

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 Arrays und Heaps (Beispiellösung)

- a) Kein Heap; fast Min-Heap bis auf $7 \leftrightarrow 6$.
- b) Min-Heap; Vaterknoten stets kleiner als Kindknoten.
- c) Kein Heap; beispielsweise Wurzel $4 < 5$ (linkes Kind), aber $4 > 3$ (rechtes Kind).
- d) Max-Heap; Vaterknoten stets größer als Kindknoten.

Aufgabe 2 Prim-Algorithmus (Beispiellösung)

$$Q = \{(c, 0), (a, \infty), (b, \infty), (d, \infty), (e, \infty), (f, \infty), (g, \infty)\}$$

$$Q = \{(a, 4), (e, 8), (b, \infty), (d, \infty), (f, \infty), (g, \infty)\}$$

$$Q = \{(b, 8), (e, 8), (d, \infty), (f, \infty), (g, \infty)\}$$

$$Q = \{(d, 2), (g, 4), (e, 8), (f, \infty)\}$$

$$Q = \{(g, 4), (f, 6), (e, 7)\}$$

$$Q = \{(f, 2), (e, 7)\}$$

$$Q = \{(e, 1)\}$$

$$Q = \{\}$$

Aufgabe 3 MST-Heuristik für metrisches TSP (Beispiellösung)

„ \Rightarrow “ Bezeichne w_{MST} die Gesamtkosten des minimalen Spannbaums. Dann gilt $w_{2\text{MST}} = 2 \cdot w_{\text{MST}}$. Die Kantengewichte sind metrisch, also gilt die Dreiecksungleichung, und daher $w_{\text{trip}} \leq 2 \cdot w_{\text{MST}}$.

„ \Leftarrow “ Bezeichne w_{TSP} die Gesamtkosten der kürzesten Rundreise. Entferne eine Kante aus E_{TSP} und erhalte (nicht notwendigerweise minimalen) Spannbaum $G_{\text{ST}} = (V, E_{\text{ST}})$ mit $w_{\text{MST}} \leq w_{\text{ST}} \leq w_{\text{TSP}}$.

Aus beiden Teilen folgt, dass die erzeugte Rundreise maximal doppelt so lang wie die TSP-Lösung ist.

Aufgabe 4 Matrizen-Produkte (Beispiellösung)

a)

$$\begin{pmatrix} 1.2004 \\ 1.5045 \\ 1.0673 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0.8946 & 1.3459 & 0.6040 \\ 1.2716 & 1.3621 & 0.6311 \\ 1.4186 & 1.7244 & 1.0264 \end{pmatrix}$$

c) Nicht lösbar.

Aufgabe 5 Lineare Gleichungssysteme (Beispiellösung)

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Lineare Abhängigkeit von Zeilen bzw. Gleichungen I und III führt zu Null-Zeile während der Gauss-Elimination. Also $\text{rank}(A) = 2 < 3$ und $\det(A) = 0$, und es existiert keine Inverse!

c) Das System ist unterbestimmt, also kann statt einer Lösung nur ein Lösungsraum angegeben werden:

$$\mathbf{x}(x_3) = \begin{pmatrix} 8 - 4 \cdot x_3 \\ -1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

d) Gauss-Elimination der erweiterten Matrix muss zu Null-Zeile führen. Sonst bestünde dort eine Zeile $(0 \ 0 \ 0 \ 0|x)$ mit $x \neq 0$, was der ungültigen Aussage $0 = x \neq 0$ entsprechen würde.

e) Die Matrix ist orthogonal, da die Spaltenvektoren orthonormal sind, also $A^{-1} = A^T$.

Aufgabe 6 Matrix-Zerlegungen (Beispiellösung)

a) Gültig, $P \cdot A = L \cdot U$.

b) Ungültig, $A = L \cdot L^T$, aber L nicht untere Dreiecksmatrix mit strikt positiven Diagonaleinträgen.

c) Ungültig, $A = Q \cdot R$, aber $Q^{-1} \neq Q^T$, also nicht orthogonal.

d) Gültig, $A = U \Sigma V^T$.

Aufgabe 7 Euklidische Transformationen (Beispiellösung)

Wir haben

$$T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt Struktur

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A \cdot (R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}) + \mathbf{b} = A \cdot R \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \quad | \text{ Setze } A := R^T \\ &= R^T \cdot R \cdot \mathbf{x} + R^T \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x} + R^T \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \\ \Rightarrow \mathbf{b} &= -R^T \mathbf{t} \end{aligned}$$

Zusammen also:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$