

## Algorithmen und Datenstrukturen

Bitte wiederholen Sie für die Übung auch die Aufgaben 6 und 7 des vorherigen Blattes 11. Die entsprechenden Lösungen werden in der Veranstaltung (nochmals) besprochen.

### Aufgabe 1      LUP-Zerlegung

- a) Führen Sie die LUP-Zerlegung der Matrix  $A$  gemäß des In-Place-Algorithmus aus der Vorlesung durch. Geben Sie dabei für jeden Schritt Zwischenergebnisse an für Pivotisierung und aktuelle Teilzerlegung. Bitte geben Sie auch explizit die finalen Matrizen  $L$ ,  $U$  und  $P$  an!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Gegeben sei die LUP-Zerlegung der Matrix  $A$ . Berechnen Sie damit die Inverse  $A^{-1}$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Lineare Gleichungssysteme lassen sich direkt mit Gauss-Elimination lösen. Unter welchen Umständen sind Zerlegungs-Methoden mit nachfolgender Lösung z. B. via Vorwärts-/Rückwärts-Substitution besser geeignet als Gauss-Elimination?
- d) Sind Permutationsmatrizen orthogonal?

### Aufgabe 2      Least Squares Curve Fit

- a) Gegeben sei die nachfolgende Menge von Punkten  $(x/y)$ . Berechnen Sie die Ausgleichsgerade  $y = mx + t$  im Least Squares Sinn!

$$P = \{(-1/0), (0/0), (1/1), (2/1), (3/2)\}$$

- b) Sei nun auf den gleichen Punkten eine quadratische Ausgleichskurve im Least Squares Sinne gesucht. Wie ändert sich die mathematische Problemformulierung?
- c) Was ist die Pseudo-Inverse, und wie hängt diese mit den vorherigen Problemstellungen zusammen?

### Aufgabe 3      Faltung

Gegeben sei ein Polynom  $f(x)$  mit Gradschranke  $n = 5$ . In dieser Aufgabe multiplizieren wir dieses Polynom mit einer Gauß-Glocke  $g(x)$ .

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$$

- a) Werten Sie das Polynom  $f(x)$  an den äquidistanten Stützstellen  $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$  aus!
- b) Gegeben sind nun die passenden Stützstellen der Gauß-Glocke  $g(x) = \exp(-\frac{1}{2}(2x)^2)$ :

$$\begin{aligned}(-1 &/ \exp(-2) \approx 0.1353) \\(-\frac{1}{2} &/ \exp(-\frac{1}{2}) \approx 0.6065) \\(0 &/ 1) \\(\frac{1}{2} &/ \exp(-\frac{1}{2}) \approx 0.6065) \\(1 &/ \exp(-2) \approx 0.1353)\end{aligned}$$

Berechnen Sie daraus die Stützstellen des Produkts  $f(x) \cdot g(x)$ !

- c) Interpolieren Sie aus den multiplizierten Stützstellen die Koeffizienten eines neuen Polynoms  $h(x)$  mittels LUP-Zerlegung! Was ist die Gradschranke von  $h(x)$ ?
- d) Erwarten Sie eine genaue Übereinstimmung zwischen dem exakten Produkt  $f(x) \cdot g(x)$  und dem interpolierten Polynom  $h(x)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!