

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 LUP-Zerlegung (Beispiellösung)

a) Die erste Spalte bezeichnet jeweils den Permutationsvektor π .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1/4 & -6/4 & 9/2 \\ 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 2 & 1/4 & -6/4 & 9/2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 2 & 1/4 & -3/4 & 6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Matrizen sind dementsprechend:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 1/4 & -3/4 & 1 & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

b) Anmerkung: Für Inverse $A^{-1} = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2)$ sind zwei Gleichungssysteme $A\mathbf{X}_i = \mathbf{e}_i \forall i \in \{1, 2\}$ zu lösen. Bei Kenntnis der LUP-Zerlegung $PA = LU$ sind dann jeweils zwei Systeme $L\mathbf{Z}_i = P\mathbf{e}_i$ (1) und $U\mathbf{X}_i = \mathbf{Z}_i$ (2) mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution zu lösen.

$i=1$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$i=2$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

c) Relevant sind zwei Aspekte: Numerische Stabilität und Geschwindigkeit. In der Reihenfolge besser werdender Stabilität und steigenden Zeitaufwands sind die Verfahren:

- Gauß-Elimination/LU-Zerlegung
- Gauß-Elimination mit partiellem Pivoting/LUP-Zerlegung
- QR-Zerlegung und SVD

Die Cholesky-Zerlegung funktioniert nur in Sonderfällen (ist dort aber sehr effizient!) und entfällt hier in der Betrachtung.

Wenn statt einer Elimination ein stabileres Zerlegungsverfahren benutzt wird, werden die Ergebnisse verlässlicher.

Die Verwendung des jeweils äquivalenten Zerlegungsverfahrens lohnt sich dann, wenn bei gleichbleibender Matrix für n rechtsseitige Vektoren zu lösen ist, da dann der Aufwand von einer Zerlegung und n Substitutionen günstiger wird als der von n Eliminationen.

d) Ja, die Spalten einer Permutationsmatrix sind per Konstruktion paarweise orthonormal.

Aufgabe 2 Least Squares Curve Fit (Beispiellösung)

a) Zur Lösung wird die Vandermonde-Matrix aufgestellt, was zu einem überbestimmten System führt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durch Nutzung der Normalgleichung erhält man ein quadratisches System, das genau zu einer Least-Squares-Lösung führt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Damit also $m = 1/2$ und $t = 3/10$, siehe rote Gerade.

b) Eine quadratische Kurve hätte die Struktur $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$. Damit ergibt sich eine größere Vandermonde-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

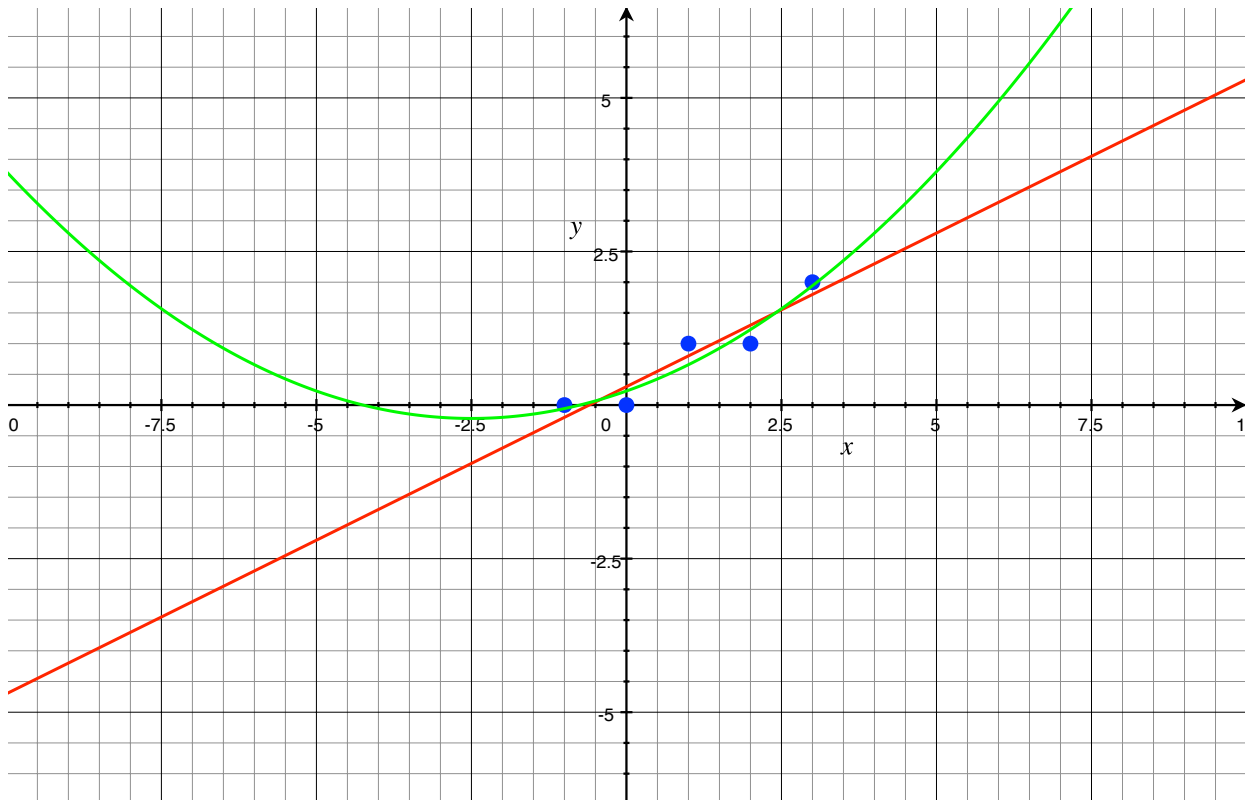
Das weitere Vorgehen entspricht dann wieder dem zuvor beschriebenen, also Lösung der Normalgleichung. Die entsprechenden Werte sind dann $a_0 \approx 0,2286$, $a_1 \approx 0,3571$ und $a_2 \approx 0,0714$, siehe grüne Kurve.

c) In beiden Fällen hatte man überbestimmte Systeme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und erreichte durch Multiplikation mit der transponierten Matrix A^T die Normalgleichung

$$A^T \mathbf{Ax} = A^T \mathbf{b}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach \mathbf{x} auflösen, und man erhält genau die Pseudo-Inverse A^+ :

$$\mathbf{x} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{=: A^+} \mathbf{b}$$



Aufgabe 3 Faltung (Beispiellösung)

a) Polynomwerte $f(x)$ an den gegebenen Stützstellen:

$$\begin{aligned} &(-1 \quad / \quad -2) \\ &\left(-\frac{1}{2} \quad / \quad -1,375\right) \\ &(0 \quad / \quad -1) \\ &\left(\frac{1}{2} \quad / \quad -0,875\right) \\ &(1 \quad / \quad 2) \end{aligned}$$

Anmerkung: Eine Auswertung im Rechner würde das Horner-Schema nutzen.

b) Produktwerte $f(x) \cdot g(x)$ an den gegebenen Stützstellen:

$$\begin{aligned} &(-1 \quad / \quad -2 \cdot \exp(-2) \approx -0,2707) \\ &\left(-\frac{1}{2} \quad / \quad -1,375 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,8340\right) \\ &(0 \quad / \quad -1 \cdot 1 = -1) \\ &\left(\frac{1}{2} \quad / \quad -0,875 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0,5307\right) \\ &(1 \quad / \quad 2 \cdot \exp(-2) \approx 0,2707) \end{aligned}$$

c) Aus den Produktwerten lässt sich die Vandermonde-Matrix für ein Polynom der Grad-schranke (ebenfalls) $n = 5$ aufstellen, und dann lösen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 \\ 1 & -1/2 & (-1/2)^2 & (-1/2)^3 & (-1/2)^4 \\ 1 & 0 & 0^2 & 0^3 & 0^4 \\ 1 & 1/2 & (1/2)^2 & (1/2)^3 & (1/2)^4 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,2707 \\ -0,8340 \\ -1 \\ -0,5307 \\ 0,2707 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das Polynom:

$$\begin{aligned}h(x) &= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 \\ &\approx -1 + 0,3142 \cdot x + 1,3608 \cdot x^2 - 0,0435 \cdot x^3 - 0,3608 \cdot x^4\end{aligned}$$

Anmerkung: Dies ist zwar ein Least-Squares-Problem, benötigt aber die Normalengleichung nicht, da das System wohldefiniert ist.

- d) Eine genaue Übereinstimmung ist nicht zu erwarten, da die Gauß-Glocke (rote Kurve) kein Polynom ist. Das Produkt mit dem Polynom $f(x)$ (grüne Kurve) ergibt also ebenfalls eine nicht exakt durch ein Polynom darstellbare Kurve (blau). Die Methode in dieser Aufgabe berechnet also nur ein angenähertes Polynom $h(x)$ (cyan), das im Bereich der Stützstellen einigermaßen gut passt, außerhalb aber beliebig stark abweicht.

