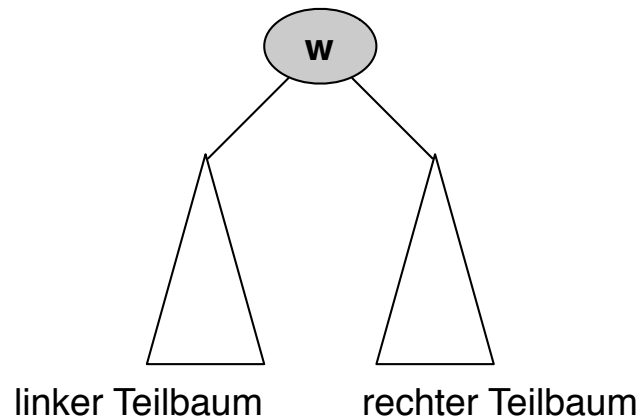
$\rightarrow$ falls zuerst in die Breite: Breadth-first search (BFS)

DFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Tiefensuche (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

1. Pre-order Reihenfolge
   - besuche Wurzel
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - durchlaufe rechten Teilbaum
2. In-order Reihenfolge
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - besuche Wurzel
   - durchlaufe rechten Teilbaum
3. Post-order Reihenfolge
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - durchlaufe rechten Teilbaum
   - besuche Wurzel



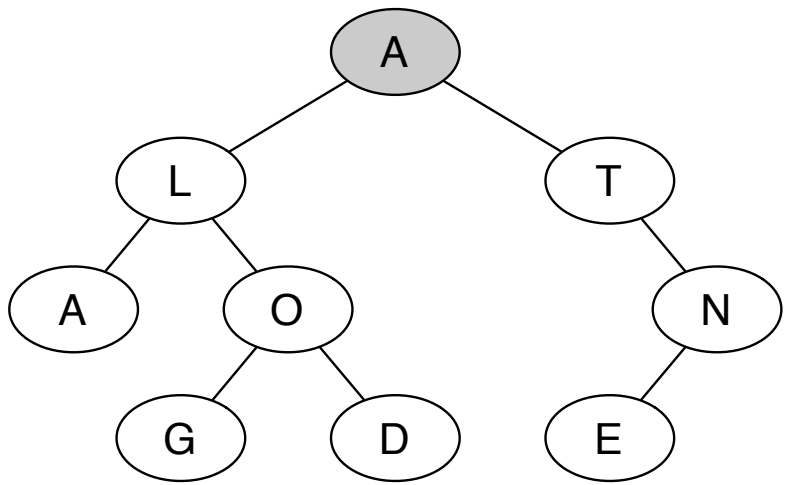
Pre-order Traversierung

Pre-order Reihenfolge:

- besuche Wurzel
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, A, O, G, D, T, N, E



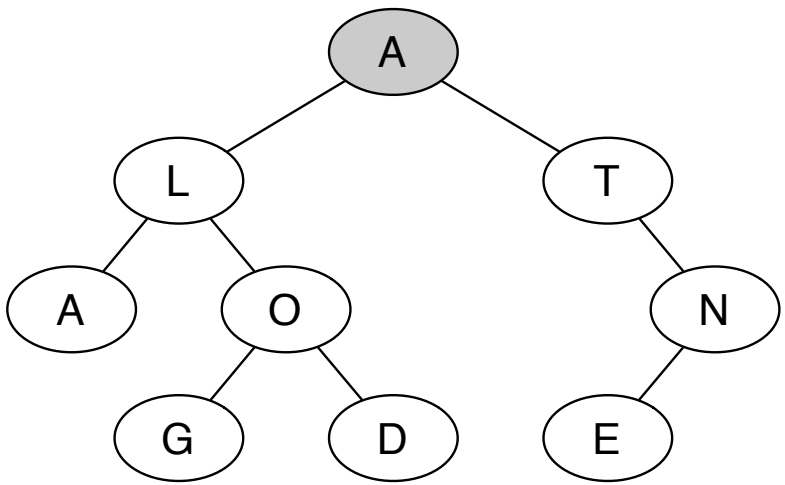
In-order Traversierung

In-order Reihenfolge:

- durchlaufe linken Teilbaum
- besuche Wurzel
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, G, O, D, A, T, E, N



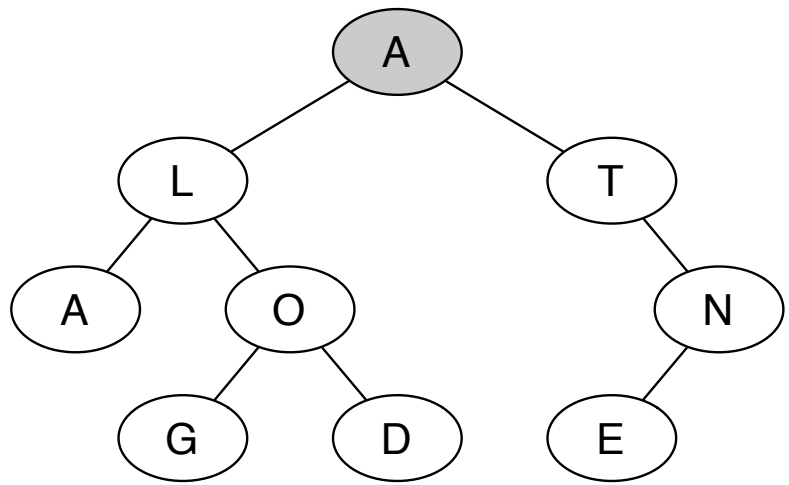
Post-order Traversierung

Post-order Reihenfolge:

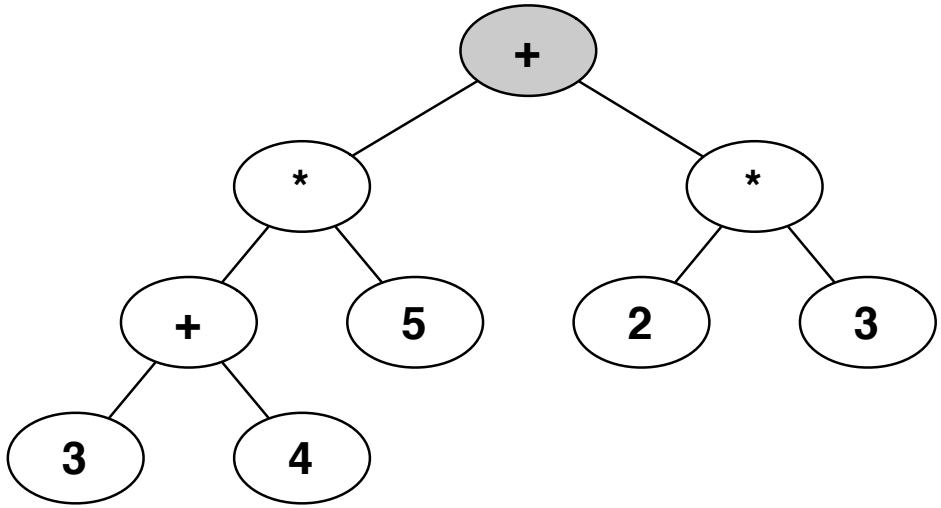
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum
- besuche Wurzel

Beispiel:

A, G, D, O, L, E, N, T, A



Beispiel: Arithmetischer Term



Traversierung:

- Pre-order: + * + 3 4 5 * 2 3
- In-order: 3 + 4 * 5 + 2 * 3
- Post-order: 3 4 + 5 * 2 3 * +

Implementierung DFS Traversierung

Datenstruktur:

- Algorithmus preorder:

```
preorder(knoten):
    if (knoten == NULL) return;
    besuche(knoten);
    preorder(knoten.links);
    preorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus inorder:

```
inorder(knoten):
    if (knoten == NULL) return;
    inorder(knoten.links);
    besuche(knoten);
    inorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus postorder:

```
postorder(knoten):
    if (knoten == NULL) return;
    postorder(knoten.links);
    postorder(knoten.rechts);
    besuche(knoten);
```

- rekursive Algorithmen
- auf Call-Stack basiert

Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

- Datenstruktur:

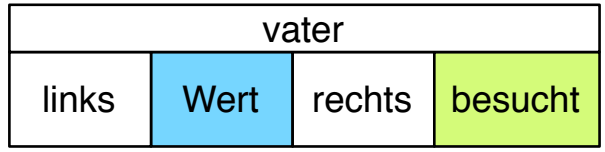
- Hilfsmittel: Stack von Knoten “knotenStack”

```
postorderIterativ(wurzelKnoten):
    knotenStack.push(wurzelKnoten);
    while ( !knotenStack.isEmpty() ) {
       knoten = knotenStack.top();
       if ( (knoten.links != NULL) && (!knoten.links.besucht) )
          knotenStack.push(knoten.links);
       else if ( (knoten.rechts != NULL) && (!knoten.rechts.besucht) )
          knotenStack.push(knoten.rechts);
       else {
          besuche(knoten);
          knoten.besucht = true;
          knotenStack.pop();
       }
    }
```

Implementierung ohne Rekursion und ohne Stack

- Datenstruktur:

Knoten:



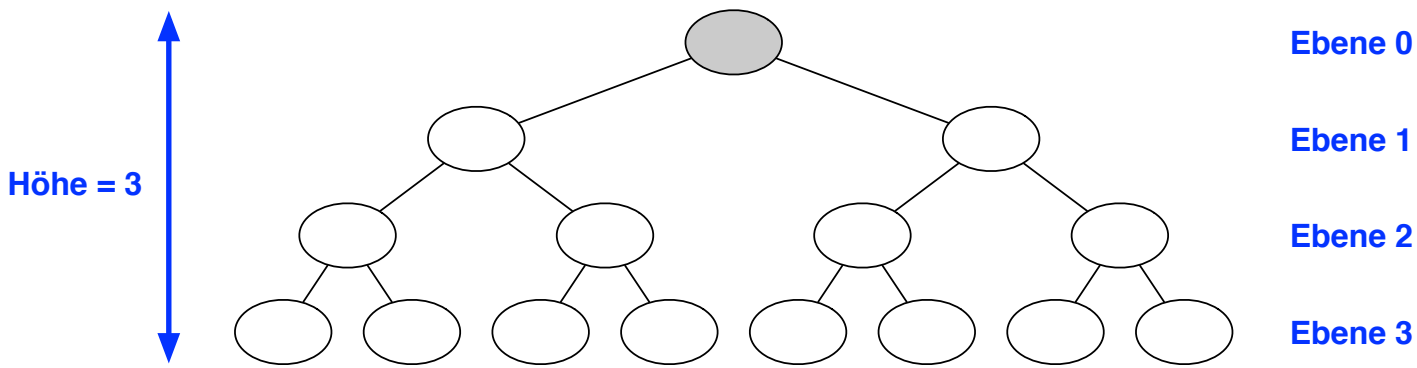

```
postorderIterativeOhneStack(wurzelKnoten):
    knoten = wurzelKnoten;
    while (true) {
      if ( (knoten.links != NULL) && (!knoten.links.besucht) )
        knoten = knoten.links;
      else if ( (knoten.rechts != NULL) && (!knoten.rechts.besucht) )
        knoten = knoten.rechts;
      else {
        besuche(knoten);
        knoten.besucht = true;
        if (knoten.vater == NULL) break;
        else knoten = knoten.vater;
      }
    }
```

BFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Breitensuche (Breadth-first search, BFS):

- besuche Wurzel
- für alle Ebenen von 1 bis Höhe
  - besuche alle Knoten aktueller Ebene



Implementierung BFS Traversierung

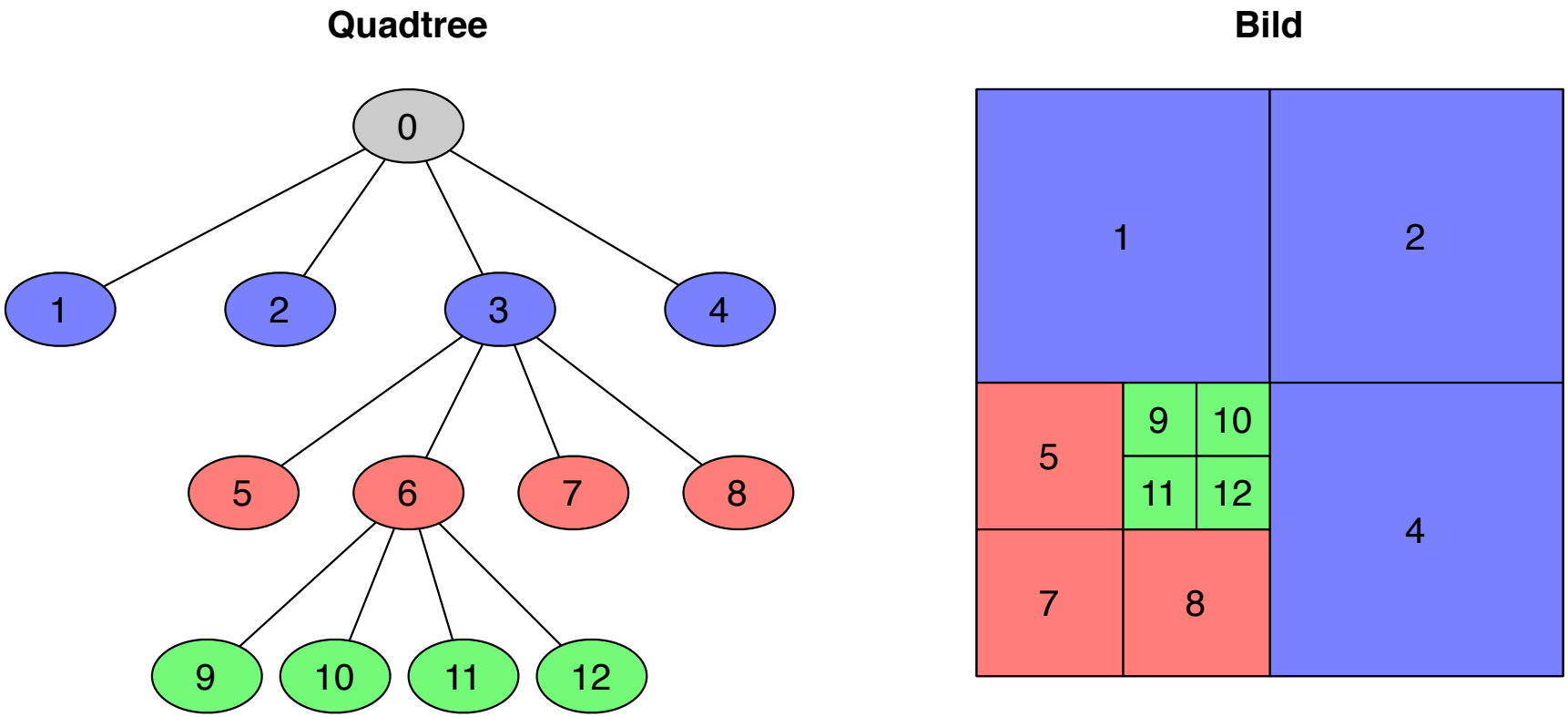
- Datenstruktur:

- Hilfsmittel: Queue von Knoten "knotenQueue"

```
breitensuche(wurzelKnoten):
    knotenQueue = leer;
    knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);
    while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {
        knoten = knotenQueue.dequeue();
        besuche(knoten);
        if (knoten.links != NULL)
            knotenQueue.enqueue(knoten.links);
        if (knoten.rechts != NULL)
            knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);
    }
```

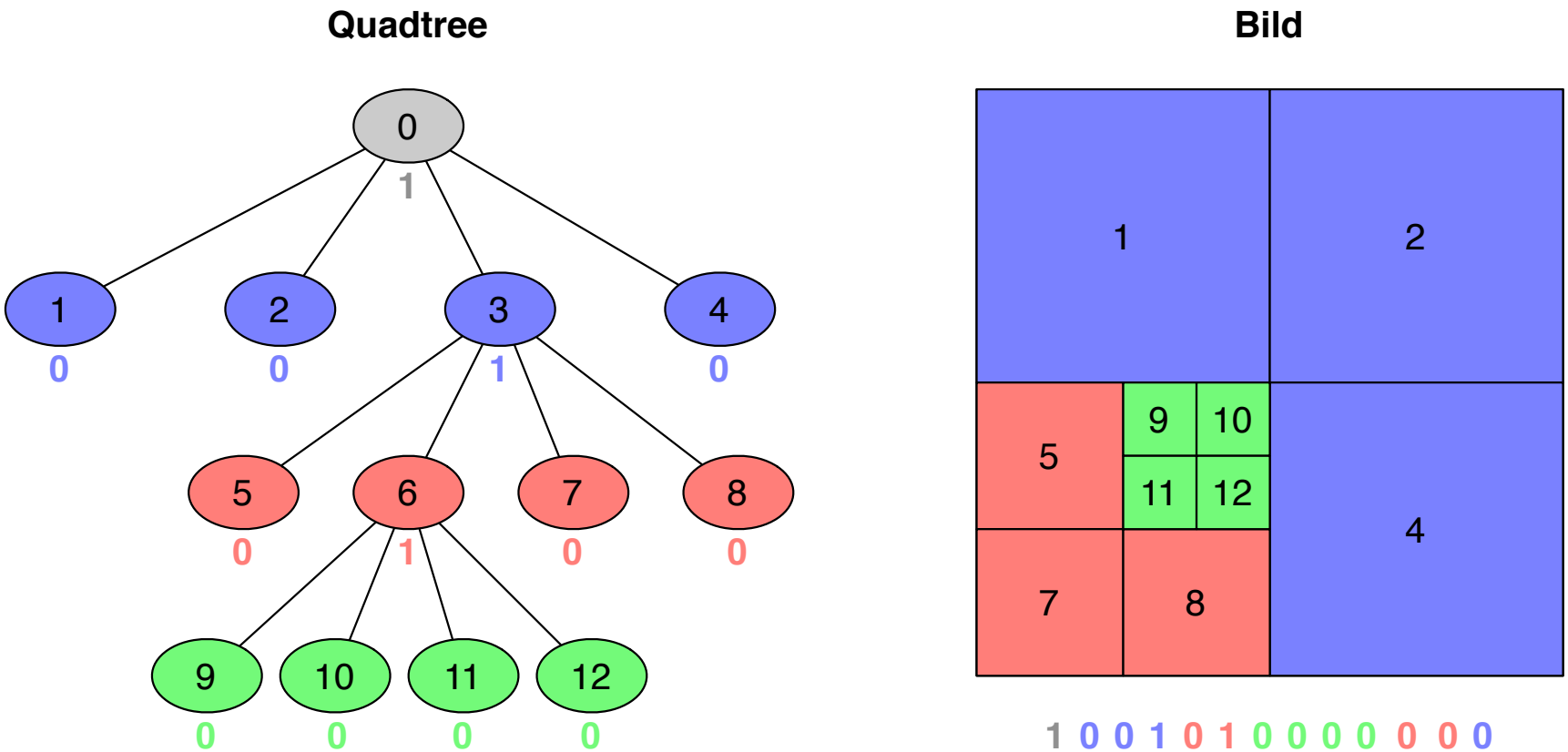
Anwendung: Quadtree I

- 4-närer Baum heißt Quadtree



Anwendung: Quadtree II

- Codierung des Baumes mit Binärziffern



Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen
   - Graphen
   - Bäume
   - Heaps

Definition Heap

Definition Heap

Sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch $\leq, \geq$ geordnet.
G heißt Heap, falls er folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- G ist fast vollständig, d.h. alle Ebenen sind vollständig gefüllt, ausser auf der untersten Ebene, die von links her nur bis zu einem bestimmten Punkt gefüllt sein muss.
- G erfüllt die Min-Heap-Eigenschaft bzw. die Max-Heap-Eigenschaft, d.h. für alle Knoten $v \in V$, $v \neq w$ gilt

  - Min-Heap: $key(v.vater) \leq key(v)$
  - Max-Heap: $key(v.vater) \geq key(v)$

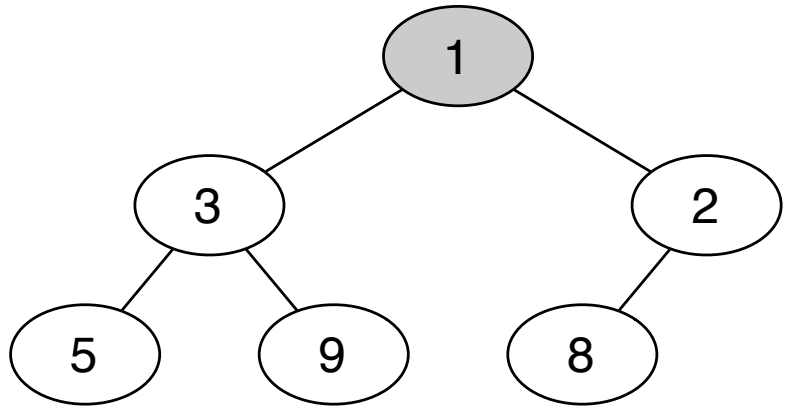
Entsprechend der Heap-Eigenschaft heißt G Min-Heap bzw. Max-Heap.

Bemerkungen zur Heap Definition

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap.

- wir beschränken uns hier auf Min-Heaps, alle Aussagen gelten mit entsprechenden trivialen Änderungen auch für Max-Heaps
- typische Keys von Knoten sind Zahlen, z.B. $key : V \to \mathbb{R}$
  - weiteres Beispiel: Strings als Keys, lexikographisch geordnet
- ein Heap ist kein abstrakter Datentyp!

Min-Heap: Beispiel



- Keys sind hier natürliche Zahlen
- Baum ist fast vollständiger Binärbaum
- Baum erfüllt Min-Heap-Eigenschaft:
  - für alle Knoten v (ausser Wurzel) gilt

$$key(v.vater) \leq key(v)$$

Heap Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Heap mit Wurzel $w \in V$.

- G als Min-Heap bzw. Max-Heap hat immer Element mit kleinstem bzw. größtem Key in Wurzel w
- G ist aber nicht vollständig sortiert (d.h. Traversierung liefert nicht notwendigerweise vollständig sortierte Folge)
- Ist $|V| = n$, so hat G Höhe von $\Theta(\log n)$

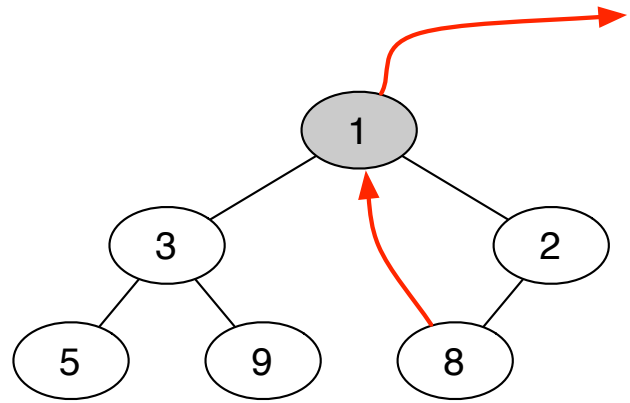
- typische Operation: extrahiere kleinsten (bzw. größten) Key (d.h. Wurzel), kurz: extractMin (bzw. extractMax)
  - anschließendes Problem: Heap-Eigenschaft wiederherstellen, als Operation: minHeapify (bzw. maxHeapify)

Heap: extractMin

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$.

- Operation extractMin:
  - entferne Wurzel w aus Heap G und liefere $key(w)$ zurück
  - tausche letzten Knoten von G an Stelle von Wurzel
  - stelle Heap-Eigenschaft wieder her mit minHeapify

Output: minimaler Key in G
extractMin(G):
    $min = key(w)$;
    w = letzter Knoten in G;
    minHeapify(G, w);
    return min;



Heap: minHeapify

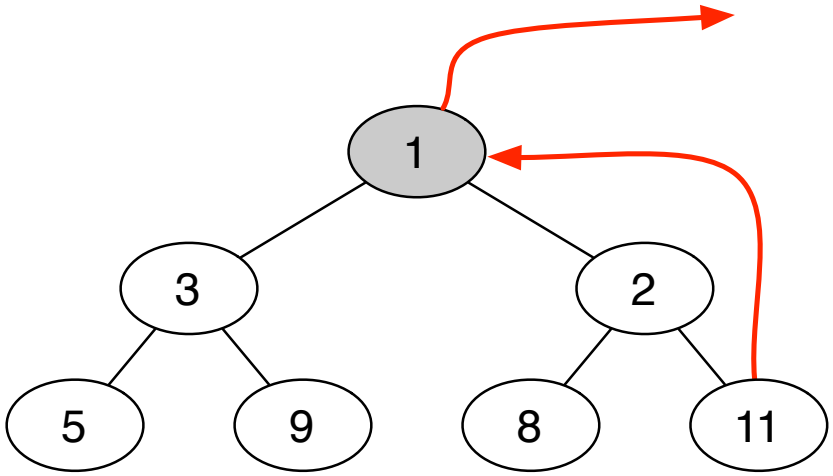
Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$ und $|V| = n$.

- Operation minHeapify auf Knoten $v \in V$ zur Wiederherstellung der Min-Heap-Eigenschaft
- Voraussetzung: nur Knoten v verletzt Min-Heap-Eigenschaft
- lasse v durch Heap absinken, bis Min-Heap-Eigenschaft wiederhergestellt

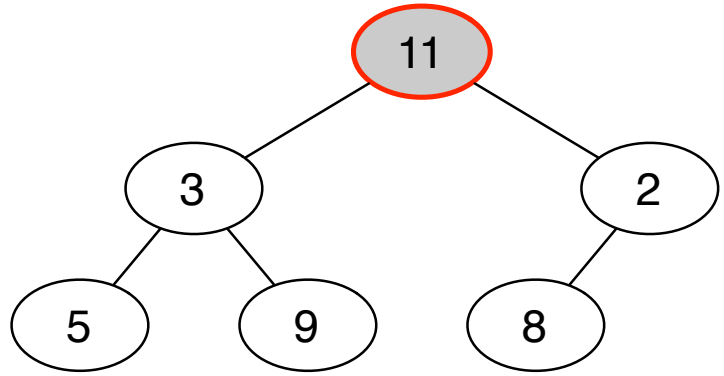
Input: Knoten v
minHeapify(G, v):
  if (v ist Blatt) **return**;
  knoten = Minimum von v.links und v.rechts;
  if ($key(knoten) < key(v)$) {
    tausche *knoten* und v;
    minHeapify$(G, knoten)$;
  }

- Komplexität: $O(\log n)$

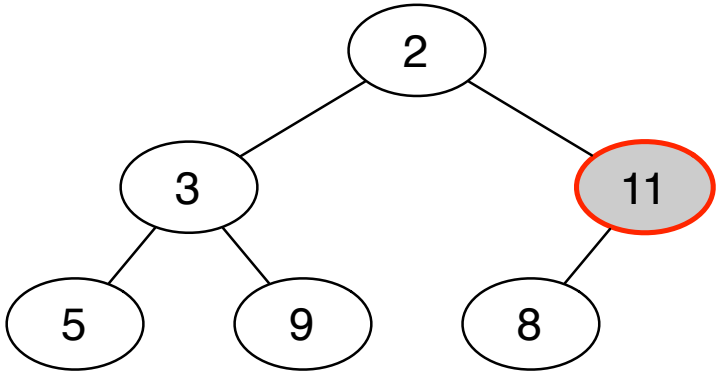
Beispiel extractMin / minHeapify



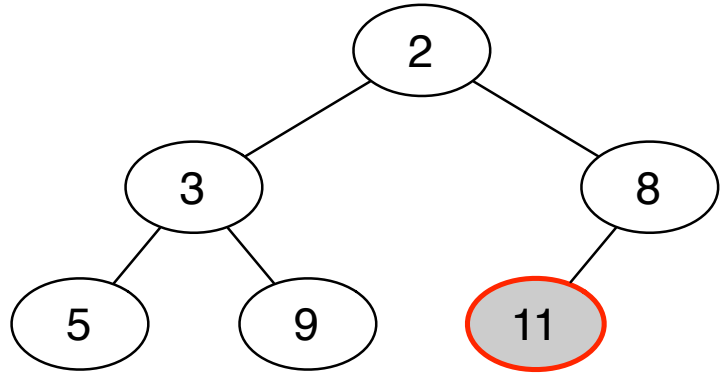
extractMin



minHeapify



minHeapify



minHeapify

Heap erzeugen: buildMinHeap

Gegeben sei Knoten-Liste V mit $|V| = n$ und Keys $key(v)$ für $v \in V$.

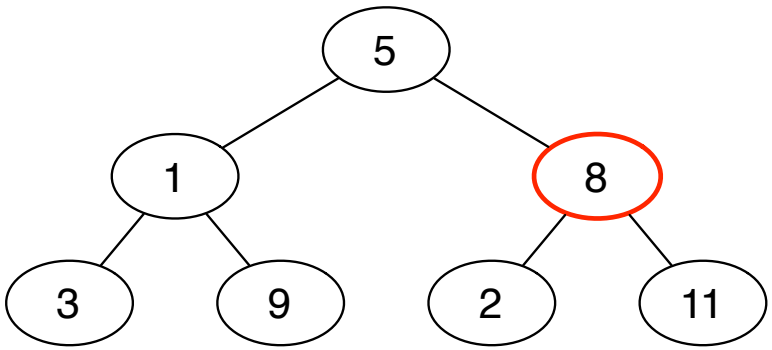
- wie erzeugt man aus V einen Min-Heap $G = (V, E)$?
  - erzeuge irgendwie fast vollständigen Binärbaum aus V
  - wende minHeapify auf alle Knoten $v \in V$ an
    (nicht nötig für unterste Ebene des Baumes!)

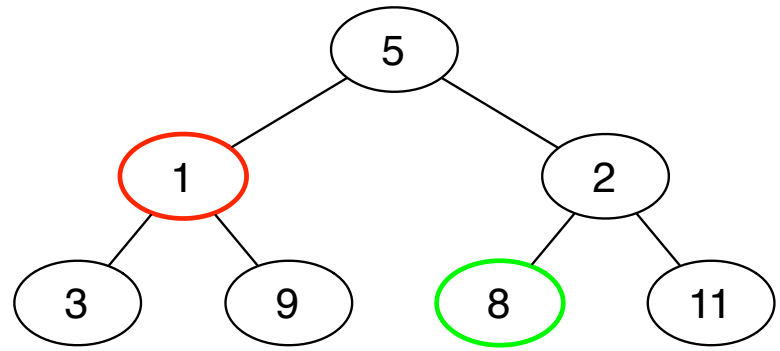
Input: Knoten-Liste V
Output: Min-Heap G
buildMinHeap(V):

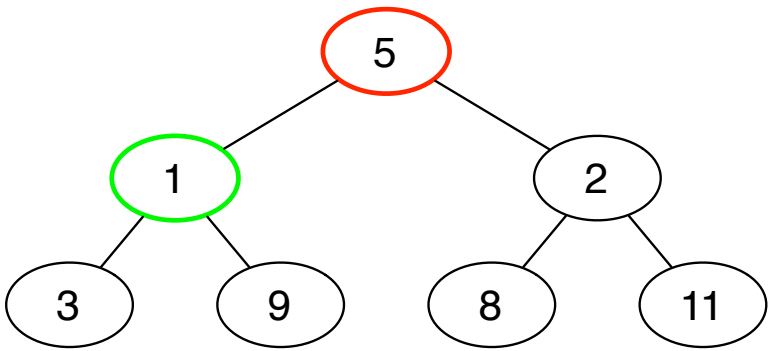
```
G = erzeuge beliebigen fast vollständigen Binärbaum aus V;
for each Knoten v in G ausser unterster Ebene {
  minHeapify(G, v);
}
```

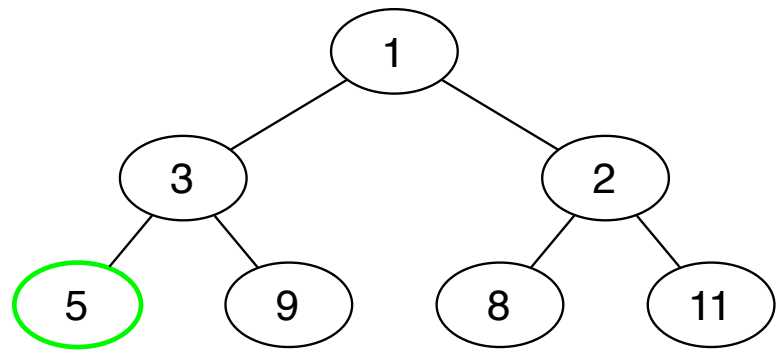
- Komplexität: $O(n)$ (nicht nur $O(n \log n)$!)

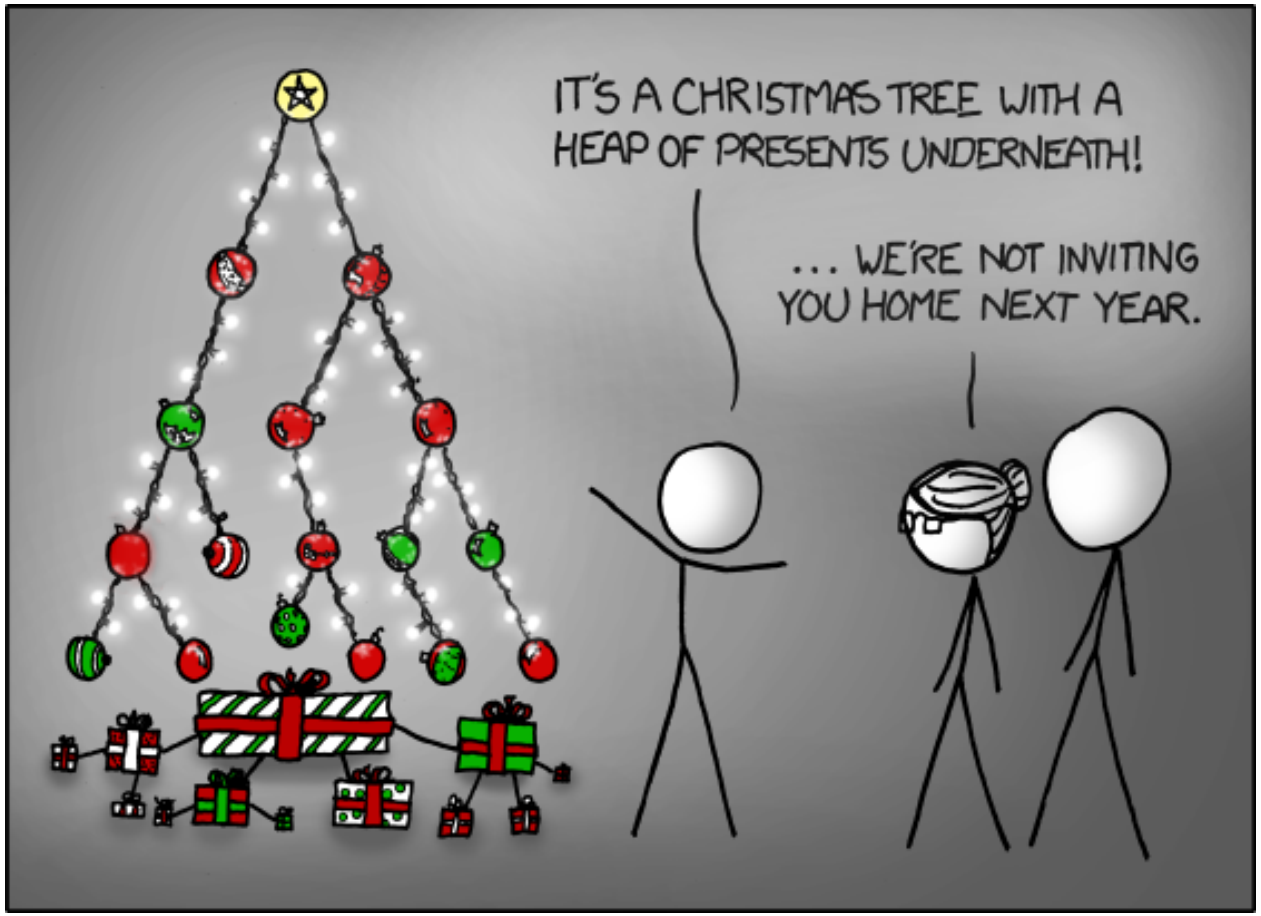
Beispiel buildMinHeap











http://xkcd.com/835/

Zusammenfassung

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen
   - Graphen
   - Bäume
   - Heaps