Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

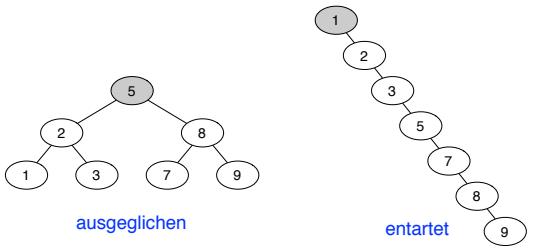
Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

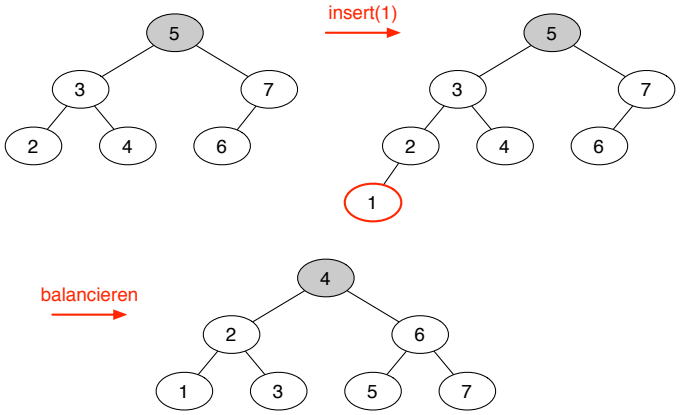
Programm heute

Entartete Suchbäume



- Wie können Suchbäume entarten?
  - Beispiel: einfügen aus sortierter Liste
- Erwünscht: Suchbäume, die immer ausgeglichen (balanciert) bleiben
  → AVL-Bäume, Rot-Schwarz-Bäume, B-Bäume etc.

Beispiel: Balancieren von Suchbaum



- hier müssen zum Balancieren alle Knoten bewegt werden → Effizienz-Problem

Ansätze für balanciert Suchbäume

- Binärbaum und gleichzeitig balanciert ist ineffizient
- Idee: Aufweichen eines der beiden Kriterien!

- Abschwächung des Kriteriums balanciert
  - Beispiel: AVL-Bäume
- Abschwächung des Kriteriums Binärbaum
  - Mehrweg-Bäume, Beispiel: B-Bäume
  - mehrere Verzweigungen kodiert als Binärbaum, Beispiel: Rot-Schwarz-Bäume

Definition AVL-Baum

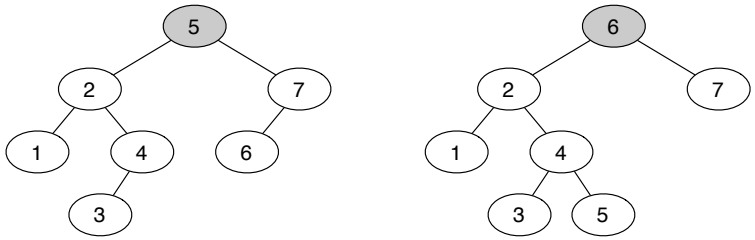
Definition AVL-Baum

Ein binärer Suchbaum $G = (V, E)$ mit Wurzel $w \in V$ heißt AVL-Baum, falls er die AVL-Bedingung erfüllt:

- für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt: Höhe von linkem und rechtem Teilbaum von v unterscheidet sich maximal um 1.

- benannt nach G.M. Adelson-Velskii und E.M. Landis (russische Mathematiker)
- AVL-Bedingung nur für Wurzel w ist nicht ausreichend
  - beide Teilbäume der Wurzel können entartet sein

AVL-Baum: Beispiel



- linkes Beispiel: AVL-Bedingung überall erfüllt
- rechtes Beispiel: AVL-Bedingung in Wurzel verletzt

AVL Baum: Operationen

- Operationen search, minimum, maximum unverändert von binärem Suchbaum
- Operationen insert, erase müssen verändert werden, damit die AVL-Bedingung erhalten wird

AVL-Baum: Einfügen

Einfüge-Operation bei AVL-Baum:

- insert wie in binärem Suchbaum
- nun kann AVL-Bedingung verletzt sein:
  - *balance* = height(*left*) - height(*right*)
  - AVL-Bedingung: $balance \in \{-1, 0, +1\}$
  - nach insert: $balance \in \{-2, -1, 0, 1, +2\}$
- reparieren der AVL-Bedingung mittels Rotation und Doppelrotation

Einfügen / Verletzung AVL-Bedingung

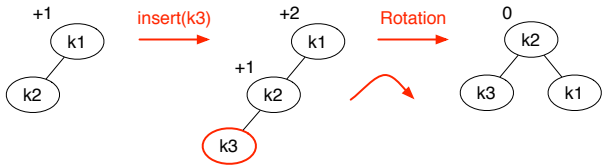
Fallunterscheidung Verletzung AVL-Bedingung bei Einfügen:

1. Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes
2. Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes
3. Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes
4. Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes

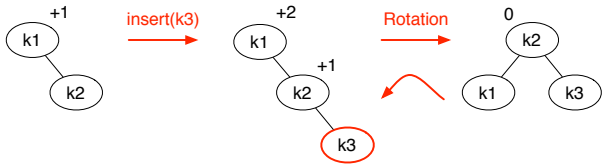
1 und 4 sind symmetrische Fälle, sowie 2 und 3

AVL-Baum: Rotation

1. Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes:

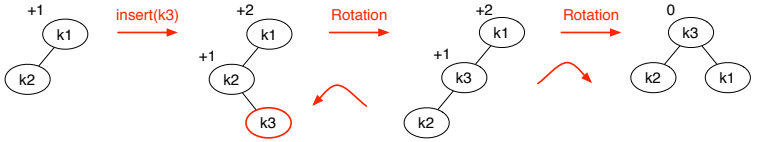


4. Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes:

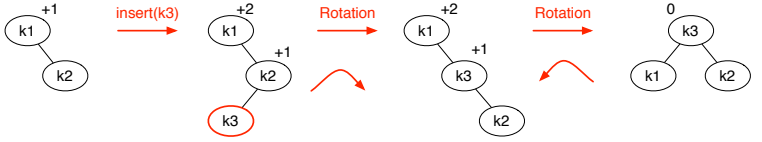


AVL-Baum: Doppelrotation

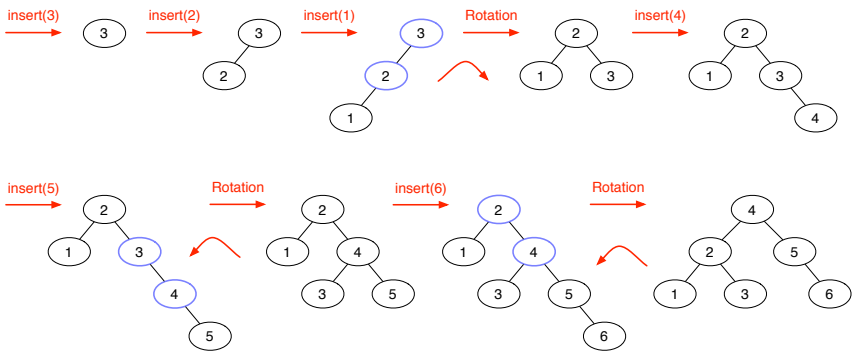
2. Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes:



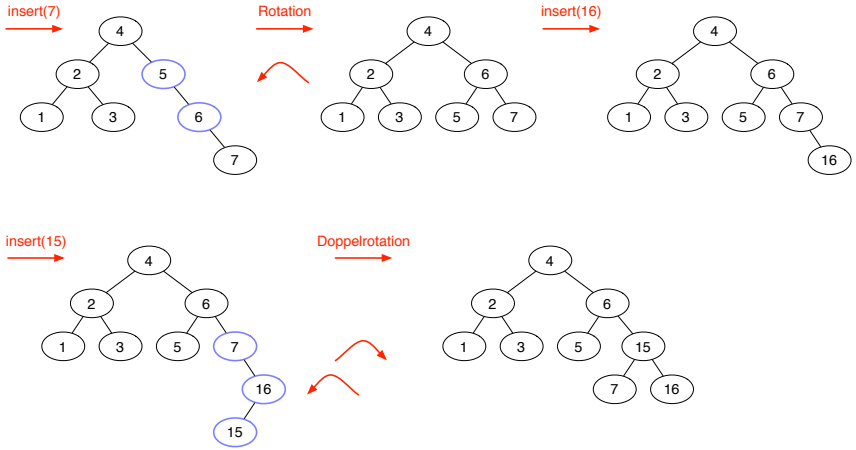
3. Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes:



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz I



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz II



AVL-Baum: Löschen

Löschen-Operation bei AVL-Baum:

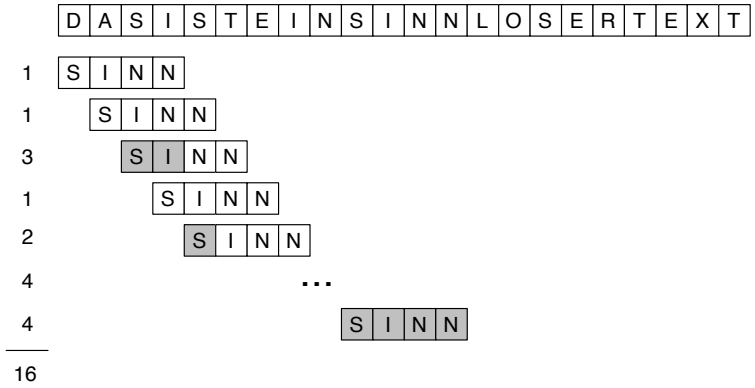
- erase wie in binärem Suchbaum
- Verletzung der AVL-Bedingung in Teilbäumen durch Rotationen reparieren
- bei jedem Eltern-Knoten wieder AVL-Bedingungen reparieren, bis hin zur Wurzel

Programm heute

Suchen in Zeichenketten

- Problem: find Teilwort in (langem) anderen Wort
- auch genannt: String-Matching
- Beispiele:
  - Suche Text in Textverarbeitung / Web-Browser
  - Suche Text in Dateien auf Festplatte (z.B. Spotlight, Windows Search)
  - Suche Text im Internet (z.B. Google)
- Maß der Effizienz: Anzahl der Vergleiche zwischen Buchstaben der Worte

Brute-Force Suche



Notationen

- Zu durchsuchender Text:
  - $text[0..n-1]$
  - Länge n
- gesuchtes Muster = Pattern:
  - $pat[0..m-1]$
  - Länge m
- Problem: finde Position i, so daß $pat == text[i..i+m-1]$

Brute-Force Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge n,
gesuchtes Muster *pat* Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
bruteForceSearch(*text*, *pat*):

```
for i = 0 to n − m {
  j = 0;
  while ( (j < m) && (pat[j] == text[i + j]) )
    j = j + 1;
  if (j ≥ m) return i; // fündig geworden
}
return -1; // nichts gefunden
```

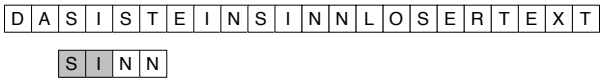
- Komplexität: $O((n-m)m) = O(nm)$

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus (kurz: KMP)

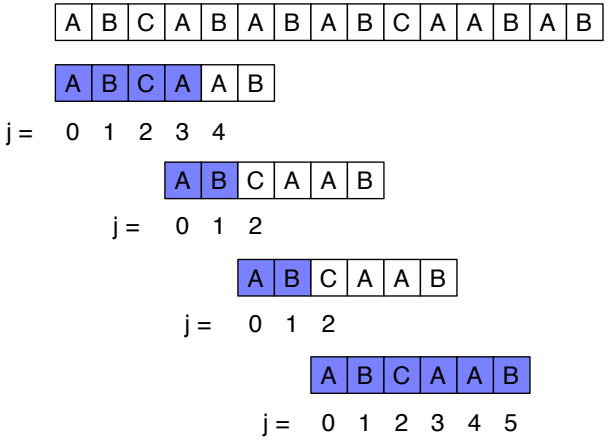
- Idee: verbessere Brute-Force Algorithmus durch Ausnutzung der bereits gelesenen Information bei einem Mismatch
- Mismatch an Stelle j von *pat* impliziert

$$pat[0..j-1] == text[i..i+j-1]$$



- Vorverarbeitungsschritt: analysiere vor Suche das Muster *pat*, speichere mögliche Überspringungen in Feld *next*

KMP Algorithmus: Beispiel



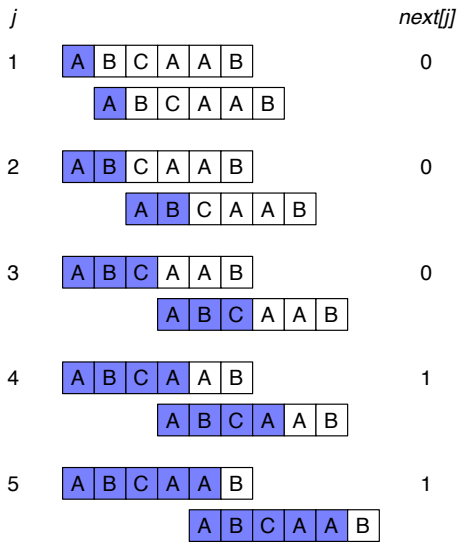
j	0	1	2	3	4	5
$next[j]$	-1	0	0	0	1	1

KMP Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge n,
gesuchtes Muster *pat* Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
KMPSearch(*text*, *pat*):

```
j = 0;
for i = 0 to n − 1 {
  while ( (j ≥ 0) && (pat[j] != text[i]) )
    j = next[j];
  j = j + 1;
  if (j == m)
    return i − m + 1; // fündig geworden
}
return -1; // war wohl nix
```


KMP Algorithmus: next Tabelle I



KMP Algorithmus: next Tabelle II

Input: Muster pat Länge m
initNext(pat):

```
next[0] = −1; next[1] = 0;
pos = 2; cnd = 0;
while (pos < m) {
  if (pat[pos − 1] == pat[cnd]) {
    cnd = cnd + 1;
    next[pos] = cnd;
    pos = pos + 1;
  } else {
    if (cnd > 0) cnd = next[cnd];
    else {
      next[pos] = 0;
      pos = pos + 1;
    }
  }
}
```


KMP Algorithmus: Komplexität

Komplexität von KMP Algorithmus:

- KMPSearch: innere Schleife maximal $2n$ Durchläufe: $O(n)$
- initNext: innere Schleife maximal m Durchläufe: $O(m)$
- insgesamt: $O(n + m)$

- Platzbedarf: $O(m)$

Ausblick: Suchen in Zeichenketten

- Brute-Force Algorithmus
  - Komplexität: $O(mn)$
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
  - Komplexität: $O(m + n)$
- Rabin-Karp Algorithmus: Suchen mit Hash-Funktion
  - Komplexität im Mittel: $O(m + n)$
  - Komplexität worst-case: $O(mn)$
- Boyer-Moore Algorithmus: Suchen rückwärts
  - Komplexität: $O(n)$
  - Komplexität best-case: $O(n/m)$
- Reguläre Ausdrücke mit endlichen Automaten
- Suche nach ähnlichen Zeichenketten

Zusammenfassung