

# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Wintersemester 2012/13

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures  
Technische Universität München



## Programm heute

- 7 Fortgeschrittene Datenstrukturen
- 8 Such-Algorithmen
- 9 Graph-Algorithmen
- 10 Numerische Algorithmen**
  - Matrizen
  - Lineare Gleichungen
  - Least squares Probleme
  - Fast Fourier Transformation

## Fourier Transformation

- Signale  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind im **Zeitbereich**
  - jedem Zeitpunkt wird ein Wert (z.B. Amplitude) zugeordnet
  - Beispiele: Audio, Video, Bilder
- **Fourier-Transformation** führt Signal in **Frequenzbereich** über
  - betrachte Signal als Überlagerung von Sinuskurven
- **Anwendungen:**
  - Filterung von bestimmten Frequenzen
  - Datenkompression, z.B.
    - Audio: MP3
    - Video: MPEG
    - Bilder: JPEG
  - Bild- und Signalverarbeitung
- überaus nützlich, und effizient dank **FFT** (Fast Fourier Transformation)

## Polynome

### Polynome

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Funktion  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$A(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

heißt **Polynom** in  $x$  vom **Grad**  $n - 1$ . Hierbei heißen die  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , **Koeffizienten** von  $A$ ,  $a_{n-1} \neq 0$ .

- $A$  hat **Gradschranke**  $n$ , falls der Grad von  $A$  zwischen 0 und  $n - 1$  liegt.
- **Summen-Notation** für  $A$ :

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

- Die **Koeffizientendarstellung** von  $A$  ist der Vektor

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$$

## Operationen auf Polynomen

Seien  $A, B$  Polynome.

- **Auswertung von Polynom:** berechne für  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A(x_0)$$

- **Summe von Polynomen:** berechne Polynom  $C$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$C(x) = A(x) + B(x)$$

- **Multiplikation von Polynomen:** berechne Polynom  $C$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$C(x) = A(x)B(x)$$

7

## Addition von Polynomen

Seien  $A, B$  Polynome mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ .

- Koeffizientendarstellungen  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- **Summe**  $A(x) + B(x)$  ist Polynom  $C$  mit Gradschranke  $n$ ,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$$

mit  $c_j = a_j + b_j$  für  $j = 0, \dots, n-1$ .

- Aufwand:  $\Theta(n)$
- **Beispiel:**  $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$ ,  $B(x) = 4x - 2$ , dann ist

$$C(x) = 5x^2 + x + 2$$

9

## Auswertung von Polynomen

Sei  $A$  Polynom mit Koeffizientendarstellung  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

- **Auswertung** von  $A$  an  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit **Horner-Schema:**

$$A(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \dots + x_0(a_{n-2} + x_0(a_{n-1}))) \dots)$$

- Aufwand:  $\Theta(n)$
- **Beispiel:**  $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$  an Stelle  $x_0 = 2$ :

$$A(x_0) = 4 + x_0(-3 + x_0(5)) = 4 + 2(-3 + 2(5)) = 18$$

8

## Multiplikation von Polynomen

Seien  $A, B$  Polynome mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ .

- Koeffizientendarstellungen  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- **Produkt**  $A(x)B(x)$  ist Polynom  $C$  mit Gradschranke  $2n-1$ ,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{2n-2} c_j x^j$$

mit

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} \quad \text{für } j = 0, \dots, 2n-2$$

- Aufwand:  $\Theta(n^2)$
- **Beispiel:**  $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$ ,  $B(x) = 4x - 2$ , dann sind

$$c_0 = -8, \quad c_1 = 22, \quad c_2 = -22, \quad c_3 = 20, \quad c_4 = 0$$

10

## Faltung

Seien  $A, B$  Polynome mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ .

- Koeffizientendarstellung  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- Sei  $c = (c_0, \dots, c_{2n-2})$  die Koeffizientendarstellung des  
Produktpolynoms  $C(x) = A(x)B(x)$  mit

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}$$

- $c$  wird auch **Faltung** der Vektoren  $a, b$  genannt,

$$c = a * b$$

- Faltung ist sehr häufige Operation auf Signalen (z.B.  
Anwendung von Filtern)

11

## Auswertung

Sei  $A$  Polynom mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$  mit Koeffizienten  
 $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

- **Konversion** von Koeffizientendarstellung in  
Stützstellendarstellung erfolgt mittels **Auswertung**:
  - wähle Stützstellen  $x_0, \dots, x_{n-1}$
  - werte  $A(x_k)$  aus für  $k = 0, \dots, n-1$
- Auswertung von  $n$  Stützstellen mit Horner-Schema:  $\Theta(n^2)$
- später: Auswertung mittels FFT:  $\Theta(n \log n)$

13

## Stützstellendarstellung

### Stützstellendarstellung von Polynom

Sei  $A$  Polynom mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ . Die  
**Stützstellendarstellung** von  $A$  ist eine Menge von  $n$   
Stützstellenpaaren

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

mit  $x_k$  paarweise verschieden für  $k = 0, \dots, n-1$  sowie

$$y_k = A(x_k).$$

- Die Stützstellendarstellung ist nicht eindeutig
  - jede Menge von verschiedenen Punkten  $x_0, \dots, x_{n-1}$  kann  
verwendet werden

12

## Interpolation

### Eindeutigkeit interpolierendes Polynom

Für jede Menge von  $n$  Stützstellenpaaren

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

mit paarweise verschiedenen  $x_k$  existiert ein **eindeutiges Polynom**  
 $A(x)$  mit Gradschranke  $n$ , so daß gilt

$$y_k = A(x_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1.$$

- **Konversion** von Stützstellendarstellung in  
Koeffizientendarstellung heißt **Interpolation**.

14

## Interpolation: Beweisidee

- Ähnlich zu Least squares Problemen kann Matrix-Gleichung aufgestellt werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{=:V(x_0, \dots, x_{n-1})} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:a} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:y}$$

- $V(x_0, \dots, x_{n-1})$  heißt **Vandermonde-Matrix**
- da  $x_k$  paarweise verschieden ist

$$\det V(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq j < k \leq n-1} (x_k - x_j) \neq 0$$

- also ist  $V(x_0, \dots, x_{n-1})$  invertierbar und

$$a = V(x_0, \dots, x_{n-1})^{-1}y$$

ist die Koeffizientendarstellung von  $A$ .

15

## Addition von Polynomen

Seien  $A, B$  Polynome mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ .

- Stützstellendarstellung für  $A$ :

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

- Stützstellendarstellung für  $B$  mit **selben**  $x_k$ :

$$\{(x_0, y'_0), \dots, (x_{n-1}, y'_{n-1})\}$$

- Stützstellendarstellung für  $C(x) = A(x) + B(x)$ :

$$\{(x_0, y_0 + y'_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1} + y'_{n-1})\}$$

- Aufwand:  $\Theta(n)$

17

## Interpolation: Algorithmen

Sei  $A$  Polynom mit  $n$  Stützstellenpaaren  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$

- Berechnung mit **LUP-Zerlegung**:

- $a = V(x_0, \dots, x_{n-1})^{-1}y$
- Aufwand:  $\Theta(n^3)$

- Berechnung mit **Lagrange-Interpolationsformel**:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

- Aufwand:  $\Theta(n^2)$
- später: Berechnung mit IFFT:  $\Theta(n \log n)$

16

## Multiplikation von Polynomen

Seien  $A, B$  Polynome mit Gradschranke  $n \in \mathbb{N}$ .

- Produkt  $C(x) = A(x)B(x)$  hat Gradschranke  $2n$ 
  - benötigen  $2n$  Stützstellen
  - erweitere Darstellung von  $A, B$  auf  $2n$  Stützstellen vor Multiplikation

- Stützstellendarstellungen für  $A, B$ :

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{2n-1}, y_{2n-1})\}$$

$$\{(x_0, y'_0), \dots, (x_{2n-1}, y'_{2n-1})\}$$

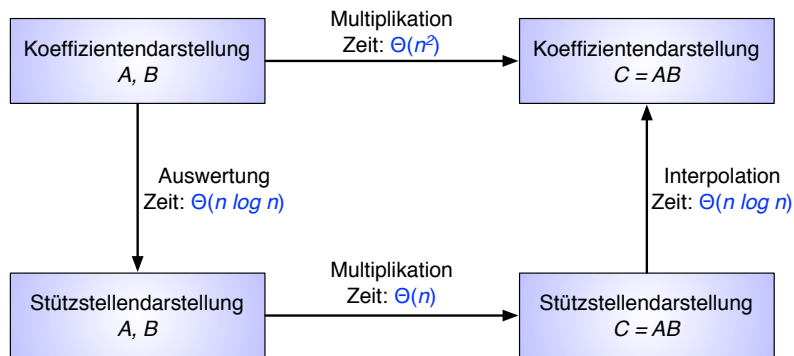
- Stützstellendarstellung für  $C(x) = A(x)B(x)$ :

$$\{(x_0, y_0 y'_0), \dots, (x_{2n-1}, y_{2n-1} y'_{2n-1})\}$$

- Aufwand:  $\Theta(n)$

18

## Effiziente Multiplikation von Polynomen



- Multiplikation von Polynomen in Koeffizientendarstellung via Stützstellendarstellung:  $\Theta(n \log n)$
- Auswertung und Interpolation mit FFT/IFFT

19

## Komplexe Einheitswurzeln

### Komplexe Einheitswurzeln

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Die **komplexe  $n$ -te Einheitswurzel** ist eine Zahl  $\omega \in \mathbb{C}$  mit

$$\omega^n = 1.$$

- Es gibt  $n$  komplexe  $n$ -te Einheitswurzeln:  $e^{2\pi i k/n}$  für  $k = 0, \dots, n-1$ .

### $n$ -te Haupteinheitswurzel

Die Zahl  $\omega_n \in \mathbb{C}$  mit

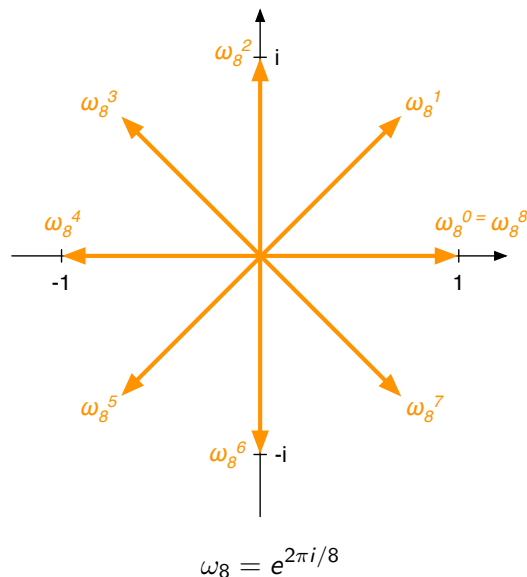
$$\omega_n = e^{2\pi i/n}$$

heißt  **$n$ -te Haupteinheitswurzel**.

- Die anderen komplexen  $n$ -ten Einheitswurzeln sind Potenzen von  $\omega_n$ .

20

## Beispiel: die komplexen 8-ten Einheitswurzeln



21

## Diskrete Fourier Transformation

### Diskrete Fourier Transform

Sei  $A$  Polynom mit Gradschranke  $n$  mit Koeffizienten  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

Die Auswertung von  $A$  an den Stellen  $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ , d.h.

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

für  $k = 0, \dots, n-1$ , heißt **Diskrete Fourier Transformation** des Koeffizientenvektors  $a$ . Kurz notiert auch als

$$y = DFT_n(a)$$

mit  $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ .

22

- Aufwand der DFT:  $\Theta(n^2)$
- zur Multiplikation von Polynomen benötigen wir tatsächlich  $2n$  Koeffizienten statt  $n$
- Zur effizienten Berechnung der DFT verwenden wir einen Divide & Conquer Ansatz  $\rightarrow$  FFT

23

## DFT mit Divide and Conquer 1

Sei  $A$  Polynom mit Koeffizienten  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- **Annahme:**  $n$  sei eine Zweier-Potenz ( $n = 2^m$ )
- **Divide-Schritt:** teile  $A$  auf entlang Koeffizienten mit geradem und ungeradem Index in  $A^{[0]}$  und  $A^{[1]}$ :

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n/2-1}$$

$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n/2-1}$$

- $A^{[0]}$  und  $A^{[1]}$  haben Gradschranke  $n/2$
- **Conquer-Schritt:** es gilt

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

### Halbierungslemma

Sei  $n \in \mathbb{N}$  gerade Zahl. Dann gilt für  $k = 0, \dots, n-1$

$$(\omega_n^k)^2 = \omega_{n/2}^k = (\omega_n^{k+n/2})^2.$$

**Beweis-Idee:**

- Es ist

$$(\omega_n^k)^2 = (e^{2\pi i k/n})^2 = (e^{2\pi i \cdot 2/n})^k = \omega_{n/2}^k$$

- Ausserdem:

$$(\omega_n^{k+n/2})^2 = \omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k} \omega_n^n = \omega_n^{2k} = (\omega_n^k)^2$$

24

## DFT mit Divide and Conquer 2

Auswertung von  $A(x)$  für  $x = \omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$  also berechnet als:

- **Divide:** werte  $A^{[0]}$  und  $A^{[1]}$  mit Gradschranke  $n/2$  aus an

$$(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \dots, (\omega_n^{n-1})^2$$

Laut Halbierungslemma sind das nur  $n/2$  verschiedene Einheitswurzeln!

- **Rekursion:** weitere Aufteilung der Polynome in kleinere Probleme
- **Conquer:** führe Ergebnisse zusammen

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Der Divide Schritt halbiert also (gemäß Halbierungslemma) die Problemgröße, und eine  $DFT_n$  wird mittels 2  $DFT_{n/2}$  berechnet.

25

26

## Algorithmus: FFT (rekursiv)

**Input:** Vektor  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Zweier-Potenz

**Output:**  $DFT_n(a)$

**FFTrekursiv(a):**

```

1  if (n == 1) return a;
2   $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ ;
3   $\omega = 1$ ;
4   $a^{[0]} = (a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$ ;
5   $a^{[1]} = (a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1})$ ;
6   $y^{[0]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[0]})$ ; // divide
7   $y^{[1]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[1]})$ ;
8  for k = 0 to n/2 - 1 { // conquer
9     $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ ;
10    $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ ;
11    $\omega = \omega \omega_n$ ; //  $\omega = \omega_n^k$ 
12 }
13 return y;
```

27

## FFT (rekursiv): Korrektheit und Laufzeit 1

- Zeile 1: DFT von einem Element ist das Element selbst,

$$y_0 = a_0 \omega_1^0 = a_0 \cdot 1 = a_0$$

- Zeilen 6/7: wegen Halbierungslemma ist

$$y_k^{[0]} = A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) = A^{[0]}(\omega_n^{2k})$$

$$y_k^{[1]} = A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) = A^{[1]}(\omega_n^{2k})$$

- Zeile 9: berechnet  $y_0, y_1, \dots, y_{n/2-1}$  da

$$y_k = y_k^{[0]} + \omega_n^k y_k^{[1]} = A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_n^{2k}) = A(\omega_n^k)$$

28

## FFT (rekursiv): Korrektheit und Laufzeit 2

- Zeile 10: berechnet  $y_{n/2}, y_{n/2+1}, \dots, y_{n-1}$  da

$$y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega_n^k y_k^{[1]} = y_k^{[0]} + \omega_n^{k+n/2} y_k^{[1]}$$

da  $\omega_n^{n/2} = -1$  und damit  $\omega_n^{k+n/2} = -\omega_n^k$ , und somit weiter

$$\begin{aligned} y_{k+n/2} &= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k}) \\ &= A^{[0]}(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k+n}) = A(\omega_n^{k+n/2}) \end{aligned}$$

da  $\omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k}$ .

- also tatsächlich  $y = DFT_n(a)$
- Laufzeit: ohne Rekursion  $\Theta(n)$ , Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

29

## Interpolation mit komplexen Einheitswurzeln

Sei  $A$  Polynom mit Koeffizienten  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

- DFT lässt sich auch als Matrix-Gleichung mit Vandermonde-Matrix  $V_n$  mit  $\omega_n$ -Potenzen als Einträge:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}}_{=:V_n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=a}$$

- Inverse Operation  $a = V_n^{-1}y$  entspricht Interpolation, auch geschrieben als

$$a = IDFT_n(y)$$

30

## Inverse Diskrete Fourier Transformation

- Es ist also  $IDFT_n(y) = V_n^{-1}y$
- $V_n^{-1}$  hat Einträge  $\omega_n^{-kj}/n$  an Stelle  $(j, k)$  für  $j, k = 0, \dots, n-1$
- $IDFT_n(y)$  ist also für  $j = 0, \dots, n-1$

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}$$

- IFFT lässt sich aus FFT gewinnen durch
  - vertauschen von  $a$  und  $y$
  - ersetzen von  $\omega_n$  durch  $\omega_n^{-1}$
  - jedes Element mit  $\frac{1}{n}$  multiplizieren
- IFFT Laufzeit also auch  $\Theta(n \log n)$

31

## Algorithmus: FFT (rekursiv)

**Input:** Vektor  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Zweier-Potenz

**Output:**  $DFT_n(a)$

**FFTrekursiv**( $a$ ):

```

1  if (n == 1) return a;
2   $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ ;
3   $\omega = 1$ ;
4   $a^{[0]} = (a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$ ;
5   $a^{[1]} = (a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1})$ ;
6   $y^{[0]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[0]})$ ; // divide
7   $y^{[1]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[1]})$ ;
8  for k = 0 to n/2 - 1 { // conquer
9     $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ ;
10    $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ ;
11    $\omega = \omega \omega_n$ ; //  $\omega = \omega_n^k$ 
12 }
13 return y;
```

33

## Faltungstheorem

### Faltungstheorem

Seien  $a, b \in \mathbb{R}^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $n = 2^m$ . Dann ist

$$a * b = IDFT_{2n}(DFT_{2n}(a) \cdot DFT_{2n}(b))$$

- $a, b$  müssen mit Nullen zur Länge  $2n$  aufgefüllt werden
- $\cdot$  ist das komponentenweise Produkt zweier Vektoren
- Gesamtlaufzeit:  $\Theta(n \log n)$

32

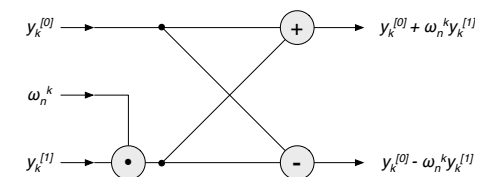
## FFT effizienter

- **FFTrekursiv** berechnet in Zeile 9,10 zweimal  $\omega y_k^{[1]}$
- effizienter mit Hilfsvariable  $t$ :

```

for k = 0 to n/2 - 1 {
   $t = \omega y_k^{[1]}$ ;
   $y_k = y_k^{[0]} + t$ ;
   $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - t$ ;
   $\omega = \omega \omega_n$ ;
}
```

- dieses Schema ist bekannt als **Butterfly-Operation**:



34



## FFT: weitere Optimierungen

Zusätzlich zu Butterfly-Operationen:

- Entrekursivierung möglich mittels Bitreversierung
- Komplexität immer noch  $\Theta(n \log n)$ , aber kleinere Konstanten
- Implementierung als parallele Schaltkreise möglich

## Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

10 Numerische Algorithmen

Matrizen

Lineare Gleichungen

Least squares Probleme

Fast Fourier Transformation