Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2014

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Organisatorisches

Weiterer Ablauf:

- heute und Montag, 7. Juli:
  - Vorlesung: Kapitel 11 Datenkompression
- Mittwoch, 9. Juli:
  - Zentralübung: Fragestunde
- Donnerstag, 10. Juli:
  - Vorlesung: Kapitel 12 Kryptographie
- Freitag, 11. Juli:
  - letzte Tutorfragestunde
- Mittwoch, 16. Juli:
  - Klausur

Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen
8. Such-Algorithmen
9. Graph-Algorithmen
10. Numerische Algorithmen
11. Datenkompression
    - Einführung
    - Grundlagen Informationstheorie
    - Huffman Codes

Warum Datenkompression?

- Datenbanken:
  - Experimente vom LHC: ca. 15PB Daten pro Jahr
  - Steam-Plattform ca. 30PB Daten pro Monat (Stand: 2011)
  - Google bearbeitet ca. 24PB Daten pro Tag (Stand: 2008)

Warum Datenkompression?

- Datenbanken:
  - Experimente vom LHC: ca. 15PB Daten pro Jahr
  - Steam-Plattform ca. 30PB Daten pro Monat (Stand: 2011)
  - Google bearbeitet ca. 24PB Daten pro Tag (Stand: 2008)
- Filmmaterial:
  - 90 Minuten Film in PAL Auflösung, 25fps: 105GB
    Kapazität DVD: 8.5GB (single side, dual layer)
  - 90 Minuten Film in Full HD (1080p), 24fps: 501GB
    Kapazität Blu-Ray: 50GB (dual layer)

Warum Datenkompression?

- Datenbanken:
  - Experimente vom LHC: ca. 15PB Daten pro Jahr
  - Steam-Plattform ca. 30PB Daten pro Monat (Stand: 2011)
  - Google bearbeitet ca. 24PB Daten pro Tag (Stand: 2008)
- Filmmaterial:
  - 90 Minuten Film in PAL Auflösung, 25fps: 105GB
    Kapazität DVD: 8.5GB (single side, dual layer)
  - 90 Minuten Film in Full HD (1080p), 24fps: 501GB
    Kapazität Blu-Ray: 50GB (dual layer)
- Grafik:
  - Display mit Auflösung 2560x1600, 60Hz Refresh (z.B. Google Nexus 10): Datenrate $\sim$ 700MB/s
  - 4K Display (Auflösung 4096x2160, 60Hz Refresh): $\sim$ 1.5GB/s
  - Datenrate verdoppelt sich für 3D Displays

Warum Datenkompression?

- limitierte Speicherkapazitäten:
  - 3.5" Festplatte: bis zu 6TB (Stand: 2014)
  - 2.5" Solid State Disk (SSD): bis 1024GB (Stand: 2014)
  - Flash-Speicher in Handys/Tablets: typisch 16GB bis 128GB (Stand: 2014)
  - DVD: 8.5GB, Blu-Ray: 50GB (jeweils dual layer)

Warum Datenkompression?

- limitierte Speicherkapazitäten:
  - 3.5" Festplatte: bis zu 6TB (Stand: 2014)
  - 2.5" Solid State Disk (SSD): bis 1024GB (Stand: 2014)
  - Flash-Speicher in Handys/Tablets: typisch 16GB bis 128GB (Stand: 2014)
  - DVD: 8.5GB, Blu-Ray: 50GB (jeweils dual layer)
- limitierte Kapazitäten von Datenübertragung:
  - Ethernet: typisch 1Gbit/s (∼120MB/s) mit Glasfaser bis 100GBit/s
  - WLAN: 802.11n bis zu 450MBit/s (∼ 50MB/s) 802.11ac bis zu 1GBit/s
  - Mobilfunk: LTE aktuell bis zu 100MBit/s (∼ 12MB/s)

Praxisbeispiele Datenkompression

- Speicherung von Bildern
  - GIF Format (LZW)
  - PNG Format (LZ77 mit Huffmann-Codierung)
  - JPEG Format (DCT mit Quantisierung und Huffmann-Codierung)
  - JPEG2000 Format (DWT mit Quantisierung und arithmetischer Codierung)
- Speicherung von Audio
  - MP3 (MDCT, Psycho-akustisches Modell und Huffmann-Codierung)
  - AAC / MPEG-4 (MP3 mit Verbesserungen)
- Speicherung von Video
  - MPEG-2 (DCT mit Quantisierung und Huffmann-Codierung)
  - H.264 / MPEG-4 (MPEG-2 mit Verbesserungen und arithmetischer Codierung)

Praxisbeispiele Datenkompression

- Netzwerkübertragung
  - PPP mit LZS (LZ77 mit Huffmann-Codierung)
  - HTTP mit gzip (LZ77 mit Huffmann-Codierung)
- Datenspeicherung auf Festplatten
  - ZIP Datei-Archive (LZ77 mit Huffmann-Codierung)
  - bzip2 Datei-Kompression (BWT mit Huffmann-Codierung)
  - 7zip LZMA (LZ77 mit Range-Codierung)
  - Office Dokument meist ge-ZIPt
  - Sandforce SSD Controller komprimieren Daten automatisch
  - NTFS Filesystem automatische Kompression (LZ77 Variante)

Datenkompression - wie?

- Verlustfreie Kompression
  - exakte Wiederherstellung des Originals
  - Codierung mit variabler Wortlänge
  - Kompressionrate typisch 2:1 bis 4:1
  - Achtung: kann zu Datenexpansion führen!
  - Beispiele: Huffmann- und arithmetische Codierung, LZ77, LZW
- Verlustbehaftete Kompression
  - Original nicht wiederherstellbar (Verlust)
  - Kompressionsrate fast beliebig wählbar (bei Qualitätsverlust!)
  - Ausnutzung menschlicher Wahrnehmungs-Beschränkungen
  - Beispiele: MP3, AAC, MPEG-2, H.264, JPEG, JPEG2000

Codierungen

Beispiel: “Computer”

- mit ASCII Code: jedes Zeichen 8 Bit
  $\rightarrow$ 8 mal 8 Bit = 64 Bit
- mit Unicode: jedes Zeichen 16 Bit
  $\rightarrow$ 8 mal 16 Bit = 128 Bit

- eigentlich: nur 8 verschiedene Zeichen, könnte in jeweils 3 Bit codiert werden
  $\rightarrow$ 8 mal 3 Bit = 24 Bit
  - Kompressionsrate: 62.5% im Vergleich zu ASCII
  - Kompressionsrate: 81.25% im Vergleich zu Unicode

Kompressionsrate

Kompressionsrate

Sei E Grösse der Eingabe, C Grösse der komprimierten Eingabe, dann ist die Kompressionsrate CR

$$CR = 1 - \frac{C}{E}$$

- Eingabe wird nicht komprimiert $\rightarrow CR = 0\%$
- Eingabe wird auf ein Drittel komprimiert $\rightarrow CR = 66.6\%$
- Eingabe wird auf 0 komprimiert $\rightarrow CR = 100\%$
- Eingabe wird verlängert $\rightarrow CR < 0$

Codierungen

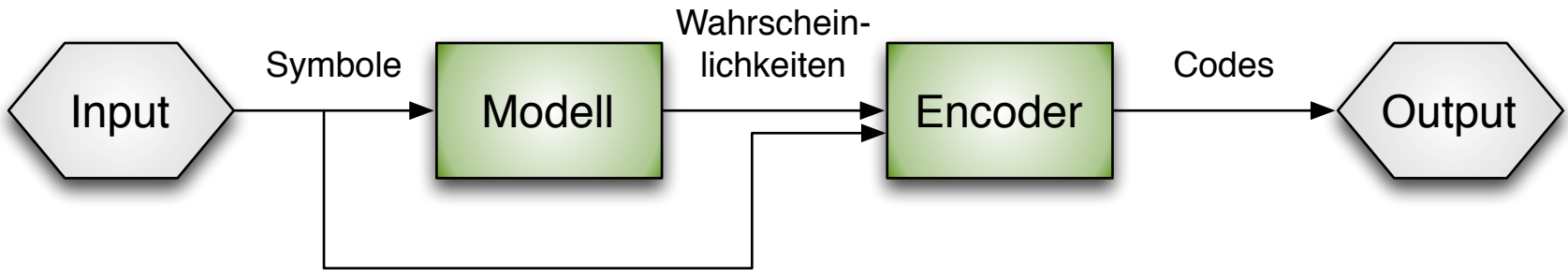
Beispiel: “Abrakadabra”

- Vorkommen:

Symbol	Häufigkeit	Huffman-Code
A	5	0
B	2	10
R	2	111
K	1	1100
D	1	1101

- Codierung:
  - ASCII: 11*8 = 88 Bits
  - Huffman: 5*1 + 2*2 + 2*3 + 1*4 + 1*4 = 23 Bits
  - Kompressionsrate: $CR = 73.87\%$

Datenkompression



- Modell:
  - z.B. einfaches statistisches Modell ohne Gedächtnis
    $\rightarrow$ Häufigkeiten der Symbole
- Encoder:
  - z.B. Huffman-Codierer (s. später)

Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen
8. Such-Algorithmen
9. Graph-Algorithmen
10. Numerische Algorithmen
11. Datenkompression
    - Einführung
    - Grundlagen Informationstheorie
    - Huffman Codes

Eingabequelle

Eingabequelle ohne Gedächtnis

Wir betrachten eine Eingabequelle Q ohne Gedächtnis, die Wörter produziert (also ein Folge von Buchstaben oder Symbolen) mittels einem Alphabet

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}\}$$

von N Symbolen. Wir bezeichnen

$$p_j = p(a_j) = \text{Wahrscheinlichkeit daß } a_j \text{ produziert wird}$$

für $j = 0, \ldots, N-1$.

- Beispiele für Alphabet:
  - $\{0, 1\}$ für eine binäre Quelle
  - $\{00000000, 00000001, \ldots, 11111111\}$ für eine ASCII Quelle

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Sei Q Eingabequelle mit Wahrscheinlichkeiten $p_0, \ldots, p_{N-1}$. Dann heißt

$$\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Q.

- Sei $\mathbf{w} = a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_n}$ ein Wort der Länge n aus der Quelle Q. Die Annahme, daß Q ohne Gedächtnis ist äquivalent zu

$$p(\mathbf{w}) = p(a_{j_1}) p(a_{j_2}) \cdots p(a_{j_n})$$

d.h. die Ereignisse sind unabhängig.

Informationsgehalt

Informationsgehalt

Sei **w** Wort aus Quelle Q.

$$I(\mathbf{w}) = \log_2 \left(\frac{1}{p(\mathbf{w})} \right) = -\log_2 p(\mathbf{w})$$

heißt Informationsgehalt von **w**.

- $I(\mathbf{w})$ ist invers proportional zu $p(\mathbf{w})$
  "je seltener das Wort, desto interessanter ist es"
- es ist $I(a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_n}) = I(a_{j_1}) + I(a_{j_2}) + \ldots + I(a_{j_n})$,
  d.h. der Informationsgehalt eines Wortes ist die Summe der Informationsgehalte seiner Buchstaben

Informationsgehalt: Beispiele

- Informationsgehalt ist über Logarithmus zur Basis 2 definiert
  $\rightarrow$ Informationseinheit Bit!
- Beispiel Münzwurf:
  - Quelle Q produziert $a_0 =$ Kopf, $a_1 =$ Zahl
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{p} = (p_0, p_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
  - dann ist $I(a_0) = I(a_1) = -\log_2 2^{-1} = 1$
  - Codierung z.B. Kopf 0, Zahl 1 ($\rightarrow$ also 1 Bit)
- Beispiel Würfel:
  - Quelle Q produziert Zahlen zwischen 0 und 255 (sehr großer Würfel)
  - Wahrsch.-verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{255}) = \left(\frac{1}{256}, \ldots, \frac{1}{256}\right)$
  - $I(a_0) = \ldots = I(a_{255}) = -\log_2 2^{-8} = 8$
  - $\rightarrow$ Codierung mit 8 Bits

Entropie

Entropie

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$. Dann heißt der durchschnittliche Informationsgehalt pro Symbol (in Bits pro Symbol)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}) &:= p_0 I(a_0) + \ldots + p_{N-1} I(a_{N-1}) \\ &= -p_0 \log_2 p_0 - \ldots - p_{N-1} \log_2 p_{N-1} \end{aligned}$$

Entropie der Quelle Q.

Entropie

Entropie

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$. Dann heißt der durchschnittliche Informationsgehalt pro Symbol (in Bits pro Symbol)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}) &:= p_0 I(a_0) + \ldots + p_{N-1} I(a_{N-1}) \\ &= -p_0 \log_2 p_0 - \ldots - p_{N-1} \log_2 p_{N-1} \end{aligned}$$

Entropie der Quelle Q.

Sei das Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ statisch, wir variieren $\mathbf{p}$.

- $H(\mathbf{p}) = 0 \iff Q$ produziert nur ein Symbol (z.B. a_0)
  - d.h. $p(a_0) = 1$ und $I(a_0) = 0$
- $H(\mathbf{p})$ ist maximal $\iff p_0 = \ldots = p_{N-1} = \frac{1}{N}$
  - dann ist $H(\mathbf{p}) = \log_2 N$

Entropie: Beispiel

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_7\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_7)$ mit

$$p_0 = \tfrac{1}{2}, \quad p_1 = \tfrac{1}{4}, \quad p_2 = p_3 = \tfrac{1}{16}, \quad p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = \tfrac{1}{32}$$

- Informationsgehalt:

$$I(a_0) = 1, \quad I(a_1) = 2, \quad I(a_2) = I(a_3) = 4,$$

$$I(a_4) = I(a_5) = I(a_6) = I(a_7) = 5$$

- Entropie:

$$H(\mathbf{p}) = \tfrac{1}{2}1 + \tfrac{1}{4}2 + 2 \cdot \tfrac{1}{16}4 + 4 \cdot \tfrac{1}{32}5 = 2.125$$

Bits / Symbol

Entropie-Codierung: Beispiel

Symbol	$p(a_j)$	$I(a_j)$	Codierung
a_0	$\frac{1}{2}$	1	0
a_1	$\frac{1}{4}$	2	10
a_2	$\frac{1}{16}$	4	1100
a_3	$\frac{1}{16}$	4	1101
a_4	$\frac{1}{32}$	5	11100
a_5	$\frac{1}{32}$	5	11101
a_6	$\frac{1}{32}$	5	11110
a_7	$\frac{1}{32}$	5	11111

- ohne Kompression: 8 verschiedene Symbole $\rightarrow$ 3 Bit
  - 10000 Symbole benötigen 30000 Bits
- mit Entropie-Codierung: basierend auf Statistik der Quelle
  - 10000 Symbole benötigen 21250 Bits
- Kompressionsrate $CR = 29.16\%$

Präfixcode

Präfixcode

Ein Code heißt Präfixcode, falls kein Codewort Präfix eines anderen Codewortes ist.

- der Entropie-Code der vorigen Folie ist ein binärer Präfixcode
- betrachte den Code $A \mapsto 0$, $B \mapsto 01$, $C \mapsto 10$
  - decodiere 001010: nicht eindeutig!
  - kann sein: $AACC$, $ABAC$ oder $ABBA$
  - Code von A ist Präfix von Code von B
- decodiere 01101001110111111110001000 mit Entropie-Code (vorige Folie)
  - decodiert: $a_0 a_3 a_0 a_0 a_5 a_7 a_2 a_0 a_1 a_0 a_0$
- in der Tat: jeder eindeutig zu decodierende Code ist ein Präfixcode (McMillan, 1956)

Kraft Ungleichung

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$.

- Idee von Shannon (1948): assoziiere zu jedem a_j einen binären Code mit Länge l_j, so daß

$$l_j = \lceil I(a_j) \rceil \qquad \text{für alle } j = 0, \ldots, N-1$$

Kraft Ungleichung

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$.

- Idee von Shannon (1948): assoziiere zu jedem a_j einen binären Code mit Länge l_j, so daß

$$l_j = \lceil I(a_j) \rceil \qquad \text{für alle } j = 0, \ldots, N-1$$

- wann funktioniert das?

Kraft Ungleichung (1949)

Seien $l_0, \ldots, l_{N-1}$ vorgegebene Längen für binäre Codewörter. Dann gibt es einen binären Präfixcode mit diesen Längen genau dann, wenn

$$\sum_{j=0}^{N-1} 2^{-l_j} \leq 1.$$

Quellencodierungssatz von Shannon

Quellencodierungssatz von Shannon (1948)

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$. Sei C ein assoziierter binärer Präfixcode mit durchschnittlicher Länge der Codewörter $\bar{l} = \sum_{j=0}^{N-1} p_j l_j$ (in Bits pro Symbol). Dann gilt:

$$H(\mathbf{p}) \leq \bar{l}.$$

- in anderen Worten: es gibt keine verlustfreie Kompression unter der Entropie.
- für Code, der nach Shannon's Idee erstellt wurde, gilt:

$$\bar{l} < H(\mathbf{p}) + 1.$$

Programm heute

Algorithmus: Shannon-Fano Code

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$.

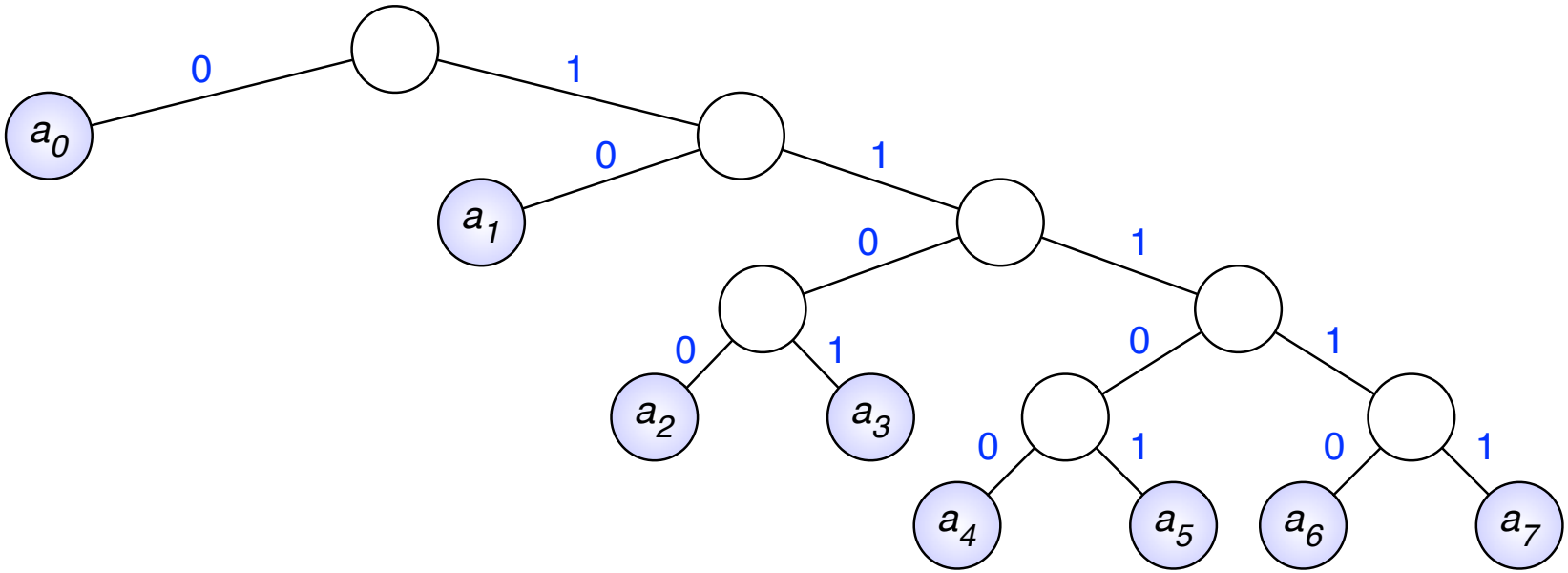
1. Sortiere Symbole absteigend in eine Liste gemäss ihrer Häufigkeit
2. Unterteile Liste in zwei Teile, so daß die Summe der Häufigkeiten des ersten Teils möglichst nahe an der Summe der Häufigkeiten im zweiten Teil ist
3. Der erste Teil erhält 0 als Binärziffer, der zweite Teil 1
4. Wende Schritt 2 und 3 rekursiv an
5. Die sich ergebenden Folgen von Binärziffern sind der Shannon-Fano Code

Shannon-Fano Code: Beispiel

Symbol	Häufigkeit	Code
a_0	16	0
a_1	8	10
a_2	2	1100
a_3	2	1101
a_4	1	11100
a_5	1	11101
a_6	1	11110
a_7	1	11111

32

Präfixcode als Baum



- Codieren: finde Pfad von Wurzel zu Blatt a_j
- Decodieren: durchlaufe Baum von Wurzel gemäß Code

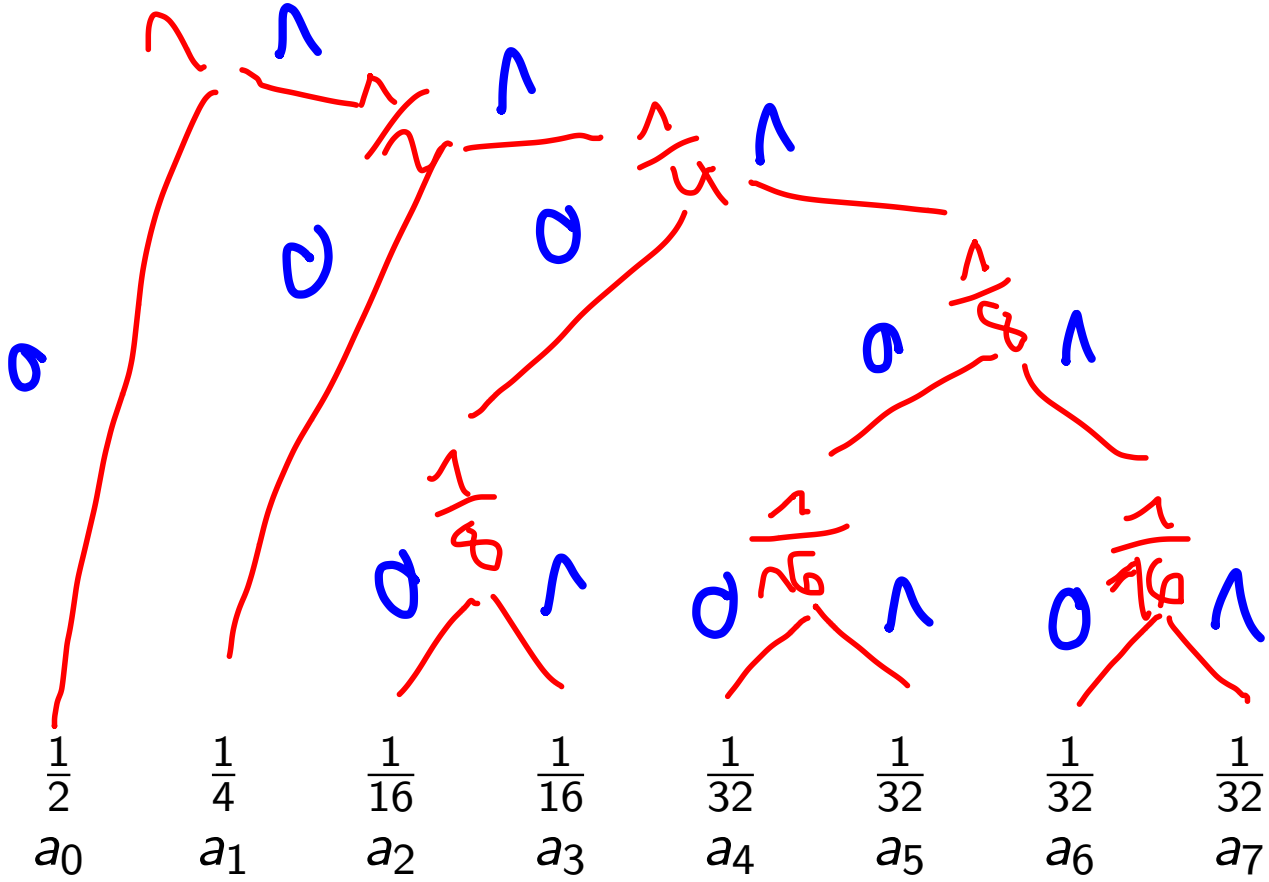
Algorithmus: Huffman-Baum

Sei Q Quelle mit Alphabet $\{a_0, \ldots, a_{N-1}\}$ und Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{N-1})$.

1. Erzeuge eine Liste von Blättern mit je ein Blatt pro a_j mit Gewicht p_j für $j = 0, \ldots, N-1$
2. Für die zwei Knoten mit geringstem Gewicht erzeuge Vaterknoten mit Summe der Gewichte
3. Ersetze die zwei Knoten in Liste mit Vaterknoten
4. Wiederhole Schritt 2 und 3 bis nur 1 Knoten (die Wurzel) übrig ist

(weiteres Beispiel für Greedy-Algorithmus)

Huffman-Code: Beispiel



- decodiere: 01101001110111111100001000

$a_0\ a_3\ a_0\ a_1\ a_5\ a_7\ a_2\ a_0\ a_1\ a_0\ a_0$

Huffmann vs. Shannon-Fano

- Shannon-Fano: Baum wird von Wurzel abwärts erstellt
- Huffman: Baum wird von Blättern aufwärts erstellt
  - Huffman ist optimaler Code mit ganzzahliger Anzahl von Bits

Beispiel:

Symbol	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
Häufigkeit	15	7	6	6	5
p_j	0.385	0.179	0.154	0.154	0.128
Shannon-Fano	00	01	10	110	111
Huffman	0	100	101	110	111

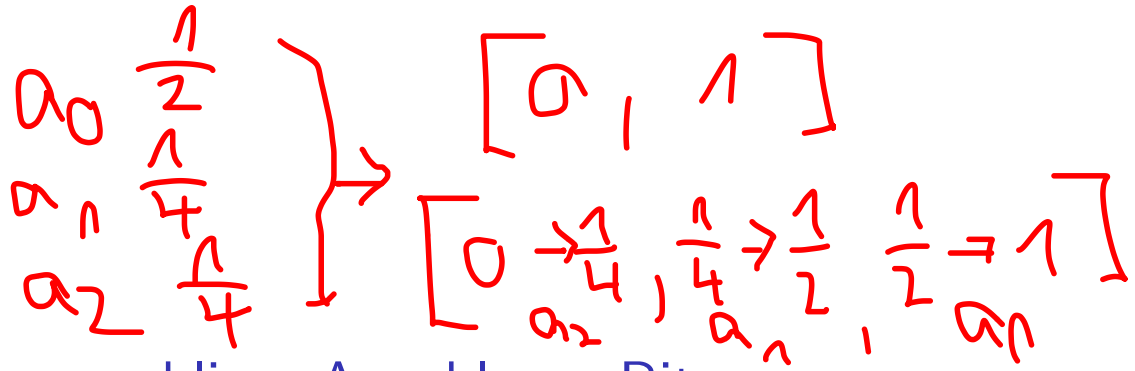
Durchschnittliche Codelänge:

- Shannon-Fano:
  $\bar{l} = \big(2 \cdot (15 + 7 + 6) + 3 \cdot (6 + 5)\big)/39 \approx 2.28$ Bits/Symbol
- Huffman:
  $\bar{l} = \big(1 \cdot 15 + 3 \cdot (7 + 6 + 6 + 5)\big)/39 \approx 2.23$ Bits/Symbol

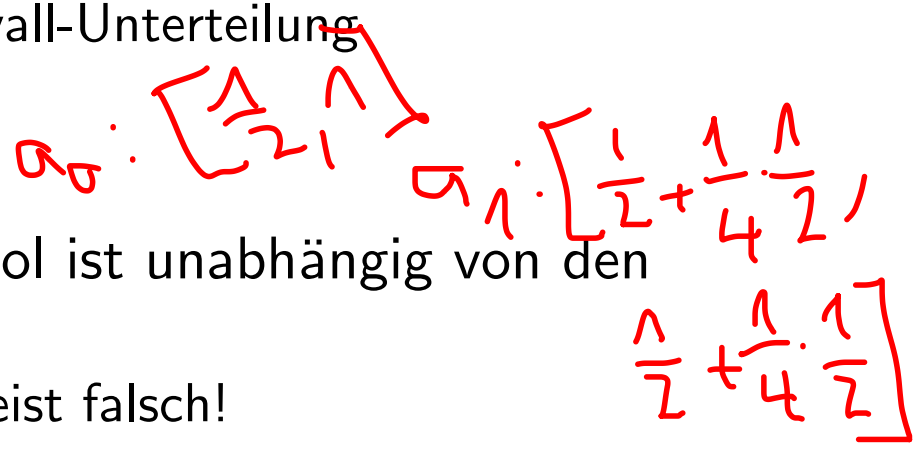
Huffman in der Praxis

- Codieren: Häufigkeiten / Wahrscheinlichkeiten müssen zuerst erzeugt werden
  - Quelle muß zweimal gelesen werden
- Decodieren: Baum muß zuerst übertragen werden
  - z.B. als Liste der Wahrscheinlichkeiten (kostet Platz!)
  - anderer Ansatz: starte mit Gleichverteilung, adaptiere Wahrscheinlichkeiten beim Lesen von Quelle

Ausblick: Codierung



- Codieren mit nicht-ganzzahliger Anzahl von Bits
  - z.B. mit geschachtelter Intervall-Unterteilung
  - $\rightarrow$ Arithmetisches Codieren



- bisherige Annahme: jedes Symbol ist unabhängig von den anderen Symbolen
  - in Text ist diese Annahme meist falsch!
  - weiteres Ausnutzen von Redundanzen durch Statistiken von Symbol-Paaren, -Tripeln etc.
  - sog. höhere statistische Modelle

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

10 Numerische Algorithmen

11 Datenkompression
- Einführung
- Grundlagen Informationstheorie
- Huffman Codes