

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2014

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

Kürzeste Pfade

Minimaler Spannbaum

Definition Kürzester Pfad

Sei $G = (V, E)$ Graph mit **Gewichtsfunktion**

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

- das **Gewicht eines Pfades** $p = (v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k$, ist die Summe der Gewichte aller seiner Kanten

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

- das **Gewicht des kürzesten Pfades** zwischen zwei Knoten u und v ($u, v \in V$) ist

$$w_{\min}(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : p \text{ Pfad von } u \text{ nach } v\} & \text{Pfad existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: kürzeste Pfade

Navigationssystem:

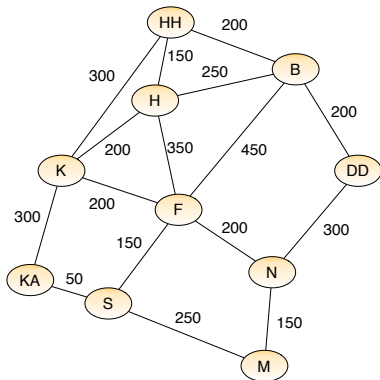
- Knoten sind Großstädte
- Kanten sind Autobahnverbindung
- Gewichte der Kanten sind (grobe) Entfernungen in Kilometern

Fragestellungen:

- kürzester Weg von M nach HH?
- alle kürzesten Verbindungen von M zu anderen Städten?
- alle kürzesten Verbindungen zwischen allen Städten?

SSSP

APSP

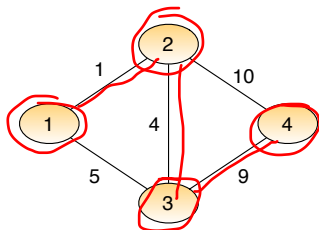


Kürzeste Pfade: Algorithmen

Sei $G = (V, E)$ gewichteter, gerichteter Graph.

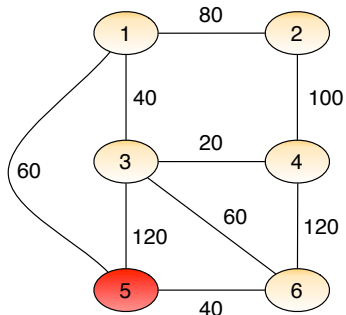
- Kürzeste Pfade in Graphen von fixem **Startknoten s** :
 - **Dijkstra-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - **A*-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Komplexität: mit guter Heuristik, besser als Dijkstra
 - **Bellman-Ford-Algorithmus** (auch negative Gewichte)
Komplexität: $O(|V| * |E|)$
- Kürzeste Pfade in Graphen zwischen **allen Knotenpaaren**:
 - **Floyd-Warshall-Algorithmus** (all pairs shortest path)
basiert auf dynamischer Programmierung
Komplexität: $\Theta(|V|^3)$

Gegenbeispiel Greedy-Algorithmus



- **Greedy-Schema:** füge kürzeste Kante zu Pfad (so dass kein Zyklus entsteht)
 - Starte bei Knoten 1
 - füge Kante (1,2) hinzu (Kosten 1)
 - füge Kante (2,3) hinzu (Kosten 4)
 - füge Kante (3,4) hinzu (Kosten 9)
- Problem: Pfad von 1 nach 4 hat Kosten 14, kürzester Pfad hat aber Kosten 11!

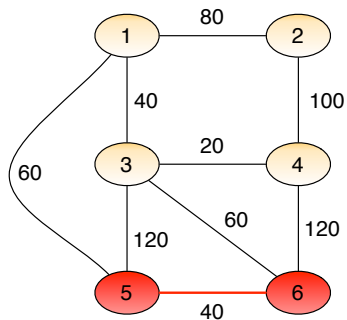
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



Kürzester Pfad		Länge
<hr/> <hr/>		
5		0

Knoten	Pfad	Pfad Länge
<hr/> <hr/>		
1	5	60
3	5	120
6	5	40

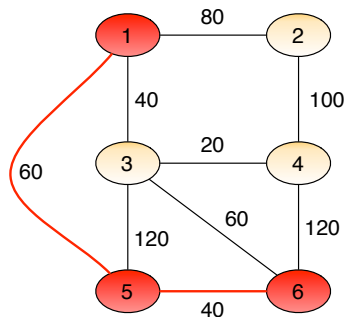
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



<u>Kürzester Pfad</u>	<u>Länge</u>
5	0
5,6	40

<u>Knoten</u>	<u>Pfad</u>	<u>Pfad</u>	<u>Länge</u>
<u>hinzugefügt</u>			
1	5	60	
3	5,6	100	
4	5,6	160	

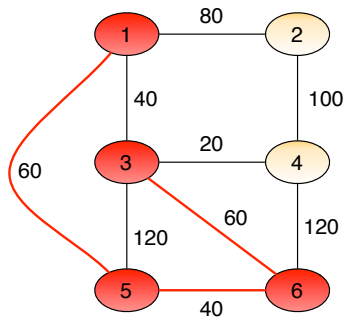
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 3



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
3	5,6	100
4	5,6	160

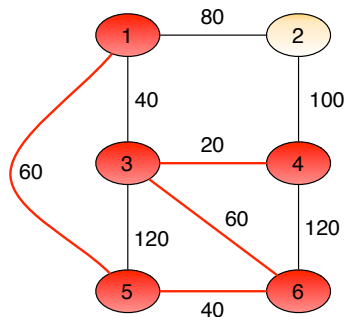
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 4



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
4	5,6,3	120

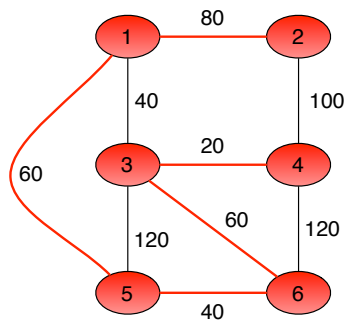
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 5



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100
5,6,3,4	120

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 6



<u>Kürzester Pfad</u>	<u>Länge</u>
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100
5,6,3,4	120
5,1,2	140

fertig

Dijkstra-Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Gewicht $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahlen).

- Startknoten $s \in V$ für kürzesten Pfad
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im kürzesten Pfad $pred$
- jeder Knoten hat Markierung d
 - Distanz (bzgl. Gewicht) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Algorithmus: Dijkstra

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste pred , Distanz-Markierung d

Dijkstra(G, w, s):

```
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
```

```
     $\text{pred}[v] = \text{null}; d[v] = \infty;$ 
```

```
}
```

```
 $d[s] = 0;$ 
```

```
Q = Priority Queue mit Elementen  $V$ , Schlüsseln  $d$ ;
```

```
while ( !Q.isEmpty() ) {
```

```
     $u = Q.extractMin();$ 
```

```
    for each ( $v \in \text{adj}[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
```

```
        if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
```

```
             $\text{pred}[v] = u; d[v] = d[u] + w(u, v);$ 
```

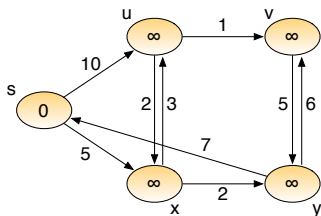
```
            Q.decreaseKey( $v, d[v]$ );
```

```
        }
```

```
    }
```

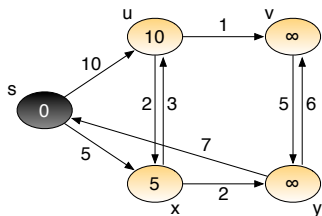
```
}
```

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



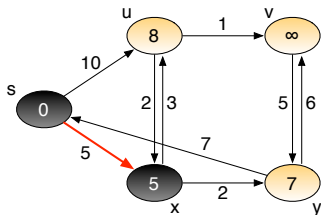
Q:

(s,0)	(u, ∞)	(v, ∞)	(x, ∞)	(y, ∞)
-------	----------------	----------------	----------------	----------------



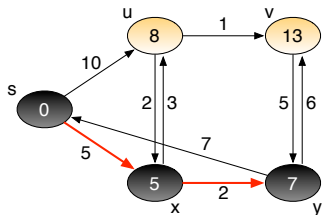
Q:

(x, 5)	(u, 10)	(v, ∞)	(y, ∞)
--------	---------	----------------	----------------



Q:

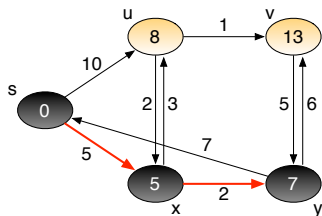
(y, 7)	(u, 8)	(v, ∞)
--------	--------	----------------



Q:

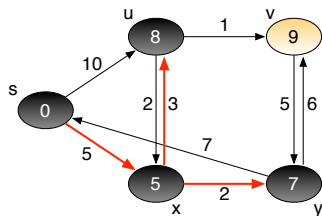
(u, 8)	(v, 13)
--------	---------

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



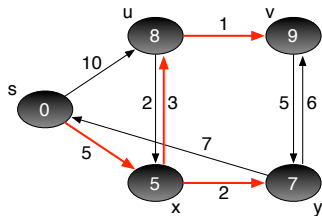
Q:

(u, 8)	(v, 13)
--------	---------



Q:

(v, 9)



Q:

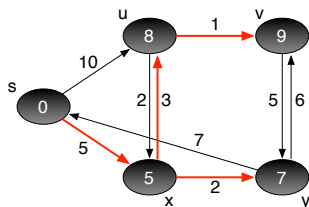
Dijkstra-Algorithmus

Nach Ausführung von **Dijkstra**(G, w, s) gilt für $v \in V$:

- $d[v]$ = Gewicht $w_{min}(v, s)$ des kürzesten Pfades von v zu s
- $pred[v]$ = Vorgängerknoten
- Kürzester Pfad von v zu s :

$pred[v], pred[pred[v]], \dots, s$

Beispiel:



Dijkstra: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-15: Ausführung $|V|$ mal
 - Zeile 7: $O(\log |V|)$
 - Zeile 8-14: Ausführung inkl. äusserer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
 - Zeile 12: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

Dijkstra(G, w, s):

```
1  for each (Knoten  $v \in V$ ) {
2       $\text{pred}[v] = \text{null}; d[v] = \infty;$ 
3  }
4   $d[s] = 0;$ 
5   $Q = \text{Priority Queue}(V, d);$ 
6  while ( ! $Q.\text{isEmpty}()$  ) {
7       $u = Q.\text{extractMin}();$ 
8      for each ( $v \in \text{adj}[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
9          if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
10              $\text{pred}[v] = u;$ 
11              $d[v] = d[u] + w(u, v);$ 
12              $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v]);$ 
13         }
14     }
15 }
```

Dijkstra: Komplexität

- Komplexität des Dijkstra Algorithmus hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Dijkstra: Korrektheit

(nur Beweisidee, dies ist kein formaler Beweis!)

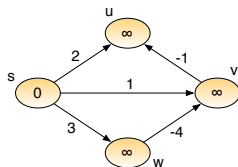
Annahme: bisherige Iterationen waren korrekt, bisher bearbeitete

Knoten: $X \subset V$

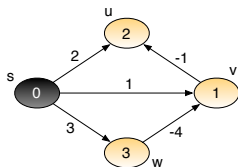
- nächster Iterationsschritt nimmt kürzeste direkte Verbindung von Knoten $x \in X$ zu noch nicht bearbeitetem Knoten $y \in V \setminus X$ hinzu
- $d[y]$ ist nun $d[x] + w(x, y)$
- jeder andere Pfad zu y hat entweder
 - eine Kante, die aus X heraus geht und ist damit nicht kürzer als (x, y)
 - mehrere Kanten, und ist damit nicht kürzer als $d[y]$, da die Kanten positives Gewicht haben

Entscheidende Annahme: Kanten haben positives Gewicht!

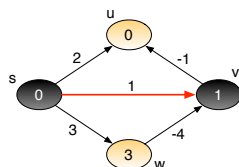
Dijkstra: Negativ-Beispiel



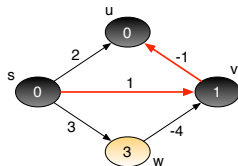
Q: (s, 0) (u, ∞) (v, ∞) (w, ∞)



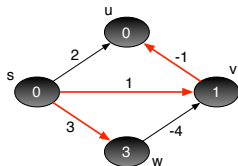
Q: (v, 1) (u, 2) (w, 3)



Q: (u, 0) (w, 3)



Q: (w, 3)



Q:

Dijkstra: Anwendungen

Dijkstra ist einer der am häufigsten verwendete Graph-Algorithmen

Beispiele:

- Routenplanung in GIS (Geographic Information System)
 - Navigationssystem im Auto
 - Maps Applikation (Google, Bing, Apple etc.)
 - Routen mit Flugzeugen, Bahn usw.
- Routing Protokolle für IP Netzwerke
 - z.B. Open Shortest Path First
- Pfadplanung von Robotern, UAV/Dronen, etc.
- Segmentierung von medizinischen Bilddaten

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

Kürzeste Pfade

Minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum

ungerichtet

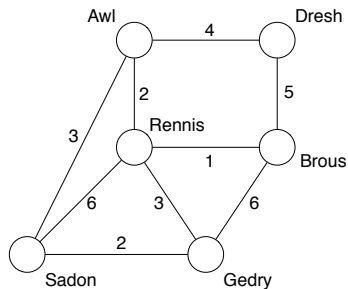
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Spannbaum:** Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
- **minimaler Spannbaum:** Spannbaum G' mit minimalem Gewicht

$$w_{G'} = \sum_{(x,y) \in E'} w(x,y)$$

Minimaler Spannbaum: Beispiel

Beispiel: 6 (virtuelle) Städte und Kosten für Strassenbau dazwischen (in Million Euro):

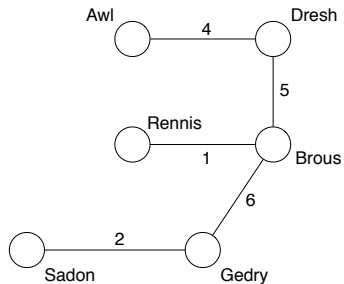


Problem: Strassenbau mit minimalen Kosten, so daß alle Städte verbunden sind (direkt oder über andere Städte)

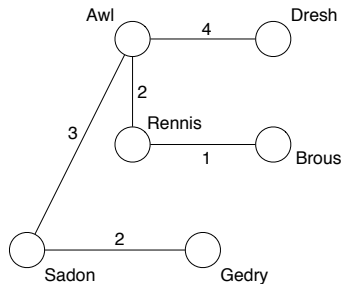
Lösung: minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum: Beispiel 2

Mögliche Lösungen:



Gewicht: 18



Gewicht: 12

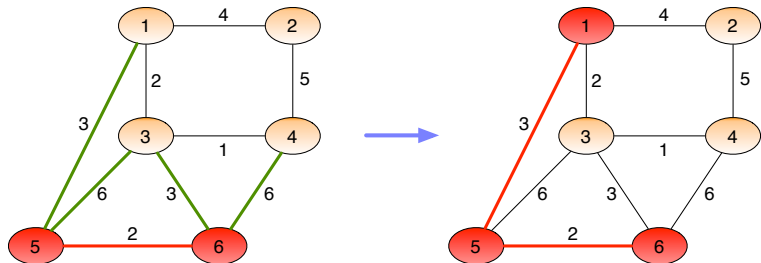
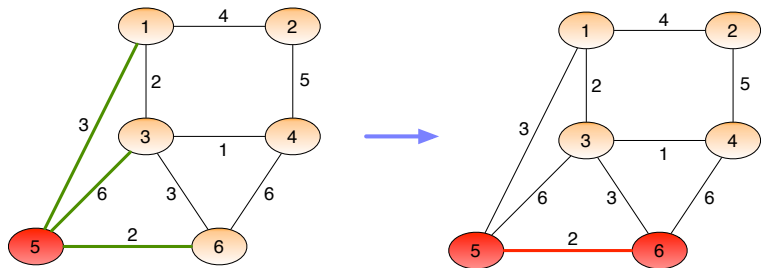
Minimaler Spannbaum: Algorithmen

ungerichteter

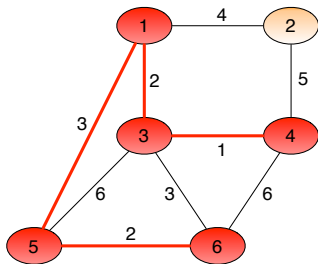
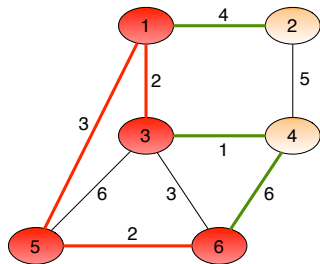
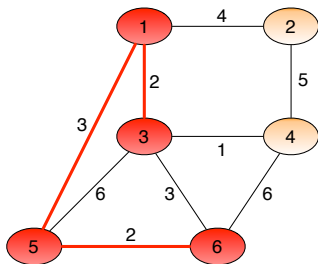
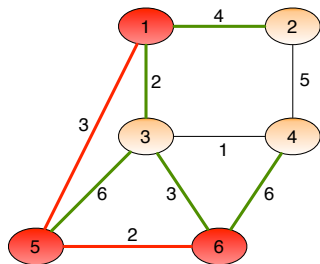
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Minimaler Spannbaum von G :
 - Algorithmus von Kruskal: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - Algorithmus von Prim: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - viele Varianten davon als parallele Algorithmen

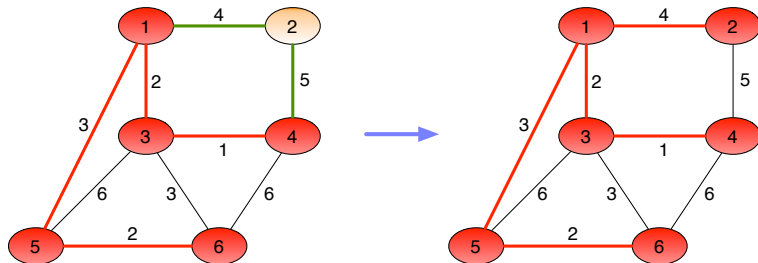
Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 1



Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 2



Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 3



Beobachtungen:

- Zwischenlösungen von Prim Algorithmus sind Bäume
- es werden öfters mehrere Kanten zum selben Knoten betrachtet (s. oben)
 - Vereinfachung: betrachte nur Kante mit minimalem Gewicht

Prim Algorithmus

ungerichtet

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Startknoten $s \in V$ für minimalen Spannbaum
- Graph repräsentiert als Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im Spannbaum $pred$
- jeder Knoten hat Markierung g
 - kleinstes Gewicht um Knoten mit aktuellem Spannbaum zu verbinden
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Algorithmus: Prim

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste `pred`

Prim(G, w, s):

```
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
```

```
     $pred[v] = \text{null}; g[v] = \infty;$ 
```

```
}
```

```
 $g[s] = 0;$ 
```

```
Q = Priority Queue mit Elementen  $V$ , Schlüsseln  $g$ ;
```

```
while ( !Q.isEmpty() ) { // Hauptschleife
```

```
     $u = Q.extractMin();$ 
```

```
    for each ( $v \in adj[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
```

```
        if ( $w(u, v) < g[v]$ ) {
```

```
             $pred[v] = u; g[v] = w(u, v);$ 
```

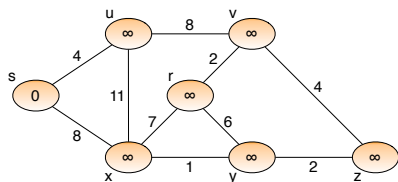
```
            Q.decreaseKey( $v, g[v]$ );
```

```
        }
```

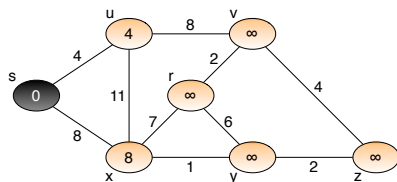
```
    }
```

```
}
```

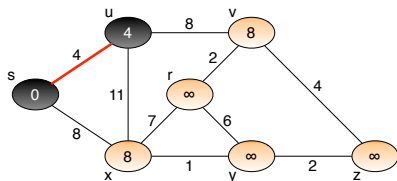

Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 1



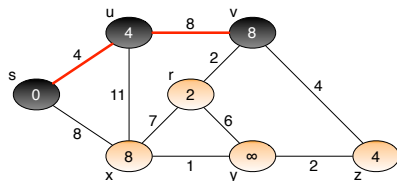
Q: (s, 0) (u, ∞) (v, ∞) (r, ∞) (x, ∞) (y, ∞) (z, ∞)



Q: (u, 4) (x, 8) (r, ∞) (v, ∞) (y, ∞) (z, ∞)

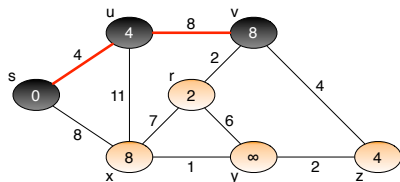


Q: (v, 8) (x, 8) (r, ∞) (y, ∞) (z, ∞)

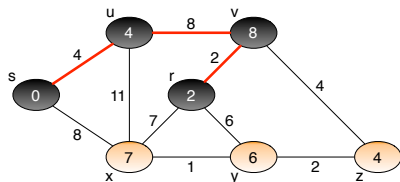


Q: (r, 2) (z, 4) (x, 8) (y, ∞)

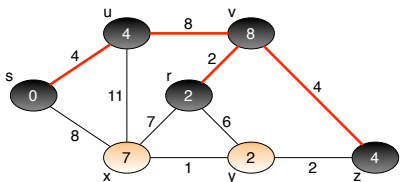
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 2



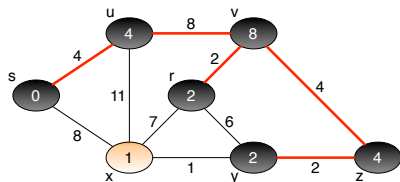
Q: (r, 2) (z, 4) (x, 8) (y, ∞)



Q: (z, 4) (y, 6) (x, 7)

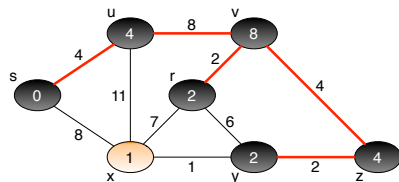


Q: (y, 2) (x, 7)

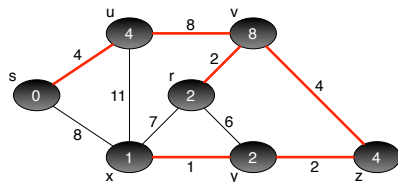


Q: (x, 1)

Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 3



Q: (x, 1)



Q:

Nach Ausführung von $\text{Prim}(G, w, s)$ gilt für $v \in V$:

- $\text{pred}[v]$ = Vorgängerknoten im Spannbaum
- Pfad in Spannbaum von v zu Wurzel s :

$\text{pred}[v], \text{pred}[\text{pred}[v]], \dots, s$

Prim: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-14: Ausführung $|V|$ mal
 - Zeile 7: $O(\log |V|)$
 - Zeile 8-13: Ausführung inkl. äusserer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
 - Zeile 11: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

Prim(G, w, s):

```
1  for each (Knoten  $v \in V$ ) {
2       $\text{pred}[v] = \text{null}; g[v] = \infty;$ 
3  }
4   $g[s] = 0;$ 
5   $Q = \text{Priority Queue}(V, g);$ 
6  while ( ! $Q.\text{isEmpty}()$  ) {
7       $u = Q.\text{extractMin}();$ 
8      for each ( $v \in \text{adj}[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
9          if ( $w(u, v) < g[v]$ ) {
10              $\text{pred}[v] = u; g[v] = w(u, v);$ 
11              $Q.\text{decreaseKey}(v, g[v]);$ 
12         }
13     }
14 }
```

Prim: Komplexität

- Komplexitätsanalyse von Prim fast identisch mit Dijkstra!
- Komplexität des Algorithmus von Prim hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Prim: Korrektheit

(nur Beweisidee, dies ist kein formaler Beweis!)

Idee: in jeder Iteration ist der aktuelle Lösungsbaum ein Teilbaum des minimalen Spannbaumes

Annahme: bisherige Iterationen waren korrekt, bisherige Knoten im Lösungsbaum: $T \subset V$

- *if ? → kommt nach!*

Keine Annahme von positiven Kantengewichten wie bei Dijkstra nötig!

Slide gestrichen!

Prim: Anwendungen

- Planung von Netzwerken
 - Strassennetz
 - Kommunikations-Netzwerk
 - elektronische Schaltungen
- Clustering von Daten
 - Daten als Knoten, "Nähe" als Kanten, entferne "lange" Kanten aus minimalem Spannbaum → Clustering
- Extrahieren/Tracking von Objekten aus Bildern in Computer Vision

Ausblick: Graphen-Algorithmen

- **Fluss in Graphen:** statt Kantengewichten gibt es Kapazitäten, betrachtet wird Fluss von Quelle zu Senke
 - Problem: finde maximalen Fluss
 - Anwendung: z.B. Fluss in Kommunikations-Netzwerken
- **Einfärben von Graphen:** Färbe Knoten von Graph so ein, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben
 - Anwendungen: z.B. Scheduling, Sudoku
- **Planare Graphen:** lässt sich Graph ohne Kanten-Überschneidung zeichnen?
 - Anwendung: z.B. Chip- bzw. Platinen-Design
- **Klassifikation von medizinischen Daten:** über analytische Operationen auf Adjazenzmatrix, z.B. Laplace-Operator
 - Anwendungen: z.B. Identifikation von Melanomen, Tracking von Endoskopen

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

- Tiefensuche

- Breitensuche

- Kürzeste Pfade

- Minimaler Spannbaum