

# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2014

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures  
Technische Universität München



## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
  - Motivation und Spezifikation
  - Verifikation
  - Beispiel: Insertion Sort
  - Validation

2

## Beispiele für Fehler I

- 1996: Explosion der Ariane 5 Rakete mit 4 Satelliten an Bord
    - **Schaden:** ca. 500 Millionen Dollar
    - **Ursache:** Wert der horizontalen Geschwindigkeit von 64 Bit Floating Point Zahl (double) konvertiert auf 16 Bit Ganzzahl (signed short)
      - Zahl grösser als  $2^{15} = 32768$  → **overflow**
      - Zusammenbruch des Lenksystems
      - Backup-Rechner verwendet gleiches Programm, selber Fehler
      - Selbsterstörung nach 36.7 Sekunden Flugzeit
- Annahme dass Rakete nie so schnell fliegen wird...

## Beispiele für Fehler II

- 1995: Ausfall Stellwerk Hamburg-Altona
  - **Schaden:** 2 Tage kein Schienenverkehr in Hamburg-Altona, 2 Monate Notfahrplan
  - **Ursache:** Stack-Overflow
    - neues zentrales, computerisiertes Stellwerk für 62.6 Millionen D-Mark von Siemens
    - 3.5kB Stack für Stellbefehle (als sequentielle Liste)
    - zu klein schon für normalen Verkehr → **overflow**
    - Fehlerbehandlungsroutine fehlerhaft → Endlosschleife

3

4

## Beispiele für Fehler III

- 1985 – 1987: Therac-25 Maschine zur Strahlentherapie
  - **Schaden:** 3 Todesfälle durch Strahlenüberdosis
  - **Ursache:** "race condition" in Software-Sperre für Strahl  
(**race condition:** Ergebnis einer Operation hängt vom zeitlichen Verhalten der Einzeloperationen ab, siehe Multitasking)
    - **Overflow** in 8 Bit Test-Zähler zusammen mit Benutzereingabe deaktivieren Software-Sperre für Strahl
    - unkontrollierte Bestrahlung mit bis zu 100-facher Dosis
    - 40 - 200 Gray Dosis statt 2 Gray, ab 10 Gray tödlich
    - mind. 3 Personen sterben an Strahlenüberdosis

5

## Relative Korrektheit

Die **Korrektheit** eines Algorithmus bezieht sich immer auf die **Spezifikation** dessen, was er tun **soll**.

- Korrektheit ist **relativ**
- Algorithmus kann nicht an sich als korrekt bewiesen werden, sondern nur in Bezug auf Spezifikation

**Spezifikation:** eindeutige Festlegung der berechneten Funktion bzw. des Terminierungsverhaltens einer Softwarekomponente

7

## Beispiele für Fehler IV

- 2011 – 2014: Heartbleed Fehler in OpenSSL
  - **Schaden:** unklar (potenziell Millionen von kompromittierten Accounts)
  - **Ursache:** Buffer-Overflow in verschlüsselter Kommunikation
    - keine Prüfung der Grösse eines angeforderten Arrays
    - durch eigene Speicherverwaltung in OpenSSL gelangen sensitive Daten an potentielle Angreifer (Passwörter, Zertifikate)
    - viele Webservices betroffen (von Amazon bis Wikipedia)
    - viele Geräte betroffen (von Android Jelly Bean bis Cisco Router)

6

## Nachweis der Korrektheit

**Nachweis** der Korrektheit durch

- **Verifikation:** formaler, mathematischer Beweis, dass Algorithmus korrekt bezüglich formaler Spezifikation
  - erfordert Formalisierung der Algorithmensprache und Spezifikation
- **Validation:** nicht-formaler Nachweis der Korrektheit etwa durch systematisches Testen
  - in der Regel kein 100%ig sicherer Nachweis der Korrektheit!

8

## Verifikation vs. Validation

E.W. Dijkstra (1930 - 2002):

“Testing shows the presence, not the absence of bugs”

Analogie zur Mathematik:

- **Spezifikation:** entspricht Satz
- **Verifikation:** Beweis des Satzes
- **Validation:** Ausprobieren an Beispielwerten

9

## Vor- und Nachbedingungen

**Vor- und Nachbedingungen:** Methode zur Spezifikation von gewünschten Eigenschaften von Algorithmen

{VOR} ANW {NACH}

- {VOR}: Aussage über Zustand **vor** Ausführung von ANW
- {NACH}: Aussage über Zustand **nach** Ausführung von ANW

**Bedeutung:**

- Gilt die Vorbedingung {VOR} unmittelbar vor Ausführung von ANW
- und terminiert ANW
- so gilt die Nachbedingung {NACH} unmittelbar nach Ausführung von ANW

11

## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
  - Motivation und Spezifikation
  - Verifikation**
  - Beispiel: Insertion Sort
  - Validation

10

## Vor- und Nachbedingung

{VOR} ANW {NACH}

**Sonderfälle:**

- terminiert ANW nicht, so ist Aussage immer wahr
  - egal wie {VOR}, {NACH} aussehen
- gilt {VOR} nicht, so ist Aussage auch immer wahr
  - egal ob ANW terminiert oder ob {NACH} gilt

12

## Vor- und Nachbedingung: Beispiele I

- Aussage

$\{X==0\} X = X+1 \{X==1\}$

ist wahr

- Aussage

$\{\text{true}\} X = Y \{X==Y\}$

ist wahr

- Aussage

$\{Y==a\} X = Y \{X==a \wedge Y==a\}$

ist wahr für alle  $a \in \mathbb{Z}$

13

## Vor- und Nachbedingung: Beispiele II

- Aussage

$\{X==a \wedge Y==b \wedge a \neq b\} X = Y; Y = X \{X==b \wedge Y==a\}$

ist falsch für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$ !

(nach erstem Schritt haben X, Y beide Wert b - typischer Fehler bei Wertetausch!)

- Aussage

$\{X==a \wedge Y==b\} Z = X; X = Y; Y = Z \{X==b \wedge Y==a\}$

ist wahr für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  (korrekter Wertetausch mit Hilfsvariable Z)

14

## Vor- und Nachbedingung: Beispiele III

- Aussage

$\{\text{false}\} \text{ANW} \{\text{NACH}\}$

ist wahr für alle ANW und NACH, da Vorbedingung falsch

- Aussage

$\{\text{true}\} \text{ANW} \{\text{false}\}$

ist genau dann wahr, wenn ANW nicht terminiert

- Aussage

$\{X==a\} \text{while } X \neq 0 \{ X = X-1 \} \{X==0\}$

ist wahr für alle  $a \in \mathbb{Z}$

(auch für  $a < 0$ , da dann while-Schleife nicht terminiert!)

15

## Partielle Korrektheit

### Partielle Korrektheit

Ein Programm mit Anweisungen ANW sowie Vorbedingung  $\{\text{VOR}\}$  und Nachbedingung  $\{\text{NACH}\}$  heißt **partiell korrekt** bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

$\{\text{VOR}\} \text{ANW} \{\text{NACH}\}$

wahr ist.

Das Programm heißt **total korrekt** bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

- es partiell korrekt ist bezüglich VOR, NACH ist und
- ANW immer dann terminiert, wenn VOR gilt.

16

## Bausteine von Algorithmen

Wiederholung: Bausteine von Algorithmen

- Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung an Variable)
- Sequenz (elementare Schritte nacheinander)
- Bedingter Verarbeitungsschritt (z.B. if/else)
- Wiederholung (z.B. while-Schleife)

17

## Korrektheit von Anweisungstypen I

- Elementarer Verarbeitungsschritt  $\alpha$

$\{\text{VOR}\} \alpha \{\text{NACH}\}$

- Sequenz  $\alpha; \beta$

$\{\text{VOR}\} \alpha; \beta \{\text{NACH}\}$

wird gezeigt mittels Zwischenbedingung MITTE, also

$\{\text{VOR}\} \alpha \{\text{MITTE}\}$

und

$\{\text{MITTE}\} \beta \{\text{NACH}\}$

18

## Korrektheit von Anweisungstypen II

- Bedingter Verarbeitungsschritt

$\{\text{VOR}\} \text{if } (B) \{ \alpha \} \text{ else } \{ \beta \} \{\text{NACH}\}$

wird gezeigt mittels

$\{\text{VOR} \wedge B\} \alpha \{\text{NACH}\}$

und

$\{\text{VOR} \wedge \neg B\} \beta \{\text{NACH}\}$

→ zeige also dass NACH gilt, egal welcher Zweig ausgeführt wird!

19

## Korrektheit von Anweisungstypen III

- Wiederholung

$\{\text{VOR}\}$   
**while** (B) {  $\beta$  }  
 $\{\text{NACH}\}$

wird gezeigt mittels **Schleifeninvariante P**:

- 1 prüfe, daß  $\text{VOR} \Rightarrow P$   
(Vorbedingung garantiert Schleifeninvariante bei Eintritt in Schleife)
- 2 prüfe, daß

$\{P \wedge B\} \beta \{P\}$

(wenn Schleife durchlaufen, bleibt Schleifeninvariante wahr)

- 3 prüfe, daß  $\{P \wedge \neg B\} \Rightarrow \text{NACH}$   
(Nachbedingung muß nach Verlassen der Schleife gelten)

20

## Verifikation: Beispiel I

### Gauss'sche Summenformel

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
sum = 0;
i = 0;
while (i < n) {
  i = i + 1;
  sum = sum + i;
}
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

21

## Verifikation: Beispiel II

Sequenz mit Zwischenbedingung:

```
{ n > 0 }
sum = 0;
{ n > 0 ∧ sum == 0 }
i = 0;
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
```

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
sum = 0;
i = 0;
while (i < n) {
  i = i + 1;
  sum = sum + i;
}
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

22

## Verifikation: Beispiel III

Wiederholung mit Invariante:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
while (i < n) {
  i = i + 1;
  sum = sum + i;
}
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
sum = 0;
i = 0;
while (i < n) {
  i = i + 1;
  sum = sum + i;
}
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Passende Invariante P?

$$P = ( \text{sum} == i*(i+1)/2 \wedge i \leq n )$$

23

## Verifikation: Beispiel IV

Prüfe:

- ①  $\{ \text{VOR} \} \Rightarrow \{ P \}$   
es ist  $i==0$ , also  $i \leq n$ , und  $\text{sum} == 0*1/2 == 0$  ✓
- ②  $\{ P \wedge B \} \beta \{ P \}$   
es ist  $i < n$ , also nach  $i=i+1$  immer noch  $i \leq n$ , und für sum gilt  $\text{sum} = \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) = \frac{(i+1)*(i+2)}{2}$  ✓
- ③  $\{ P \wedge \neg B \} \Rightarrow \{ \text{NACH} \}$   
es ist  $P \wedge \neg B \Leftrightarrow P \wedge !(i < n)$   
 $\Leftrightarrow \text{sum} == \frac{i(i+1)}{2} \wedge i \leq n \wedge !(i < n)$   
 $\Leftrightarrow \text{sum} == \frac{i(i+1)}{2} \wedge i == n$   
 $\Rightarrow \text{sum} == \frac{n(n+1)}{2}$  ✓

Wiederholung mit Invariante:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
while (i < n) {
  i = i + 1;
  sum = sum + i;
}
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Invariante P:

$$P = ( \text{sum} == i*(i+1)/2 \wedge i \leq n )$$

24

## Verifikation

- Verifikation ist manuell sehr aufwendig
  - in Praxis daher leider sehr selten eingesetzt
- Vorgang lässt sich weitgehend automatisieren
  - Programm-Verifizierer
    - Programm mit Vor- und Nachbedingungen
    - Schleifen müssen Invarianten haben
    - nur möglich mit eingeschränkten Programmiersprachen z.B. Lightweight Java
  - an der TUM: Programmsystem Isabelle (Informatik)  
<http://isabelle.in.tum.de>

25

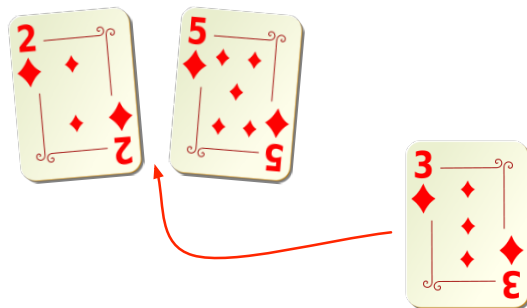
## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
  - Motivation und Spezifikation
  - Verifikation
  - Beispiel: Insertion Sort
  - Validation

26

## Insertion Sort

Insertion Sort: Sortieren durch direktes Einfügen



27

## Pseudocode von Insertion Sort

**Input:** Feld  $A[0..n-1]$  von  $n$  natürlichen Zahlen

**Output:** Feld  $A$  aufsteigend sortiert

**InsertionSort(A):**

```
for j=1 to länge(A)-1 {
  key = A[j];
  // füge A[j] in sortierte Liste A[0..j-1] ein
  i = j-1;
  while (i >= 0 && A[i] > key) {
    A[i+1] = A[i];
    i = i-1;
  }
  A[i+1] = key;
}
```

28

## Insertion Sort: Ablauf

### Beispielablauf:

Eingabe: A = 6, 3, 5, 7, 2, 4

j					
key					
i					
A[0..j-1]					

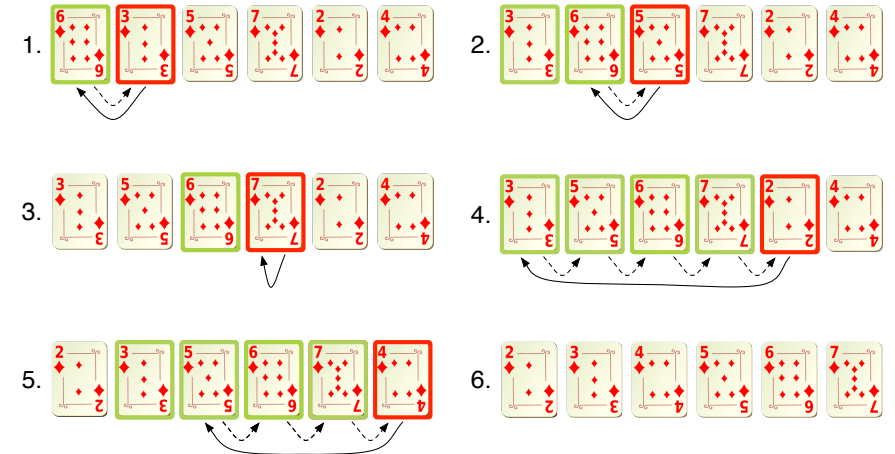
4	2	7	5	3	6
---	---	---	---	---	---


InsertionSort(A):

```

for j=1 to länge(A)-1 {
  key = A[j];
  // füge A[j] in sortierte
  // Liste A[0..j-1] ein
  i = j-1;
  while (i >= 0 && A[i] > key) {
    A[i+1] = A[i];
    i = i-1;
  }
  A[i+1] = key;
}
    
```

## Insertion Sort: Ablauf



29

30

## Insertion Sort: Verifikation

Entscheidendes Kriterium: **Schleifen-Invariante P** der **for** Schleife

P = Teilfeld A[0..j-1] besteht aus den ursprünglich in A[0..j-1] enthaltenen Werten und A[0..j-1] ist geordnet

Prüfe:

- 1 Anfang j=1: Feld A[0..j-1] enthält nur ein Element A[0], ist sortiert ✓
- 2 aktuelles Element mit Wert **key**, die Werte A[j-1], A[j-2], ... werden jeweils eine Position nach rechts verschoben, bis korrekte Position A[i] gefunden für aktuelles Element, Element wird dort eingefügt → Feld A[0..j-1] sortiert ✓
- 3 Algorithmus terminiert wenn j==n, also gilt mit voriger Invariante P: A[0..n-1] ist sortiert ✓

## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
  - Motivation und Spezifikation
  - Verifikation
  - Beispiel: Insertion Sort
  - Validation

31

32



## Validation

- **Validation:** nicht-formaler Nachweis der Korrektheit, etwa durch systematisches Testen

Warum **Validation** wenn wir **Verifikation** haben?

- bei Verifikation können Fehler unterlaufen sein
- Verifikation zu aufwendig oder nicht mehr möglich für größere bzw. komplexe Programme
- der verwendete Compiler/Rechner kann fehlerhaft sein
- **aber!** Testen kann nur Anwesenheit von Fehlern zeigen, nicht die Abwesenheit!

33

## Fehlerarten

Mögliche **Fehlerarten** (nur ein Auszug!)

- Denkfehler bei der Konstruktion des Algorithmus
  - z.B. Annahme falscher Rahmenbedingungen
  - oder Problemstellung missverstanden
- Rechenfehler bei der Verifikation
  - z.B. bei Invarianten-Prüfung falsche Schlussfolgerung gezogen
- Tipp- oder Programmierfehler bei Umsetzung auf Computer
  - z.B. Index-Zählung bei 1 statt 0 angefangen
  - oder Ziffer 1 statt Buchstabe l getippt
- Fehler im Compiler, Betriebssystem oder Rechner selbst
  - kein Compiler ist fehlerfrei
  - kein Betriebssystem ist fehlerfrei
  - kein Rechner ist fehlerfrei

34

## Validation durch systematische Tests

- **Systematische Tests:** systematische "Jagd" auf mögliche Fehler im Programm
- verschiedene Test-Typen stehen zur Verfügung:
  - Blackbox-Test
  - Whitebox-Test
  - Regressions-Test
  - Integrations-Test

35

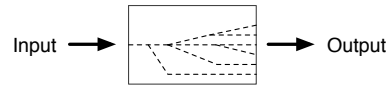
## Blackbox-Test



- Programm als "**Blackbox**" betrachten
  - interne Struktur unbekannt
  - nur Eingabe und Ausgabe bekannt
  - sowie Dokumentation was als Eingabe erlaubt ist
- systematischer Test auf **mögliche Eingabedaten** (und ob korrektes Ergebnis geliefert wird) → datenbezogenes Testen
- **Repräsentative Werteanalyse:**
  - **Klassen** von Eingabedaten (z.B. negative ganze Zahlen)
  - Auswahl von **Repräsentanten** dieser Klasse zum Test
- **Grenzwertanalyse:**
  - Eingabedaten haben meist **Grenzwerte** (z.B. Zahlen von -128 bis 127)
  - direkte Tests auf die **Grenzwerte** und auch **darüber hinaus**

36

## Whitebox-Test



- Programm als “Whitebox” betrachten
  - innere Struktur bekannt
- systematischer Test auf **innere Struktur** des Programms, d.h. das alle Programmteile ausgeführt werden → ablaufbezogenes Testen
- Test-Varianten (Auszug):
  - Ausführung **sämtlicher Programmwege** inkl. Kombinationen (meist unpraktikabel!)
  - **Alle Schleifen** müssen nicht nur einmal, sondern **zweimal** durchlaufen werden
  - **Alle Anweisungen** sollen mindestens **einmal** ausgeführt werden

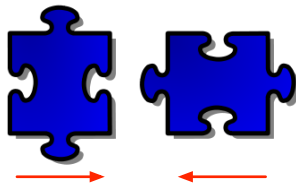
37

## Regressions-Test

- **Annahme:** mehrere Versionen des Programms (mit gleicher Funktionalität!) sind verfügbar
- systematischer Test über längere Zeit der **verschiedenen Versionen mit gleicher Eingabe**
  - ist Ausgabe unterschiedlich, ist eine der Versionen fehlerhaft
- insbesondere zur Aufdeckung von bereits behobenen Fehlern, die wieder auftauchen (sog. “Regressionen”)

38

## Integrations-Test



- große Softwaresysteme bestehen aus **Modulen** (natürlich separat getestet!)
- systematischer Test der **Zusammenarbeit** der Module, schrittweise zusammengefügt zum Gesamtsystem
  - z.B. mittels Blackbox- und Whitebox-Tests

39

## Testen in der Praxis

- “poor man’s testing” mit **assert** in C++ (siehe `assert.h`)
  - für Debug-Modus:  
**assert**(length >= 0 && “oops, negative Länge geht nicht”);
  - Prüfung deaktiviert im Release-Modus mittels Makro `NDEBUG`
- hiermit läßt sich auch auf Vor- und Nachbedingungen testen
- **Unit Test Frameworks:** Gerüste/Systeme zur Vereinfachung der Implementation von Tests
  - z.B. Microsoft Unit Testing Framework in Visual Studio
  - oder Google C++ Testing Framework
  - oder Boost Unit Testing Framework

40

## Fehler in der Praxis

- fehlertolerantes Programmieren
  - Fehler direkt im Programm feststellen
  - möglicherweise sogar korrigieren
  - Beispiel: "keine Verbindung zum Internet, stellen Sie zuerst Internet-Verbindung her, bevor Programm weiter ausgeführt werden kann"
- fehlerpräventives Programmieren
  - Verwendung geeigneter Programmiersprache mit statischem Typsystem (z.B. C++)
  - Meiden von expliziter Typumwandlung (type casts)
  - Verwendung von sicheren Konstrukten (z.B. Smartpointer statt Zeiger)
  - Aktivierung von allen Compiler-Warnungen (z.B. Clang ist hier besonders hilfreich)
- Tests bereits in Spezifikations-Phase entwickeln (**test-driven development**)

41

## Zusammenfassung

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
  - Motivation und Spezifikation
  - Verifikation
  - Beispiel: Insertion Sort
  - Validation

42