

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 Arrays und Heaps

Repräsentieren folgende Arrays Heaps? Begründen Sie Ihre Antwort!

- a) 1, 2, 9, 3, 7, 10, 11, 5, 4, 6, 8
- b) 1, 4, 2, 6, 7, 3, 5, 11, 10, 8, 9
- c) 4, 5, 3, 11, 8, 2, 1, 12, 9, 10, 7
- d) 12, 11, 6, 9, 7, 1, 2, 8, 4, 3, 5

Aufgabe 2 Prim-Algorithmus

Gegeben sei folgende Adjazenzmatrix. Geben Sie alle Zustände der Warteliste Q an, beginnend beim Startknoten c !

	a	b	c	d	e	f	g
a	∞	8	4	∞	11	∞	∞
b	8	∞	∞	2	∞	∞	4
c	4	∞	∞	∞	8	∞	∞
d	∞	2	∞	∞	7	6	∞
e	11	∞	8	7	∞	1	∞
f	∞	∞	∞	6	1	∞	2
g	∞	4	∞	∞	∞	2	∞

Aufgabe 3 MST-Heuristik für metrisches TSP

Gegeben sei ein vollständiger, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit *metrischen* Kantengewichten. Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

- Berechne minimalen Spannbaum $G_{\text{MST}} = (V, E_{\text{MST}})$.
- Erzeuge Multigraph $G_{2\text{MST}} = (V, E_{2\text{MST}})$ durch Verdoppelung aller Kanten des Spannbaums. Ein Multigraph ist ein Graph, der mehrere Kanten zwischen zwei Knoten enthalten darf.
- Erzeuge Rundreise $G_{\text{trip}} = (V, E_{\text{trip}})$ ab beliebigem Startknoten durch Verfolgung der Kanten aus $E_{2\text{MST}}$, überspringe dabei bereits besuchte Knoten durch Direktverbindung zum Nachfolger.

Wie „teuer“ ist diese Rundreise im Vergleich zu einer Lösung $G_{\text{TSP}} = (V, E_{\text{TSP}})$ auf das Traveling Salesman Problem (TSP)? G_{TSP} bezeichnet also eine Rundreise durch G von minimaler Länge, die jeden Knoten genau einmal besucht.

Aufgabe 4 Matrizen-Produkte

Berechnen Sie die folgenden Matrizen-Produkte. Sie können einen Taschenrechner verwenden.

a)

$$\begin{pmatrix} 0.8147 & 0.9134 & 0.2785 \\ 0.9058 & 0.6324 & 0.5469 \\ 0.1270 & 0.0975 & 0.9575 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.9649 \\ 0.1576 \\ 0.9706 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0.9572 & 0.1419 & 0.7922 \\ 0.4854 & 0.4218 & 0.9595 \\ 0.8003 & 0.9157 & 0.6557 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0357 & 0.6787 & 0.3922 \\ 0.8491 & 0.7577 & 0.6555 \\ 0.9340 & 0.7431 & 0.1712 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0.7060 & 0.2769 & 0.0971 \\ 0.0318 & 0.0462 & 0.8235 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4898 & 0.7094 \\ 0.4456 & 0.7547 \\ 0.6463 & 0.2760 \end{pmatrix}^T$$

Aufgabe 5 Lineare Gleichungssysteme

a) Lösen Sie das angegebene Gleichungssystem $Ax = b$ und geben Sie die Inverse A^{-1} an!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} und die Determinante $\det(A)$!

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & -2.0 & 1.0 \\ 1.0 & -4.0 & -2.0 \\ 10.0 & -5.0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie alle Lösungen x des Gleichungssystems $Ax = b$ an!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d) Wann ist ein überbestimmtes System lösbar?

e) Berechnen Sie Inverse der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 Matrix-Zerlegungen

In den folgenden Aufgaben können Sie einen Taschenrechner verwenden.

a) Definieren die Matrizen P , L und U eine gültige LUP-Zerlegung von A ?

$$A = \begin{pmatrix} 0.2238 & 0.5060 & 0.9593 \\ 0.7513 & 0.6991 & 0.5472 \\ 0.2551 & 0.8909 & 0.1386 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3396 & 1 & 0 \\ 0.2979 & 0.4555 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0.7513 & 0.6991 & 0.5472 \\ 0 & 0.6535 & -0.0472 \\ 0 & 0 & 0.8178 \end{pmatrix}$$

b) Definiert die Matrix L eine gültige Cholesky-Zerlegung von A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.3063 & 0.1776 \\ 0.3063 & 1.0938 & 0.3397 \\ 0.1776 & 0.3397 & 0.1760 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.3063 & 1.0000 & 0 \\ 0.1776 & 0.2853 & -0.2511 \end{pmatrix}$$

c) Definieren die Matrizen Q und R eine gültige QR-Zerlegung von A ?

$$A = \begin{pmatrix} 138.8349 & 131.6359 & 182.4078 \\ 106.6627 & 93.6208 & 77.7818 \\ 79.2517 & 85.8288 & 132.6412 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8.0086 & 10.8008 & 11.9235 \\ 6.1528 & 7.6084 & 3.7159 \\ 4.5716 & 7.1464 & 9.8436 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 17.3358 & 1.7446 & 17.9208 \\ 0 & 10.8940 & -10.5128 \\ 0 & 0 & 12.7843 \end{pmatrix}$$

d) Definieren die Matrizen U , Σ und V eine gültige SVD-Zerlegung von A ?

$$A = \begin{pmatrix} 0.4736 & 0.5425 & 0.4189 \\ 0.4274 & 0.4895 & 0.3780 \\ 0.6392 & 0.7322 & 0.5654 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.5244 & -0.5535 & -0.6470 \\ -0.4732 & -0.4423 & 0.7619 \\ -0.7078 & 0.7058 & -0.0300 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1.5886 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.5685 & 0.0191 & -0.8225 \\ -0.6511 & -0.6215 & 0.4356 \\ -0.5028 & 0.7832 & 0.3658 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 Euklidische Transformationen

Gegeben sei die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

mit $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, orthogonal ($R^T = R^{-1}$), und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine optimierte Inversionsformel an!