Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Wiederholung letzte Vorlesung

HeapSort

- Sortieren mit Heap
- Idee:
  - Heap erstellen mit **buildMinHeap**
  - wiederhole **extractMin** bis Heap leer
- mit Heap direkt im Eingabefeld:

```
Input: Feld A[1..n] der Länge n
HeapSort(A):
    buildMinHeap(A);
    for i=n downto 2 {
        tausche A[1] mit A[i];
        A.length = A.length - 1;
        minHeapify(A, 1);
    }
```

- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

Wiederholung letzte Vorlesung

HeapSort

- Sortie
- Idee:
  - H
  - v
- mit H

Input
Heap
bu
fo

```
    minHeapify(A, 1);
}
```

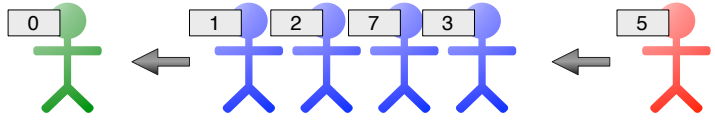
- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

Definition Priority Queue

Definition Priority Queue

Eine Priority Queue ist ein abstrakter Datentyp. Sie beschreibt einen Queue-artigen Datentyp für eine Menge von Elementen mit zugeordnetem Schlüssel und unterstützt die Operationen

- Einfügen von Elemente mit Schlüssel in die Queue,
- Entfernen von Element mit minimalem Schlüssel aus der Queue,
- Ansehen des Elementes mit minimalem Schlüssel in der Queue.



- entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Elememt mit maximalem Schlüssel

Wiederholung letzte Vorlesung

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- einfachster Such-Algorithmus: Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch genannt: Lineare Suche
- Algorithmus:

  Input: Array A[1..n] mit Schlüsseln, k gesuchter Schlüssel
  Output: Index i mit A[i] = k (sonst 0)
  linearSearch(A, k):

```
i = 1;
while ( (A[i] != k) && (i ≤ n) ) {
  i = i + 1;
}
if (i ≤ n) return i; // fündig geworden
else return 0; // nichts gefunden
```

- auch anwendbar für verkettete Listen

23

- entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Elememt mit maximalem Schlüssel

11

Definition F

Definition

Eine Priori
einen Que
zugeordnet

- Einfüg
- Entfe
  Queu
- Ansel

HeapSort

- Sortie
- Idee:
  - H
  - v
- mit H

Input
Heap
bu
fo

minHeapify(A, 1);
}

- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

6

Wiederholung letzte Vorlesung

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- einfachster Such-Algorithmus: Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch
- Algor

Input
Outp
linear
i =
wh

}
if
els

- auch

- entsprechend gibt es a Entfernen/Ansehen vc

Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array A[1..n] sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
Output: Index i mit A[i] = k (sonst 0)
binarySearchIterative(A, k):

```
low = 1;
high = n;
while (low <= high) {
  middle = ⌊ (low + high) / 2⌋;
  if (A[middle] == k) return middle; // fündig geworden
  if (A[middle] > k)
    high = middle - 1;
  else
    low = middle + 1;
}
return 0; // nichts gefunden
```


Definition F

Definition

Eine Priori
einen Que
zugeordnet

- Einfüg
- Entfe
  Queu
- Ansel

HeapSort

- Sortie
- Idee:
  - H
  - v
- mit H

Input
Heap
bu
fo

minHeapify(A, 1);
}

- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

Wiederholung letzte Vorlesung

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- einfachster Such-Algorithmus: Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch
- Algor

Input
Outp
linear
i =
wh

}
if
els

- auch

- entsprechend gibt es a
  Entfernen/Ansehen vc

Definition F

Definition

Eine Priori
einen Que
zugeordnet

- Einfüg
- Entfe
  Queu
- Ansel

Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array A[1..n] sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
Outp
binar
lo
hi
w

}
re

HeapSort

- Sortie
- Idee:
  - H
  - v
- mit H

Input
Heap
bu
fo

minHeapify(A, 1);
}

- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

Binärer Suchbaum

Definition binärer Suchbaum

Sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch $\leq, \geq$ geordnet.
G heißt binärer Suchbaum, falls für alle inneren Knoten $v \in V$ gilt

- für alle Knoten x im linken Teilbaum $v.left$ gilt

$$key(x) \leq key(v)$$

- für alle Knoten y im rechten Teilbaum $v.right$ gilt

$$key(y) \geq key(v)$$

Wiederholung letzte Vorlesung

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- einfachster Such-Algorithmus: Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch
- Algor

Input
Outp
linear
i =
wh
}
if
els

- auch

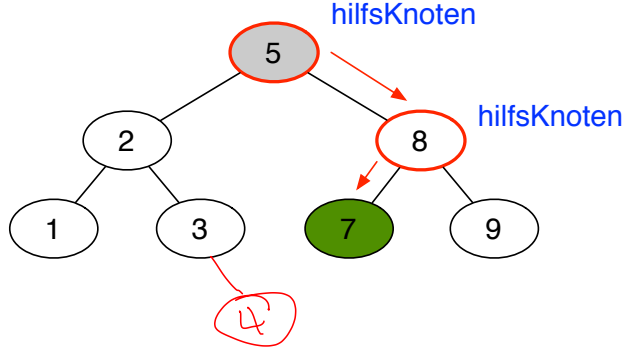
Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array A[1..n] sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
Outp
binar
lo

Binärer Suchbaum

Binärer Suchbaum: Einfügen

- Einfügen von Knoten mit Schlüssel 7:



- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Definition F

Definition

Eine Priori
einen Que
zugeordnet

- Einfüg
- Entfe
  Queu
- Ansel

- entsprechend gibt es a
  Entfernen/Ansehen vc

HeapSort

- Sortie
- Idee:
  - H
  - v
- mit H

Input
Heap
bu
fo

minHeapify(A, 1);
}

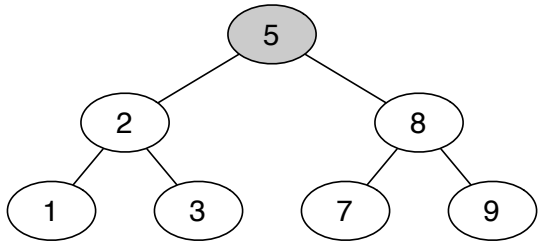
- min-Heap sortiert in absteigender Reih
- max-Heap sortiert in aufsteigender Rei

Programm heute

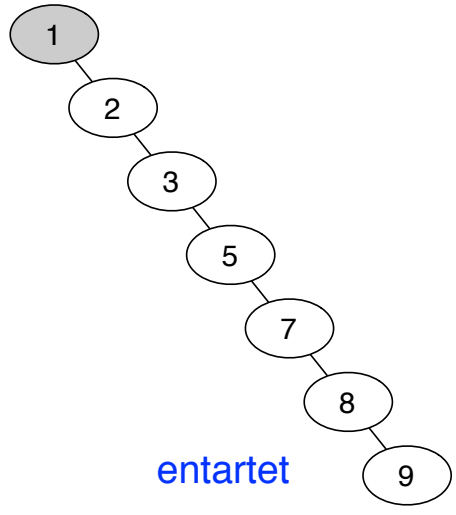
7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen
- Lineare Suche
- Binäre Suche
- Binäre Suchbäume
- Balancierte Suchbäume
- Suchen in Zeichenketten

Entartete Suchbäume



ausgeglichen

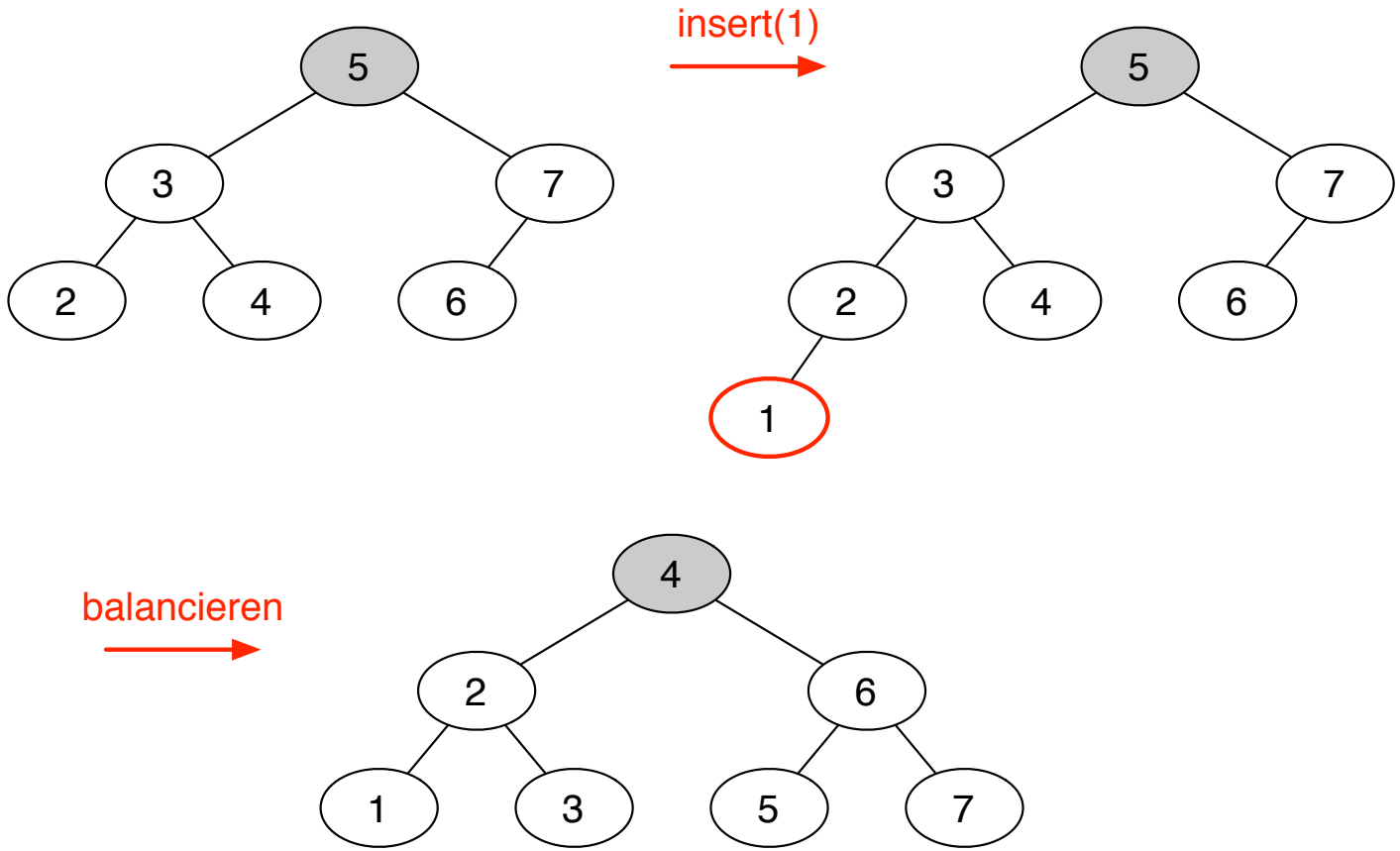


entartet

- Wie können Suchbäume entarten?
  - Beispiel: einfügen aus sortierter Liste
- Erwünscht: Suchbäume, die immer ausgeglichen (balanciert) bleiben

  $\rightarrow$ AVL-Bäume, Rot-Schwarz-Bäume, B-Bäume etc.

Beispiel: Balancieren von Suchbaum



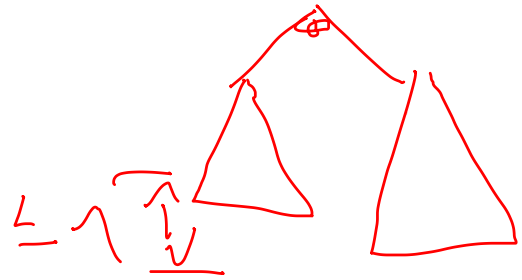
- hier müssen zum Balancieren alle Knoten bewegt werden → Effizienz-Problem

Ansätze für balanciert Suchbäume

- Binärbaum und gleichzeitig balanciert ist ineffizient
- Idee: Aufweichen eines der beiden Kriterien!

- Abschwächung des Kriteriums balanciert
  - Beispiel: AVL-Bäume
- Abschwächung des Kriteriums Binärbaum
  - Mehrweg-Bäume, Beispiel: B-Bäume
  - mehrere Verzweigungen kodiert als Binärbaum, Beispiel: Rot-Schwarz-Bäume

Definition AVL-Baum



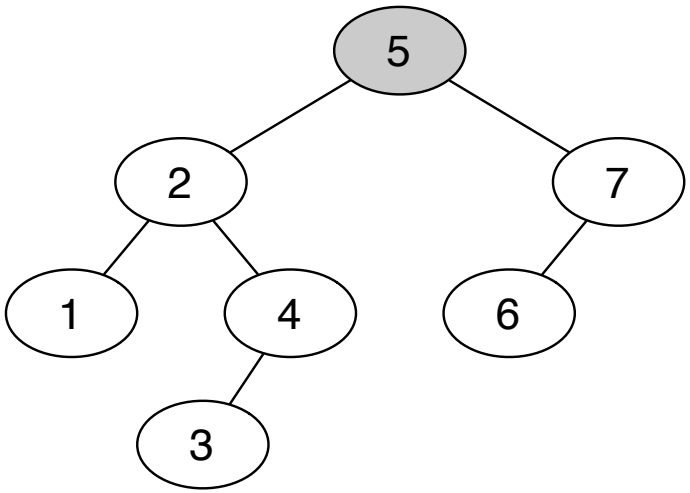
Definition AVL-Baum

Ein ~~Binärbaum~~ $G = (V, E)$ mit Wurzel $w \in V$ heißt AVL-Baum, falls er die AVL-Bedingung erfüllt:

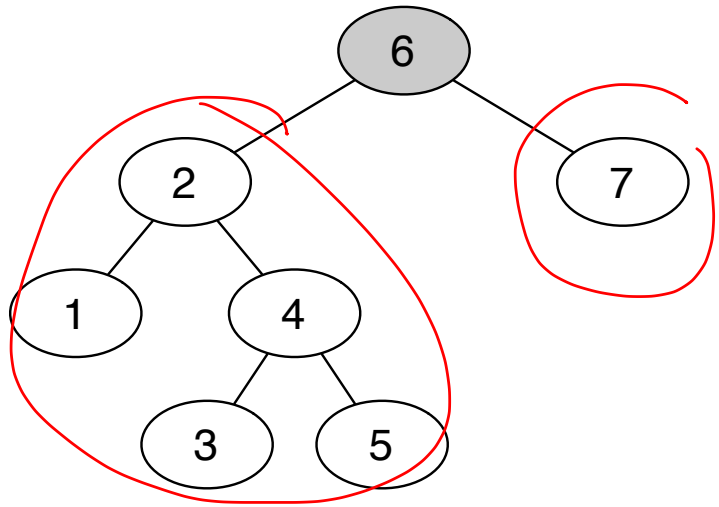
- für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt: Höhe von linkem und rechtem Teilbaum von v unterscheidet sich maximal um 1.

- benannt nach G.M. Adelson-Velskii und E.M. Landis (russische Mathematiker)
- AVL-Bedingung nur für Wurzel w ist nicht ausreichend
  - beide Teilbäume der Wurzel können entartet sein

AVL-Baum: Beispiel



AVL-Baum



kein AVL-Baum!

- linkes Beispiel: AVL-Bedingung überall erfüllt
- rechtes Beispiel: AVL-Bedingung in Wurzel verletzt

AVL Baum: Operationen

- Operationen search, minimum, maximum unverändert von binärem Suchbaum
- Operationen insert, erase müssen verändert werden, damit die AVL-Bedingung erhalten wird

AVL-Baum: Einfügen

Einfüge-Operation bei AVL-Baum:

- insert wie in binärem Suchbaum
- nun kann AVL-Bedingung verletzt sein:
  - *balance* = height(*left*) - height(*right*)
  - AVL-Bedingung: $balance \in \{-1, 0, +1\}$
  - nach insert: $balance \in \{-2, -1, 0, 1, +2\}$
- reparieren der AVL-Bedingung mittels Rotation und Doppelrotation

Einfügen / Verletzung AVL-Bedingung

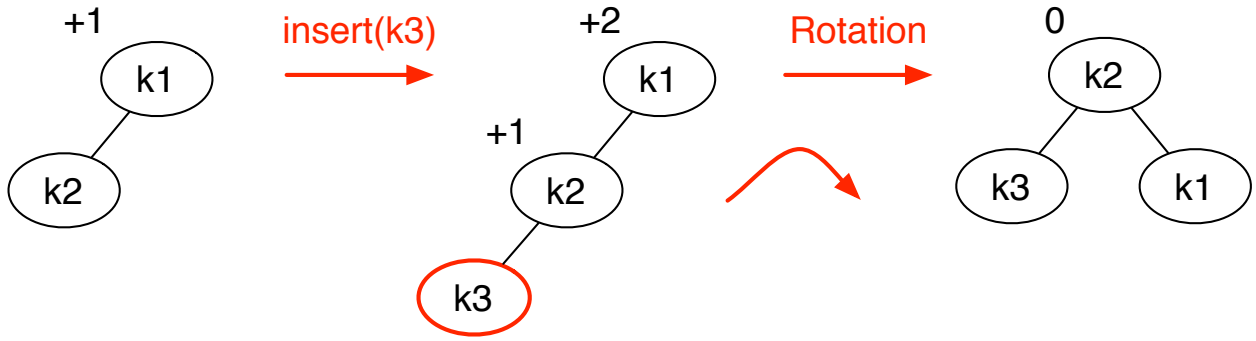
Fallunterscheidung Verletzung AVL-Bedingung bei Einfügen:

1. Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes
2. Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes
3. Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes
4. Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes

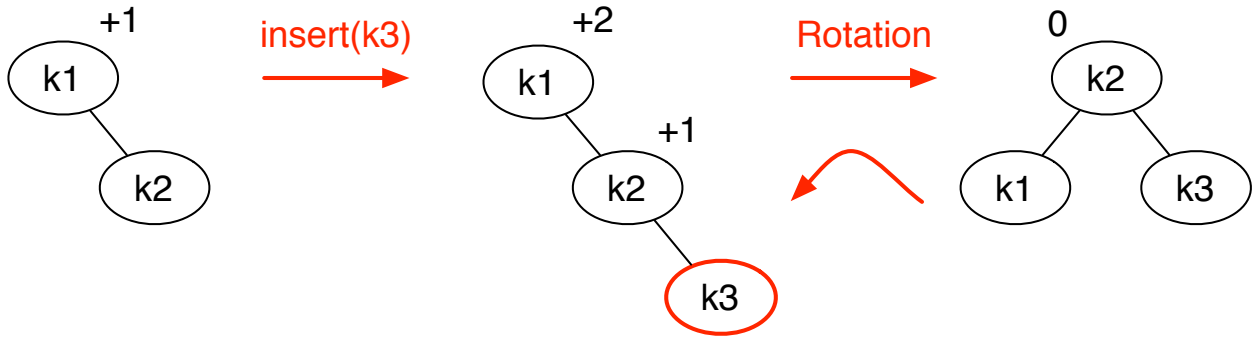
1 und 4 sind symmetrische Fälle, sowie 2 und 3

AVL-Baum: Rotation

1. Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes:

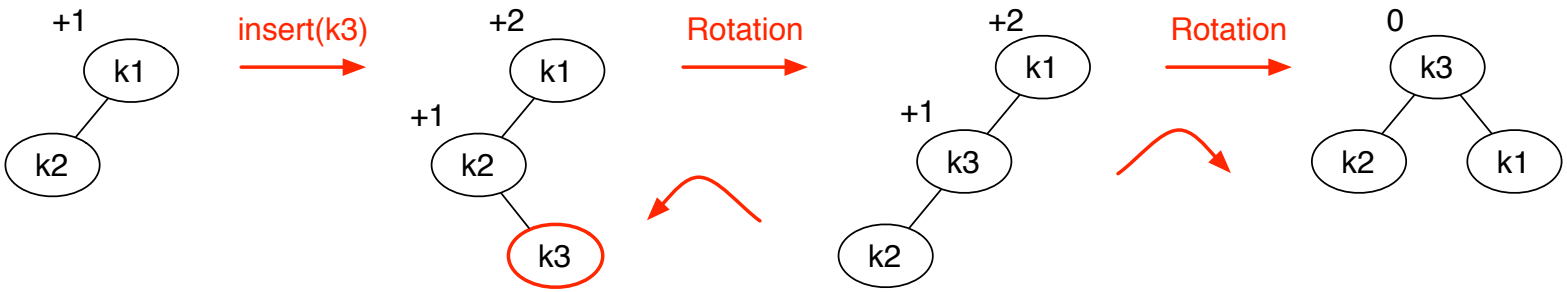


4. Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes:

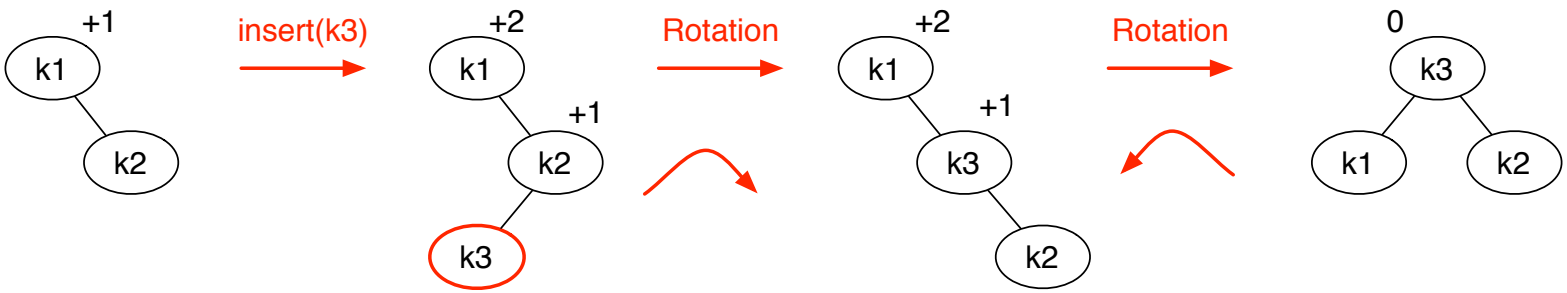


AVL-Baum: Doppelrotation

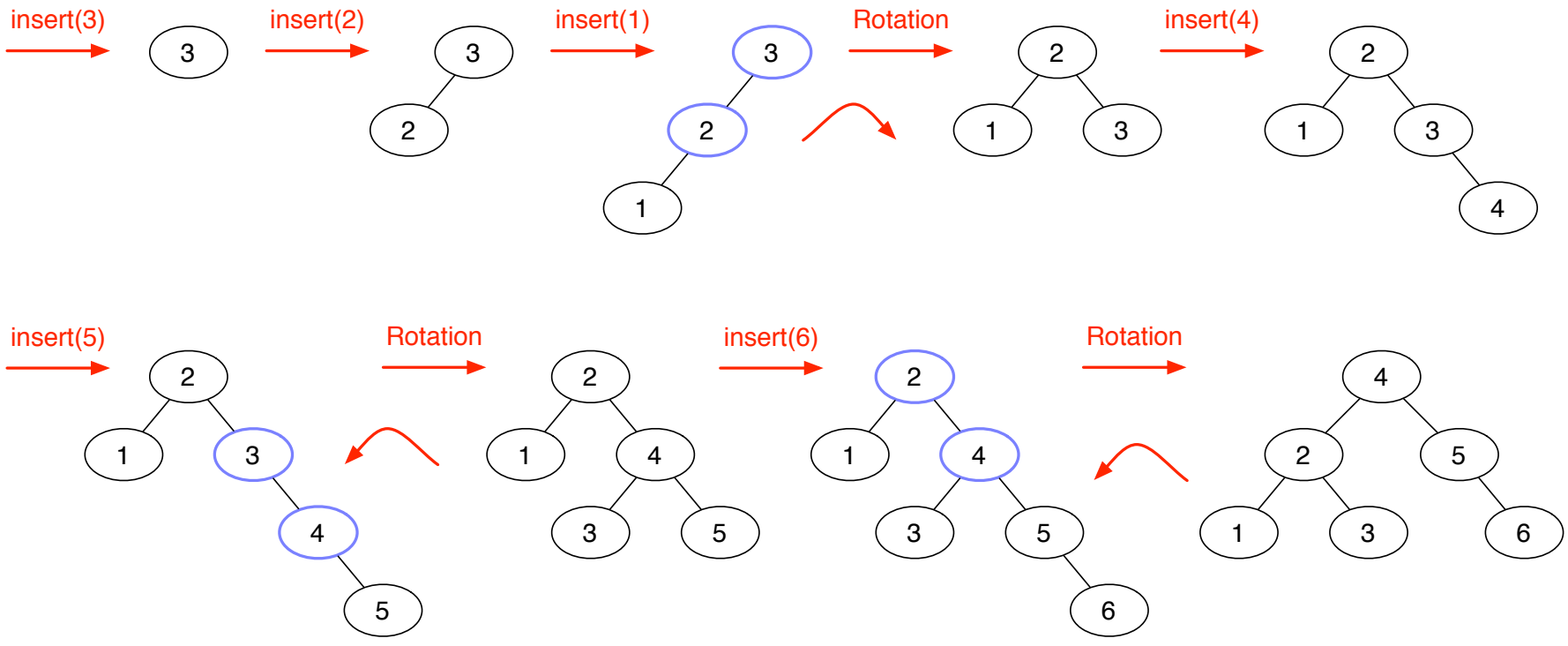
2. Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes:



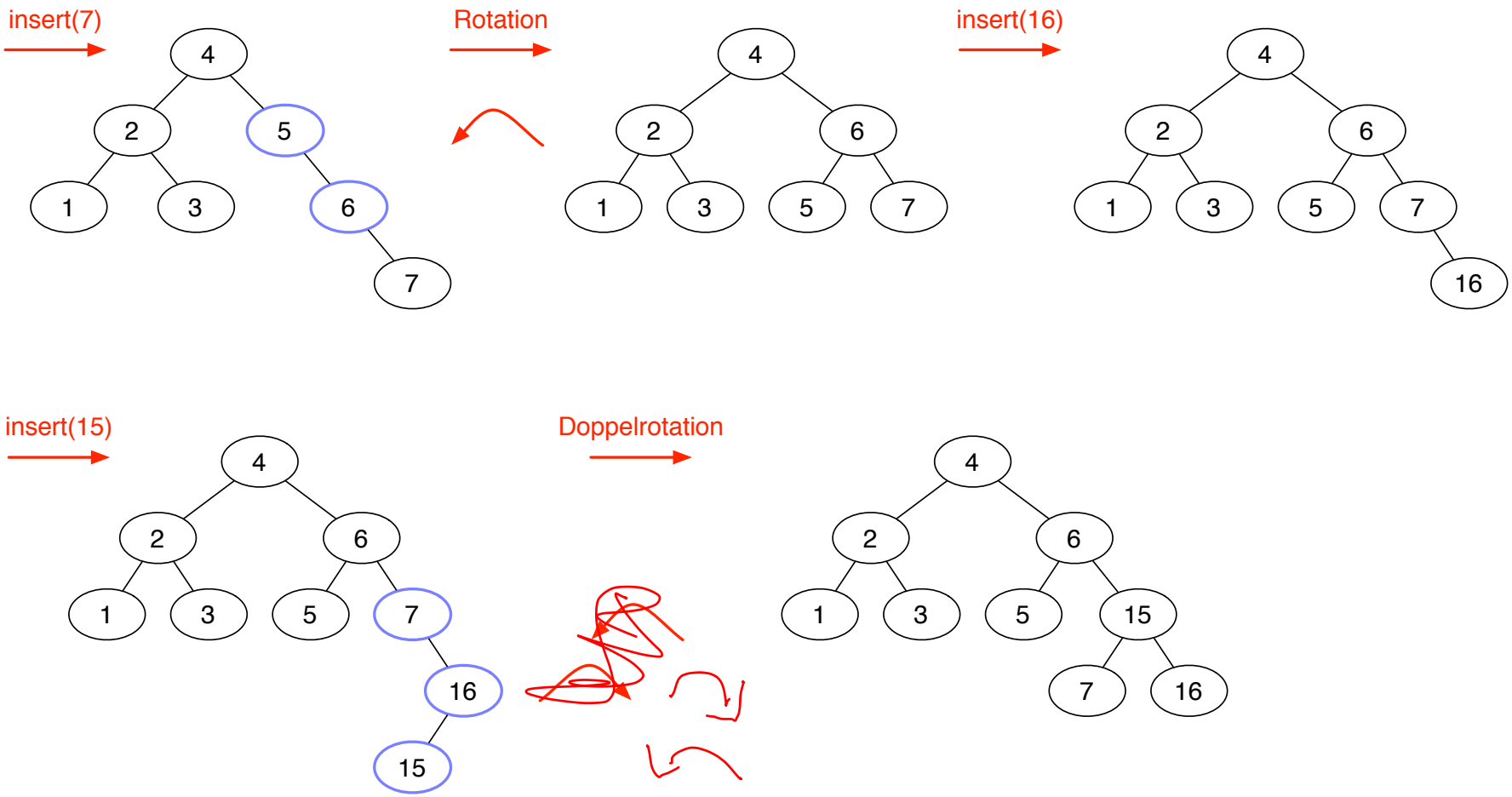
3. Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes:



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz I



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz II



AVL-Baum: Löschen

Löschen-Operation bei AVL-Baum:

- erase wie in binärem Suchbaum $O(\log n)$
- Verletzung der AVL-Bedingung in Teilbäumen durch Rotationen reparieren
- bei jedem Eltern-Knoten wieder AVL-Bedingungen reparieren, bis hin zur Wurzel $\rightarrow O(\log n)$

Programm heute

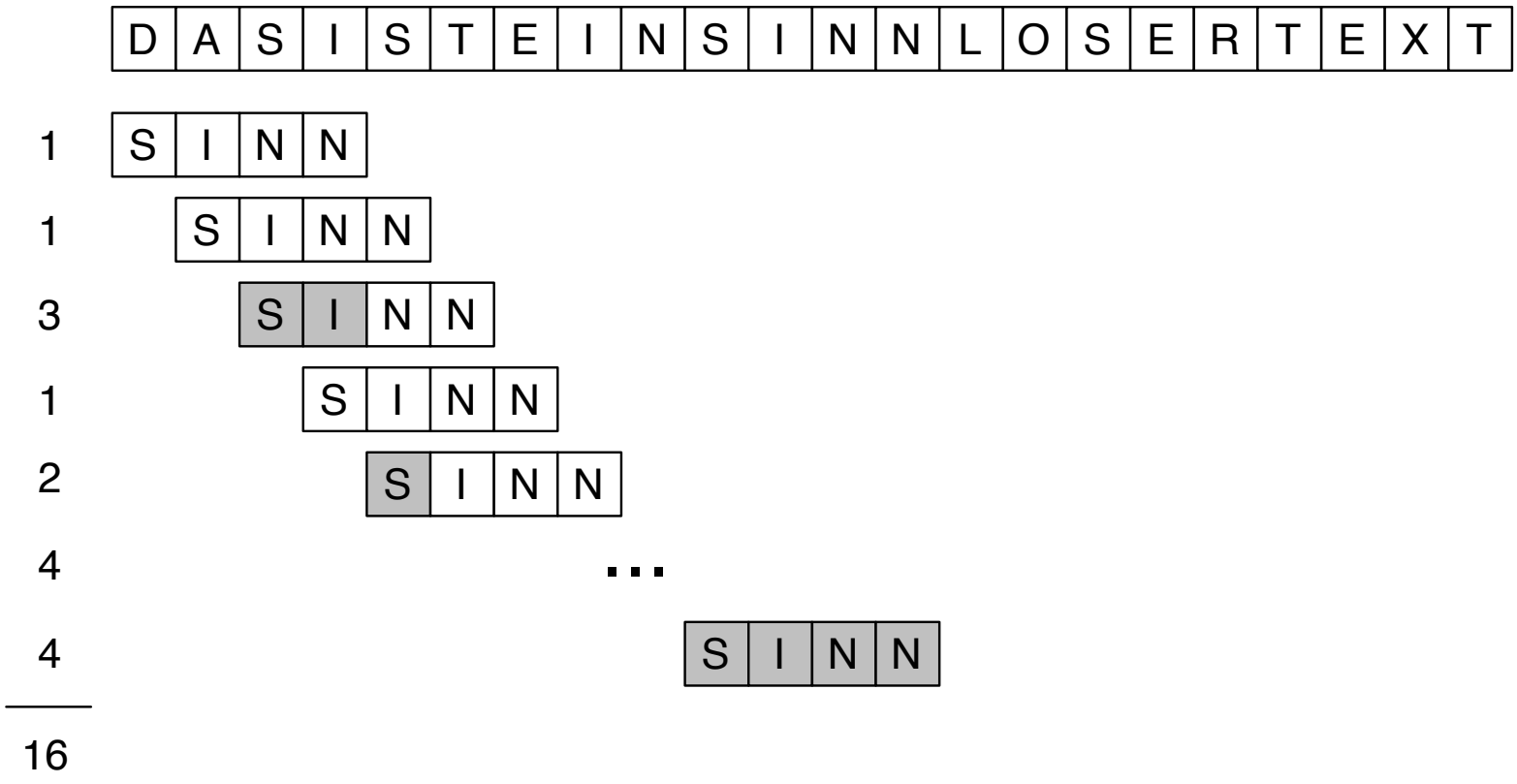
7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen
- Lineare Suche
- Binäre Suche
- Binäre Suchbäume
- Balancierte Suchbäume
- Suchen in Zeichenketten

Suchen in Zeichenketten

- Problem: find Teilwort in (langem) anderen Wort
- auch genannt: String-Matching
- Beispiele:
  - Suche Text in Textverarbeitung / Web-Browser
  - Suche Text in Dateien auf Festplatte (z.B. Spotlight, Windows Search)
  - Suche Text im Internet (z.B. Google)
- Maß der Effizienz: Anzahl der Vergleiche zwischen Buchstaben der Worte

Brute-Force Suche



Notationen

- Zu durchsuchender Text:
  - $text[0..n-1]$
  - Länge n
- gesuchtes Muster = Pattern:
  - $pat[0..m-1]$
  - Länge m

- Problem: finde Position i, so daß $pat == text[i..i+m-1]$

Brute-Force Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge n,
gesuchtes Muster *pat* Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
bruteForceSearch(*text*, *pat*):

```
for i = 0 to n − m {
    j = 0;
    while ( (j < m) && (pat[j] == text[i + j]) )
        j = j + 1;
    if (j ≥ m) return i; // fündig geworden
}
return -1; // nichts gefunden
```

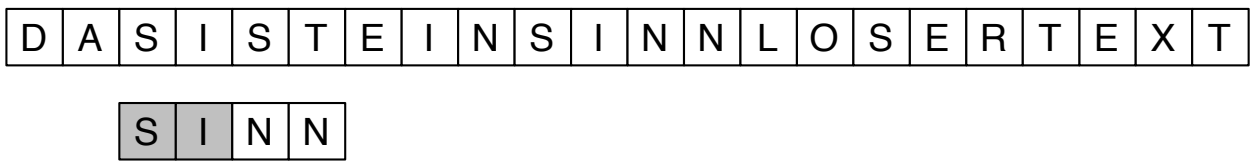
- Komplexität: $O((n-m)m) = O(nm)$

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus (kurz: KMP)

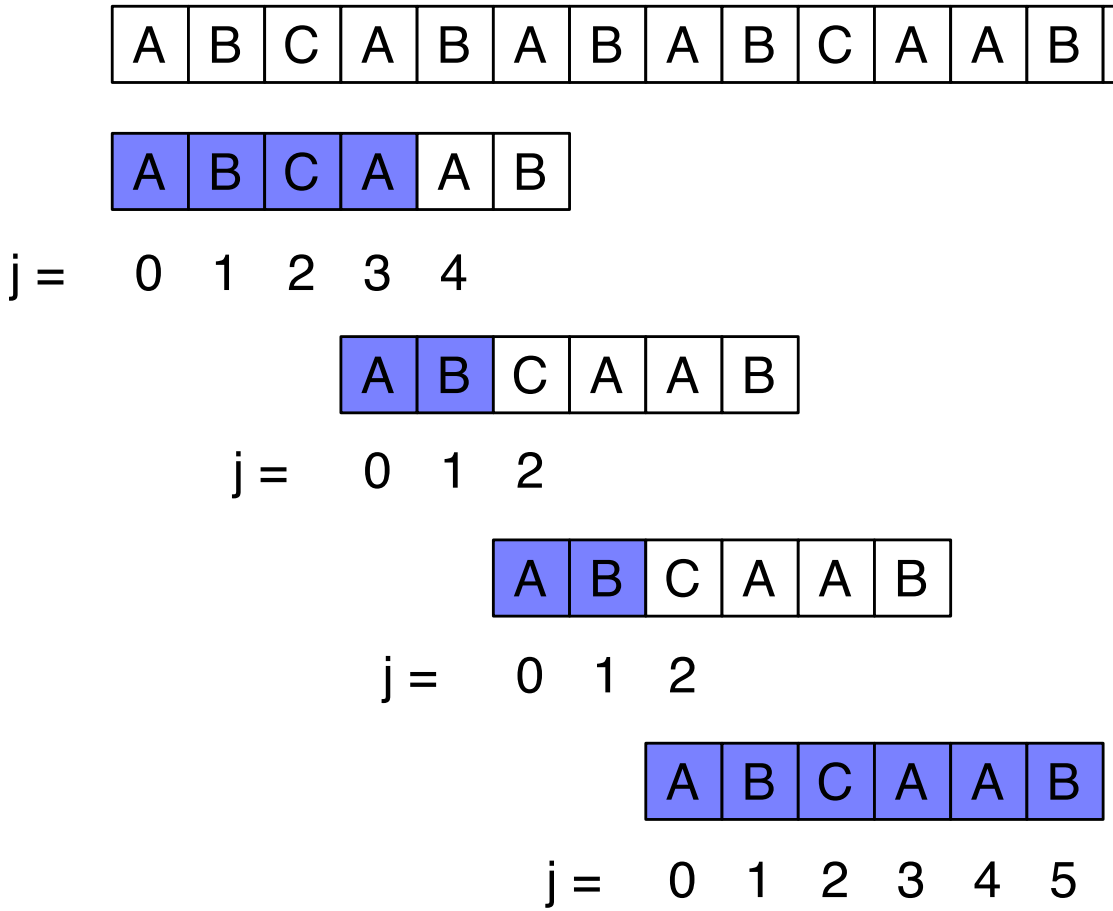
- Idee: verbessere Brute-Force Algorithmus durch Ausnutzung der bereits gelesenen Information bei einem Mismatch
- Mismatch an Stelle j von *pat* impliziert

$$pat[0..j-1] == text[i..i+j-1]$$



- Vorverarbeitungsschritt: analysiere vor Suche das Muster *pat*, speichere mögliche Überspringungen in Feld *next*

KMP Algorithmus: Beispiel



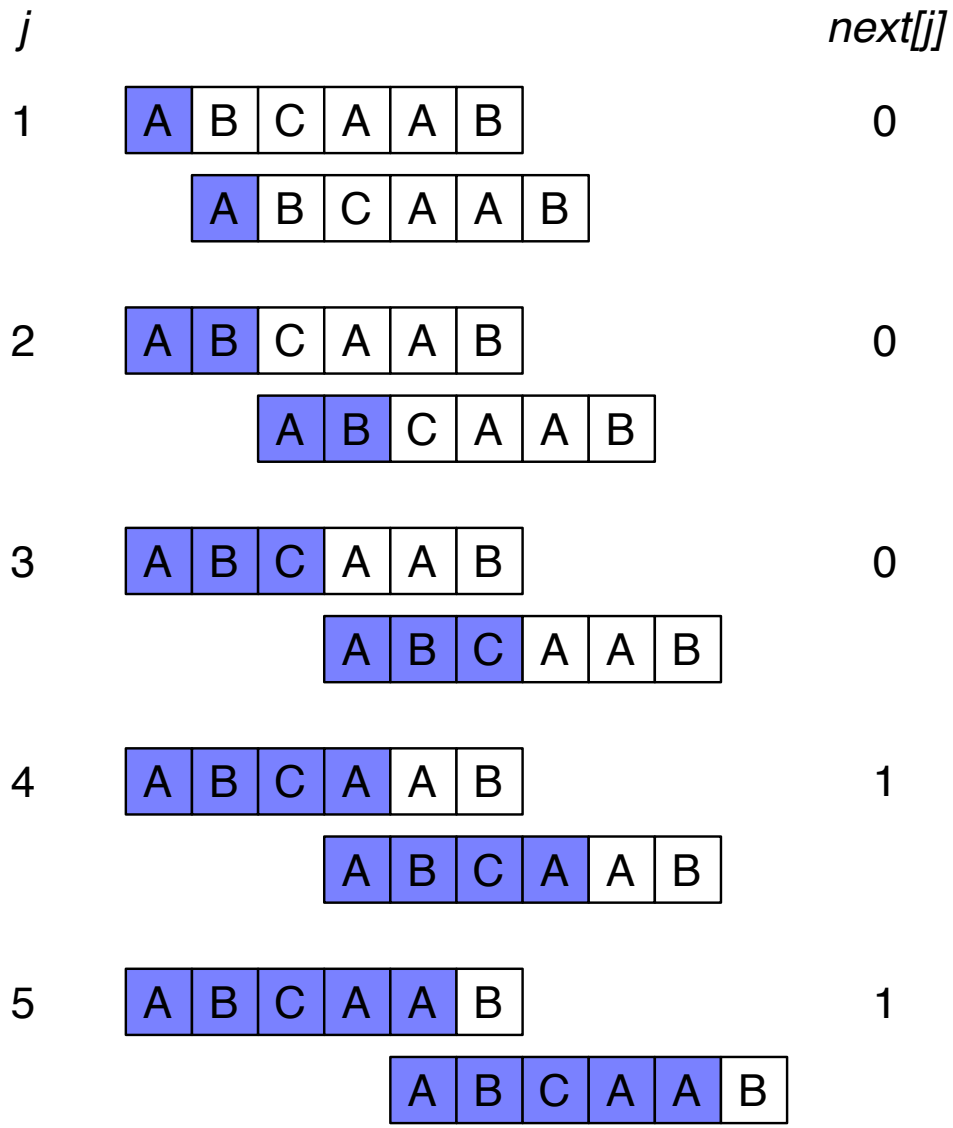
j	0	1	2	3	4	5
$next[j]$	-1	0	0	0	1	1

KMP Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge n,
gesuchtes Muster *pat* Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
KMPSearch(*text*, *pat*):

```
j = 0;
for i = 0 to n − 1 {
    while ( (j ≥ 0) && (pat[j] != text[i]) )
        j = next[j];
    j = j + 1;
    if (j == m)
        return i − m + 1; // fündig geworden
}
return -1; // war wohl nix
```

KMP Algorithmus: next Tabelle I



KMP Algorithmus: next Tabelle II

Input: Muster pat Länge m

initNext(pat):

```
next[0] = −1; next[1] = 0;
pos = 2; cnd = 0;
while (pos < m) {
  if (pat[pos − 1] == pat[cnd]) {
    cnd = cnd + 1;
    next[pos] = cnd;
    pos = pos + 1;
  } else {
    if (cnd > 0) cnd = next[cnd];
    else {
      next[pos] = 0;
      pos = pos + 1;
    }
  }
}
```

KMP Algorithmus: Komplexität

Komplexität von KMP Algorithmus:

- KMPSearch: innere Schleife maximal $2n$ Durchläufe: $O(n)$
- initNext: innere Schleife maximal $2m$ Durchläufe: $O(m)$
- insgesamt: $O(n + m)$

- Platzbedarf: $O(m)$

Ausblick: Suchen in Zeichenketten

- Brute-Force Algorithmus
  - Komplexität: $O(mn)$
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
  - Komplexität: $O(m + n)$
- Rabin-Karp Algorithmus: Suchen mit Hash-Funktion
  - Komplexität im Mittel: $O(m + n)$
  - Komplexität worst-case: $O(mn)$
- Boyer-Moore Algorithmus: Suchen rückwärts
  - Komplexität: $O(n)$
  - Komplexität best-case: $O(n/m)$
- Reguläre Ausdrücke mit endlichen Automaten
- Suche nach ähnlichen Zeichenketten

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen
- Lineare Suche
- Binäre Suche
- Binäre Suchbäume
- Balancierte Suchbäume
- Suchen in Zeichenketten

Frohes Fest und guten Rutsch!