

- b) Lässt sich dieser Graph einer bestimmten Unterklasse von Graphen zuordnen, und wenn ja, welcher? Geben Sie ausserdem mindestens drei Eigenschaften dieses Graphen an!

Aufgabe 4 Heaps

(7 Punkte)

- a) Repräsentiert das folgende Array einen Max-Heap? Begründen Sie Ihre Antwort und zeichnen Sie die Baumstruktur! Durch welche konkreten Operationen wäre ggf. die Heap-Eigenschaft herzustellen?

Array: 10, 7, 9, 6, 4, 5, 3, 2, 1, 8

- b) Kann mittels binärer Suche der **dritt-größte** Wert in einem Max-Heap gefunden werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 Dijkstra

(7 Punkte)

Gegeben sei ein gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, die Kanten und ihre Gewichte sind in der folgende Adjazenzmatrix encodiert. Auf diesem Graphen wird mittels des Dijkstra-Algorithmus ein kürzester Pfad ausgehend von Knoten a gesucht. Der Algorithmus hat bereits einige Schritte durchgeführt. Der aktuelle Zustand der Priority Queue Q ist unten angegeben.

Setzen Sie den Ablauf des Dijkstra-Algorithmus um **zwei** weitere Schritte fort. Geben Sie hierzu die jeweiligen Zustände der Priority Queue Q an!

	a	b	c	d	e	f
a	∞	1	5	∞	∞	∞
b	1	∞	∞	1	1,5	∞
c	5	∞	∞	∞	1	∞
d	∞	1	∞	∞	1	2
e	∞	1,5	1	1	∞	2
f	∞	∞	∞	2	2	∞

$$Q = \{(b/1), (c/5), (d/\infty), (e/\infty), (f/\infty)\}$$

Aufgabe 6 LUP-Zerlegung

(6 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen P , L und U die LUP-Zerlegung von A bilden.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- b) Betrachten Sie nun den LUP-Algorithmus. Folgende Abbildung zeigt zuletzt den Zustand nach Pivotsierungsschritt 1. Führen Sie den LUP-Algorithmus bis zum Ende durch, und geben Sie dabei alle weiteren Schritte als markierte Matrix an (wie in der Vorlesung)!

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & \mathbf{5} & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\rightsquigarrow]{\text{Pivotsierung}} \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & \mathbf{5} & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Aufgabe 7 Least-Squares

(8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Datenpunkte.

$$\{(-2/5), (0/1), (1/2)\}$$

- a) Berechnen Sie unter Angabe der Rechenschritte die quadratische Least-Squares-Ausgleichskurve $F(x)$! Wie lautet der Fachausdruck für die Ausgangs-Matrix?

- b) Zusätzlich zu den gegebenen Datenpunkten sollen nun weitere (potentiell verrauschte) Datenpunkte hinzukommen. Was für eine Art von Lösung würde man nun berechnen, und geben Sie dafür auch eine Formel an. Wie würde man diese Art von Lösung dann tatsächlich berechnen? Geben Sie auch hierfür eine Formel sowie ihren Namen an.