

# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2014

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures  
Technische Universität München



## Programm heute

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- ⑥ Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs  
Entwurfsprinzipien  
Divide and Conquer

4

## Algorithmen-Entwurf

- Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!
  - insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar
- Programmieren ist **kreative** Tätigkeit
  - “The Art of Computer Programming” (D. Knuth)
- Unterstützung durch **Algorithmen-Muster**
  - auch **Design Patterns** genannt
  - “best practice”

## Entwurfsprinzip: Verfeinerung

- intuitive Vorgehensweise: **schrittweise Verfeinerung**
- auch genannt: **Top-Down Entwurf**
- Schema:
  - ① Lösungsidee mit groben Anweisungen
  - ② Schrittweise Verfeinerung der Anweisungen in detailliertere / konkretere Anweisungen
  - ③ Zielprogramm in Programmiersprache (z.B. C++)

5

6

## Verfeinerung: Beispiel I

Beispiel-Problem: Tee-Zubereitung

- Lösungsidee mit groben Anweisungen:
  - 1 Wasser kochen
  - 2 Wasser in die Tasse
  - 3 Teebeutel in die Tasse
  - 4 Teebeutel herausnehmen
- Verfeinerung:
  - 1 Wasser kochen
    - 1 Wasser in Wasserkocher füllen
    - 2 Wasserkocher anstecken
    - 3 Wasserkocher anschalten
    - 4 Warten bis Wasser kocht
    - 5 Wasserkocher ausschalten
  - 2 Wasser in die Tasse
    - 1 Wasserkocher abstecken
    - 2 Wasser in Tasse füllen
  - 3 ...

7

## Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

### Definition Median

Sei  $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{N}$  eine aufsteigend sortierte Folge natürlicher Zahlen mit  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Der Median  $\tilde{x}$  ist definiert als

$$\tilde{x} := x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Beispiele:

- Folge 3, 4, 7, 10, 11: Median ist 7
- Folge 21, 33, 47, 111: Median ist 33

(Bemerkung: manchmal ist der Median im Fall von  $n$  gerade auch als arithmetisches Mittel von  $x_{\frac{n}{2}}$  und  $x_{\frac{n}{2}+1}$  definiert)

8

## Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
  - 1 Eingabe Zahlenfolge X;
  - 2 Sortiere X;
  - 3 Bestimme Median  $xt$  von X;
  - 4 Gebe  $xt$  aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
  - 1  $X = \text{EingabeFolge}();$  // Eingabe der Folge
  - 2  $\text{Sort}(X);$  // rufe Sortiermethode auf
  - 3  $xt = X[\text{ceil}(X.\text{laenge} / 2)];$  // bestimme Median
  - 4  $\text{Output}(xt);$  // gib  $xt$  aus
- Verfeinerung (C++):
  - 1 `std::vector<int> X{3, 4, 7, 10, 11};` // Folge fest vorgegeben
  - 2 `int length = X.size();` // fixe Länge
  - 3 `std::sort(X);` // sortiere Folge
  - 4 `int xt = X[ceil(length/ 2)];` // bestimme Median
  - 5 `std::cout << "Median ist " << xt;` // gib  $xt$  aus
- ...

9

## Verfeinerung

- keine festen Regeln für Verfeinerungs-Prozess
- passende Notation für Detailstufe verwenden (z.B. Pseudocode)
- jeder Verfeinerungsschritt enthält **Entwurfs-Entscheidungen**
  - bestimmt z.B. Art der Eingabe von Daten
  - bestimmt z.B. Laufzeitverhalten des Programms (Größe, Geschwindigkeit)

10

## Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- Idee: allgemeines **Algorithmen-Muster** entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: **Design Pattern** oder “best practice” Strategie
- **Beispiel Problemklasse**: finden einer optimalen Lösung bezüglich Kosten in großem Lösungsraum
  - konkret z.B. kürzester Weg zwischen zwei Städten
- **Verfahrensweise** Algorithmen-Muster:
  - Beschreibung des Lösungsverfahrens an möglichst einfachem Beispiel
  - Transfer auf konkrete Problemstellung

11

## Programm heute

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- ⑥ Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
  - Entwurfsprinzipien
  - Divide and Conquer

12

## Entwurfsprinzip: Divide and Conquer

### Definition: Divide and Conquer (nach G. Saake)

Divide and Conquer ist die **rekursive** Rückführung eines zu lösenden Problems auf ein **identisches** Problem mit **kleinerer** Eingabemenge.

- **Divide and Conquer**: zu deutsch “Teile und herrsche”
- **Prinzip**:
  - teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
  - rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf

13

## Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer als Algorithmen-Muster:

- ① **Teile** gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
  - löse Teilaufgaben einzeln
  - setze Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen **zusammen**
- ② Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann
- ③ Jede Teilaufgabe sollte **von derselben Art** sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

14

## Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer-Muster als Pseudocode:

**Input:** Aufgabe  $A$

**DivideAndConquer**( $A$ ):

```
if (A klein) {
  löse A explizit;
}
else {
  teile A in Teilaufgaben  $A_1, \dots, A_n$  auf;
  DivideAndConquer( $A_1$ );
  ...
  DivideAndConquer( $A_n$ );
  setze Lösung für  $A$  zusammen aus Lösungen für  $A_1, \dots, A_n$ 
}
```

15

## Divide and Conquer: MergeSort

Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  Feld mit  $n$  natürlichen Zahlen  $a_i \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe:** sortiere  $A$  in aufsteigender Reihenfolge.

- Lösung mit Divide and Conquer-Muster: [Merge Sort](#)
- Idee:
  - **Divide:** teile  $A$  auf in zwei gleich große Teilfelder
  - **Rekursion:** rufe Merge Sort rekursiv für die zwei Teilfelder auf
  - **Conquer:** setze die Teilfelder zusammen ([merge](#) bzw. mischen)
- Wann ist Teilfolge "klein", d.h. wann löst man explizit?  
→ Teilfolge mit nur [einem](#) Element → sortiert!

16

## MergeSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld  $A$

**Output:** sortiertes Feld

**MergeSort**( $A$ ):

```
if (A ein-elementig) { // Teilfeld ist klein
  return A;
}
else {
  halbiere A in  $A_1$  und  $A_2$ ; // Divide
   $A_1 = \mathbf{MergeSort}(A_1)$ ; // Rekursion
   $A_2 = \mathbf{MergeSort}(A_2)$ ; // Rekursion
  return Merge( $A_1, A_2$ ); // Conquer
}
```

→ "komplizierter" Teil ist in **Merge**!

17

## MergeSort: Merge Funktion

**Input:** zu sortierende Felder  $A_1, A_2$

**Output:** sortiertes Feld  $B$

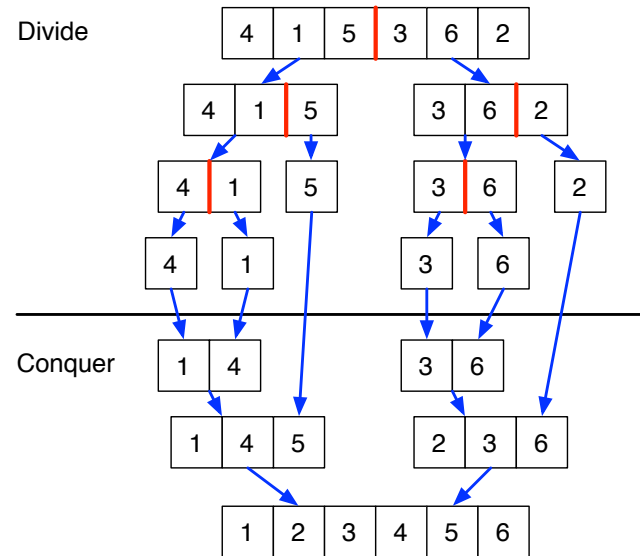
**Merge**( $A_1, A_2$ ):

```
 $B =$  leeres Feld;
while ( $A_1$  und  $A_2$  nicht leer) {
  entferne das kleinere der Anfangselemente von  $A_1$  bzw.  $A_2$ ;
  hänge dieses Element an  $B$  an;
}
häng das verbliebene, nicht-leere Feld  $A_1$  oder  $A_2$  an  $B$  an;
return  $B$ ;
```

→ tatsächliche Implementation muß Entfernen/Anhängen effizient lösen!

18

## MergeSort: Beispiel



19

## MergeSort: Eigenschaften

- Merge Sort benötigt **zusätzlichen Speicher** in Funktion **Merge**
  - insgesamt  $n$  zusätzliche Elemente falls  $A$  Länge  $n$
- best und worst case sind identisch
- die meiste Arbeit steckt in **Merge**
  - wie viel genau?

20

## MergeSort: Komplexität Merge Funktion

- $|A| = n$
  - Sei  $|A_1| = n_1, |A_2| = n_2$   
 $\rightarrow n_1 + n_2 \leq n$
  - Annahme:
    - entfernen ist  $O(1)$
    - anhängen ist  $O(1)$
  - Anzahl **while** Durchläufe:  
 $\min(n_1, n_2)$
  - anschließend  
 $\max(n_1, n_2) - \min(n_1, n_2)$   
Anhänge-Operationen  
 $\rightarrow$  **Merge** ist  $O(n_1 + n_2)$
  - also ist **Merge** auch  $O(n)$ !
- Input:** zu sortierende Felder  $A_1, A_2$   
**Output:** sortiertes Feld  $B$
- Merge( $A_1, A_2$ ):**  
 $B =$  leeres Feld;  
**while** ( $A_1$  und  $A_2$  nicht leer) {  
entferne das kleinere der Anfangs-  
elemente von  $A_1$  bzw.  $A_2$ ;  
hänge dieses Element an  $B$  an;  
}  
hänge das verbliebene, nicht-leere  
Feld  $A_1$  oder  $A_2$  an  $B$  an;  
**return**  $B$ ;

21

## MergeSort: Komplexität I

- Laufzeit von Merge Sort  
 $T(n) = ?$
  - Zeilen 1-3: "Problem klein"  
 $O(1)$
  - Zeile 5: Divide  
 $O(1)$
  - Zeile 6 und 7: Rekursion  
jeweils  $T(n/2)$
  - Zeile 8: Conquer  
 $O(n)$
- Input:** zu sortierendes Feld  $A$   
**Output:** sortiertes Feld
- MergeSort( $A$ ):**
- ```

1  if (A ein-elementig) {
2    return A;
3  }
4  else {
5    halbiere A in  $A_1$  und  $A_2$ ;
6     $A_1 = \text{MergeSort}(A_1)$ ;
7     $A_2 = \text{MergeSort}(A_2)$ ;
8    return Merge( $A_1, A_2$ );
9  }
```

$$\rightarrow T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

22

## MergeSort: Komplexität II

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

liefert durch Auflösen der Rekursionsgleichung

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Wie kann man das zeigen?

- Master-Theorem (s. Cormen, Kapitel 4.5)
- intuitiver: Rekursions-Baum

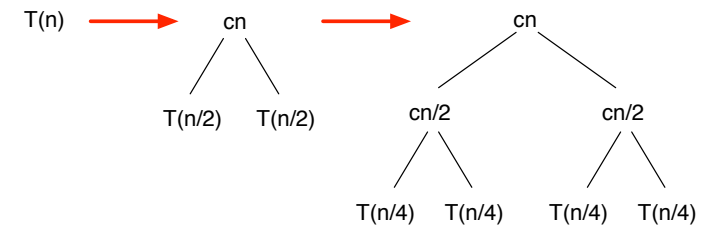
hierzu Annahme:  $c$  passende Konstante, so daß

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

und sei  $n$  Zweier-Potenz, d.h.  $n = 2^k$  für  $k \in \mathbb{N}$

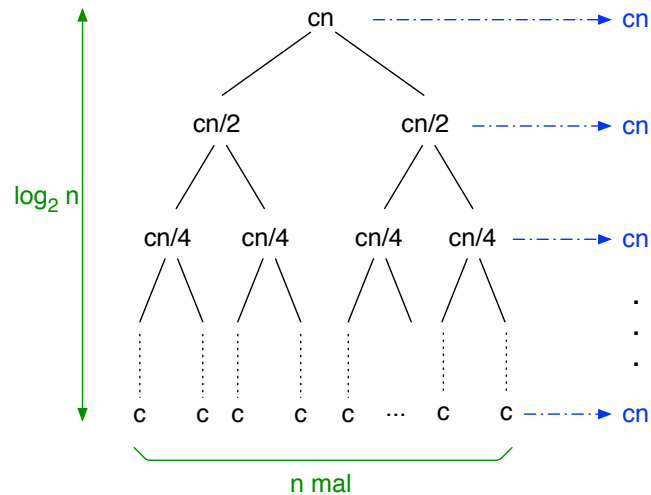
23

## MergeSort: Rekursions-Baum

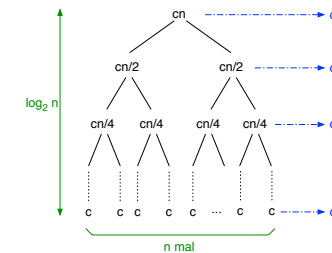


24

## MergeSort: Rekursions-Baum



## MergeSort: Komplexität III




- Baum hat Höhe  $\log_2 n$ , also  $\log_2 n + 1$  Ebenen
- pro Ebene  $cn$  Kosten  
 → Gesamtkosten  $cn(\log_2 n + 1) = cn \log_2 n + cn$

$$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n) \quad \checkmark$$

25

26

## MergeSort: Illustration

 <http://www.sorting-algorithms.com/merge-sort>

27

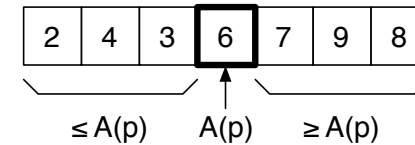
## Divide and Conquer: QuickSort

QuickSort:

- Muster: Divide and Conquer
- in-place (ohne extra Speicherbedarf)

Hauptidee:

- teile Feld  $A$  mittels **Pivot-Element**  $A(p)$  in zwei Teile
- links vom Pivot-Element  $A(p)$  sind alle Elemente kleiner als  $A(p)$
- rechts vom Pivot-Element  $A(p)$  sind alle Elemente größer als  $A(p)$



28

## QuickSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld  $A$   
Indices untere und obere Grenze  $u, o$

```
QuickSort:(A, u, o)
  if (o > u) {
    bestimme Index  $p$  des Pivot-Elements; // ist beliebig
     $pn = \text{Partition}(A, u, o, p)$ ; // Divide
    QuickSort(A, u,  $pn - 1$ ); // Rekursion
    QuickSort(A,  $pn + 1$ , o); // Rekursion
  }
```

→ "Intelligenz" in **Partition**

29

## QuickSort: Funktion Partition I

**Input:** zu zerlegendes Feld  $A$ ,  
Indices von unterer und oberer Grenze  $u, o$ ,  
Position  $p$  des Pivot-Elements

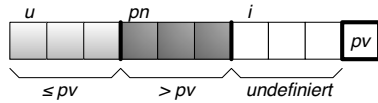
**Output:** neue Position  $pn$  des Pivot-Elements

```
Partition(A, u, o, p)
   $pn = u$ ;
   $pv = A(p)$ ;
  tausche  $A(p)$  und  $A(o)$ ; // Pivot-Element nach rechts
  for  $i = u$  to  $o - 1$  {
    if ( $A(i) \leq pv$ ) {
      tausche  $A(pn)$  und  $A(i)$ ;
       $pn = pn + 1$ ;
    }
  }
  tausche  $A(o)$  und  $A(pn)$ ; // Pivot-Element zurück
  return  $pn$ ;
```

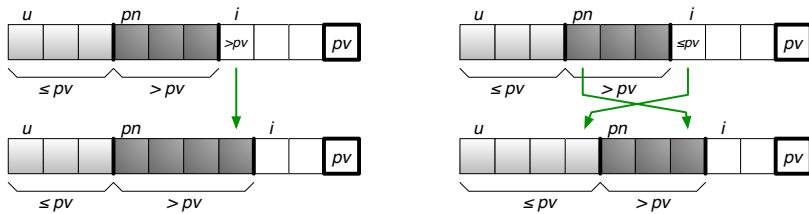
30

# QuickSort: Funktion Partition II

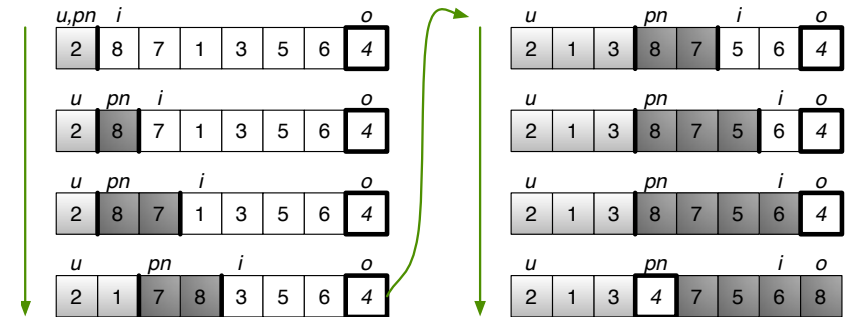
Partitions-Prinzip:



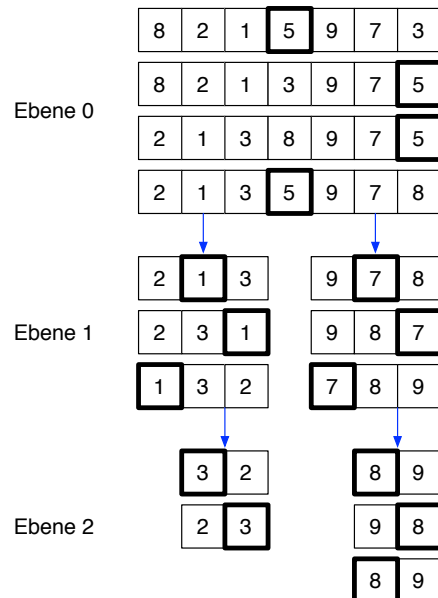
Austausch-Schritt:



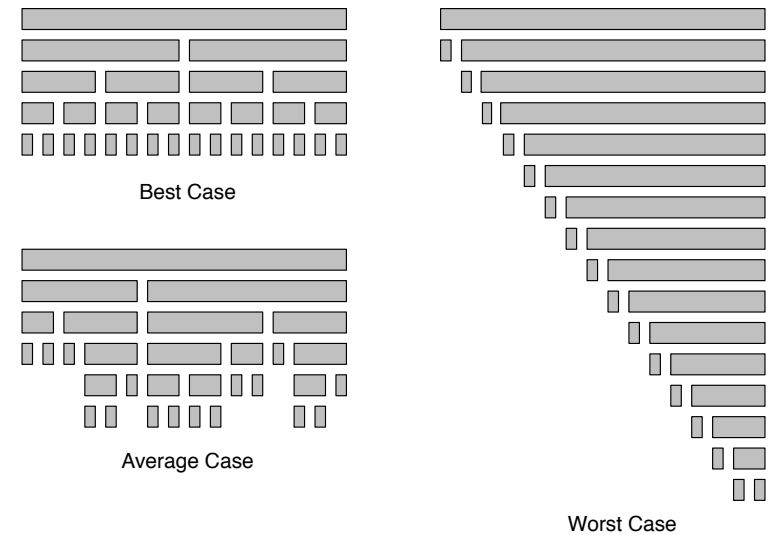
# Partition: Beispiel



# QuickSort: Komplettes Beispiel



# Quicksort: Illustration best/worst case





## QuickSort: Komplexität


Komplexität von QuickSort:

- worst case:  $\Theta(n^2)$ 
  - tritt ein wenn Pivot-Element ständig unbalanciert ist (d.h. ein Teilfeld leer)
  - insbesondere wenn Feld bereits sortiert
- best case:  $O(n \log n)$ 
  - wenn Pivot-Element Folge laufend halbiert
- im Durchschnitt:  $O(n \log n)$ 
  - Beweis aufwendig
- typische Verbesserung: randomisierte Wahl von Pivot-Element
  - Komplexität dann immer noch  $O(n \log n)$

Bei Interesse an Beweis/Herleitung: s. Cormen, Kapitel 7.2 und 7.4

35

## QuickSort: Illustration

 <http://www.sorting-algorithms.com/quick-sort>

36

## Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
  - in-place
  - Komplexität  $O(n^2)$ , best case:  $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
  - in-place
  - Komplexität  $O(n^2)$
- MergeSort
  - benötigt zusätzlichen Speicher
  - Komplexität  $O(n \log n)$
- QuickSort
  - in-place
  - Komplexität im Mittel  $O(n \log n)$ , worst case:  $O(n^2)$

37

## Zusammenfassung

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- 6 Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
  - Entwurfsprinzipien
  - Divide and Conquer

38