Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2014

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Beispiele für Fehler I

- 1996: Explosion der Ariane 5 Rakete mit 4 Satelliten an Bord
  - Schaden: ca. 500 Millionen Dollar
  - Ursache: Wert der horizontalen Geschwindigkeit von 64 Bit Floating Point Zahl (`double`) konvertiert auf 16 Bit Ganzzahl (`signed short`)

    $\rightarrow$ Zahl grösser als $2^{15} = 32768$ $\rightarrow$ overflow

    $\rightarrow$ Zusammenbruch des Lenksystems

    $\rightarrow$ Backup-Rechner verwendet gleiches Programm, selber Fehler

    $\rightarrow$ Selbstzerstörung nach 36.7 Sekunden Flugzeit

    Annahme dass Rakete nie so schnell fliegen wird...

Beispiele für Fehler II

- 1995: Ausfall Stellwerk Hamburg-Altona
  - Schaden: 2 Tage kein Schienenverkehr in Hamburg-Altona, 2 Monate Notfahrplan
  - Ursache: Stack-Overflow

    $\rightarrow$ neues zentrales, computerisiertes Stellwerk für 62.6 Millionen D-Mark von Siemens

    $\rightarrow$ 3.5kB Stack für Stellbefehle (als sequentielle Liste)

    $\rightarrow$ zu klein schon für normalen Verkehr $\rightarrow$ overflow

    $\rightarrow$ Fehlerbehandlungsroutine fehlerhaft $\rightarrow$ Endlosschleife

Beispiele für Fehler III

- 1985 – 1987: Therac-25 Maschine zur Strahlentherapie
  - Schaden: 3 Todesfälle durch Strahlenüberdosis
  - Ursache: "race condition" in Software-Sperre für Strahl

    (race condition: Ergebnis einer Operation hängt vom zeitlichen Verhalten der Einzeloperationen ab, siehe Multitasking)

    → Overflow in 8 Bit Test-Zähler zusammen mit Benutzereingabe deaktivieren Software-Sperre für Strahl

    → unkontrollierte Bestrahlung mit bis zu 100-facher Dosis

    → 40 - 200 Gray Dosis statt 2 Gray, ab 10 Gray tödlich

    → mind. 3 Personen sterben an Strahlenüberdosis

Beispiele für Fehler IV

- 2011 – 2014: Heartbleed Fehler in OpenSSL
  - Schaden: unklar (potentiell Millionen von kompromittierten Accounts)
  - Ursache: Buffer-Overflow in verschlüsselter Kommunikation

    $\rightarrow$ keine Prüfung der Grösse eines angeforderten Arrays

    $\rightarrow$ durch eigene Speicherverwaltung in OpenSSL gelangen sensitive Daten an potentielle Angreifer (Passwörter, Zertifikate)

    $\rightarrow$ viele Webservices betroffen (von Amazon bis Wikipedia)

    $\rightarrow$ viele Geräte betroffen (von Android Jelly Bean bis Cisco Router)

Relative Korrektheit

Die Korrektheit eines Algorithmus bezieht sich immer auf die Spezifikation dessen, was er tun soll.

- Korrektheit ist relativ
- Algorithmus kann nicht an sich als korrekt bewiesen werden, sondern nur in Bezug auf Spezifikation

Spezifikation: eindeutige Festlegung der berechneten Funktion bzw. des Terminierungsverhaltens einer Softwarekomponente

Nachweis der Korrektheit

Nachweis der Korrektheit durch

- Verifikation: formaler, mathematischer Beweis, dass Algorithmus korrekt bezüglich formaler Spezifikation
  - erfordert Formalisierung der Algorithmensprache und Spezifikation
- Validation: nicht-formaler Nachweis der Korrektheit etwa durch systematisches Testen
  - in der Regel kein 100%ig sicherer Nachweis der Korrektheit!

Verifikation vs. Validation

E.W. Dijkstra (1930 - 2002):

> "Testing shows the presence, not the absence of bugs"

Analogie zur Mathematik:

- Spezifikation: entspricht Satz
- Verifikation: Beweis des Satzes
- Validation: Ausprobieren an Beispielwerten

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Vor- und Nachbedingungen

Vor- und Nachbedingungen: Methode zur Spezifikation von gewünschten Eigenschaften von Algorithmen

$$\{\text{VOR}\}\ \text{ANW}\ \{\text{NACH}\}$$

- $\{\text{VOR}\}$: Aussage über Zustand vor Ausführung von ANW
- $\{\text{NACH}\}$: Aussage über Zustand nach Ausführung von ANW

Bedeutung:

- Gilt die Vorbedingung $\{\text{VOR}\}$ unmittelbar vor Ausführung von ANW
- und terminiert ANW
- so gilt die Nachbedingung $\{\text{NACH}\}$ unmittelbar nach Ausführung von ANW

Vor- und Nachbedingung

{VOR} ANW {NACH}

Sonderfälle:

- terminiert ANW nicht, so ist Aussage immer wahr
  - egal wie {VOR}, {NACH} aussehen
- gilt {VOR} nicht, so ist Aussage auch immer wahr
  - egal ob ANW terminiert oder ob {NACH} gilt

Vor- und Nachbedingung: Beispiele I

- Aussage

  $$\{\mathsf{X}{==}0\}\ \mathsf{X} = \mathsf{X}{+}1\ \{\mathsf{X}{==}1\}$$

  ist wahr
- Aussage

  $$\{\texttt{true}\}\ \mathsf{X} = \mathsf{Y}\ \{\mathsf{X}{==}\mathsf{Y}\}$$

  ist wahr
- Aussage

  $$\{\mathsf{Y}{==}\mathsf{a}\}\ \mathsf{X} = \mathsf{Y}\ \{\mathsf{X}{==}\mathsf{a} \wedge \mathsf{Y}{==}\mathsf{a}\}$$

  ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$

Vor- und Nachbedingung: Beispiele II

- Aussage

  $\{X{==}a \wedge Y{==}b \wedge a{\neq}b\}\ X = Y;\ Y = X\ \{X{==}b \wedge Y{==}a\}$

  ist falsch für alle $a, b \in \mathbb{Z}$!
  (nach erstem Schritt haben X, Y beide Wert b - typischer Fehler bei Wertetausch!)

- Aussage

  $\{X{==}a \wedge Y{==}b\}\ Z = X;\ X = Y;\ Y = Z\ \{X{==}b \wedge Y{==}a\}$

  ist wahr für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ (korrekter Wertetausch mit Hilfsvariable Z)

Vor- und Nachbedingung: Beispiele III

- Aussage

  $$\{\texttt{false}\}\ \text{ANW}\ \{\text{NACH}\}$$

  ist wahr für alle ANW und NACH, da Vorbedingung falsch
- Aussage

  $$\{\texttt{true}\}\ \text{ANW}\ \{\texttt{false}\}$$

  ist genau dann wahr, wenn ANW nicht terminiert
- Aussage

  $$\{\text{X==a}\}\ \textbf{while}\ \text{X} \neq 0\ \{\ \text{X} = \text{X-1}\ \}\ \{\text{X==0}\}$$

  ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$
  (auch für $a < 0$, da dann while-Schleife nicht terminiert!)

Partielle Korrektheit

Partielle Korrektheit

Ein Programm mit Anweisungen ANW sowie Vorbedingung {VOR} und Nachbedingung {NACH} heißt partiell korrekt bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

$$\{\text{VOR}\}\ \text{ANW}\ \{\text{NACH}\}$$

wahr ist.

Das Programm heißt total korrekt bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

- es partiell korrekt ist bezüglich VOR, NACH ist und
- ANW immer dann terminiert, wenn VOR gilt.

Bausteine von Algorithmen

Wiederholung: Bausteine von Algorithmen

- Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung an Variable)
- Sequenz (elementare Schritte nacheinander)
- Bedingter Verarbeitungsschritt (z.B. if/else)
- Wiederholung (z.B. while-Schleife)

Korrektheit von Anweisungstypen I

- Elementarer Verarbeitungsschritt α

$$\{\text{VOR}\}\ \alpha\ \{\text{NACH}\}$$

- Sequenz $\alpha; \beta$

$$\{\text{VOR}\}\ \alpha; \beta\ \{\text{NACH}\}$$

wird gezeigt mittels Zwischenbedingung MITTE, also

$$\{\text{VOR}\}\ \alpha\ \{\text{MITTE}\}$$

und

$$\{\text{MITTE}\}\ \beta\ \{\text{NACH}\}$$

Korrektheit von Anweisungstypen II

- Bedingter Verarbeitungsschritt

$$\{\text{VOR}\}\ \textbf{if}\ (\text{B})\ \{\ \alpha\ \}\ \text{else}\ \{\ \beta\ \}\ \{\text{NACH}\}$$

wird gezeigt mittels

$$\{\text{VOR} \wedge \text{B}\}\ \alpha\ \{\text{NACH}\}$$

und

$$\{\text{VOR} \wedge \neg\text{B}\}\ \beta\ \{\text{NACH}\}$$

$\rightarrow$ zeige also dass NACH gilt, egal welcher Zweig ausgeführt wird!

Korrektheit von Anweisungstypen III

- Wiederholung

  {VOR}
  while (B) { β }
  {NACH}

  wird gezeigt mittels Schleifeninvariante P:

  1. prüfe, daß VOR $\Rightarrow$ P
     (Vorbedingung garantiert Schleifeninvariante bei Eintritt in Schleife)
  2. prüfe, daß
     $$\{P \wedge B\}\ \beta\ \{P\}$$
     (wenn Schleife durchlaufen, bleibt Schleifeninvariante wahr)
  3. prüfe, daß $\{P \wedge \neg B\} \Rightarrow$ NACH
     (Nachbedingung muß nach Verlassen der Schleife gelten)

Verifikation: Beispiel I

Gauss'sche Summenformel

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
    sum = 0;
    i = 0;
    while (i < n) {
        i = i + 1;
        sum = sum + i;
    }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Verifikation: Beispiel II

Sequenz mit Zwischenbedingung:

$\{ n > 0 \}$
sum = 0;
$\{ n > 0 \wedge sum == 0 \}$
i = 0;
$\{ n > 0 \wedge sum == 0 \wedge i == 0 \}$

Algorithmus:

$\{ n > 0 \}$
sum = 0;
i = 0;
while (i < n) {
i = i + 1;
sum = sum + i;
}
$\{ sum == n*(n+1)/2 \}$

Verifikation: Beispiel III

Wiederholung mit Invariante:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
    while (i < n) {
      i = i + 1;
      sum = sum + i;
    }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Passende Invariante P?

P = (sum == i*(i+1)/2 ∧ i <= n)

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
    sum = 0;
    i = 0;
    while (i < n) {
      i = i + 1;
      sum = sum + i;
    }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Verifikation: Beispiel IV

Prüfe:

1. $\{\text{VOR}\} \Rightarrow \{\text{P}\}$

   es ist i==0, also i<=n, und sum==0*1/2==0 ✓

2. $\{\text{P} \wedge \text{B}\}\ \beta\ \{\text{P}\}$

   es ist i<n, also nach i=i+1 immer noch i<=n , und für sum gilt

   $\text{sum}=\frac{\text{i(i+1)}}{2}+(\text{i+1})==\frac{(\text{i+1})*(\text{i+2})}{2}$ ✓

3. $\{\text{P} \wedge \neg\text{B}\} \Rightarrow \{\text{NACH}\}$

   es ist $\text{P} \wedge \neg\text{B} \Leftrightarrow \text{P} \wedge !(\text{i<n})$

   $\Leftrightarrow \text{sum}==\frac{\text{i(i+1)}}{2} \wedge \text{i<=n} \wedge !(\text{i<n})$

   $\Leftrightarrow \text{sum}==\frac{\text{i(i+1)}}{2} \wedge \text{i==n}$

   $\Rightarrow \text{sum}==\frac{\text{n(n+1)}}{2}$ ✓

Wiederholung mit Invariante:

$\{\ \text{n} > 0 \wedge \text{sum} == 0 \wedge \text{i} == 0\ \}$

```
    while (i < n) {
        i = i + 1;
        sum = sum + i;
    }
```

$\{\ \text{sum} == \text{n*(n+1)/2}\ \}$

Invariante P:

$\text{P} = (\text{sum} == \text{i*(i+1)/2} \wedge \text{i} <= \text{n})$

Verifikation

- Verifikation ist manuell sehr aufwendig
  - in Praxis daher leider sehr selten eingesetzt
- Vorgang lässt sich weitgehend automatisieren

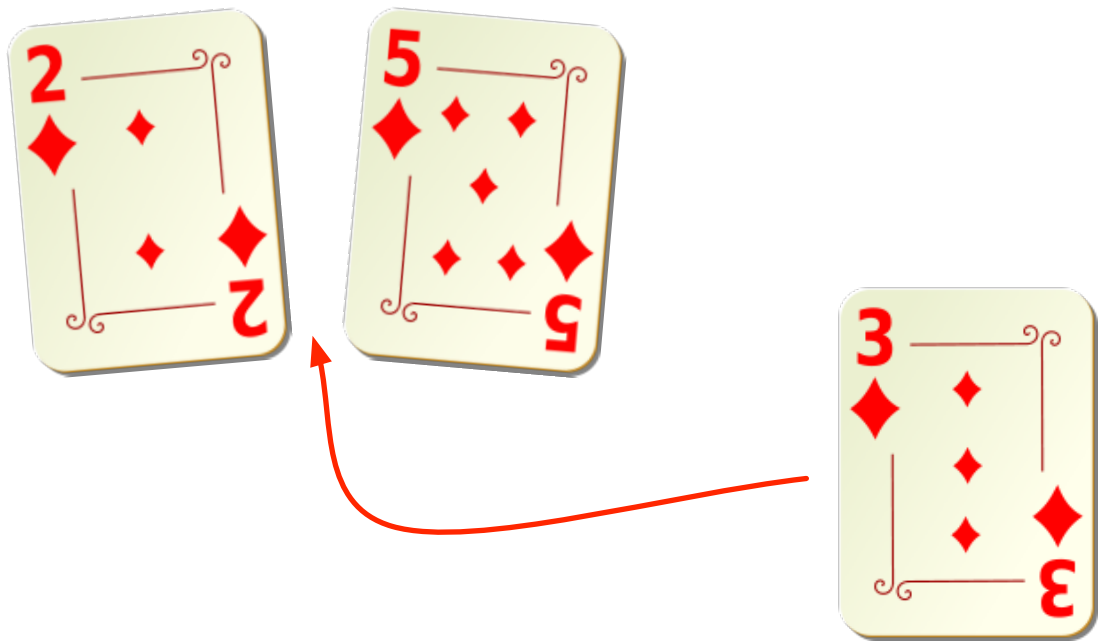
  → Programm-Verifizierer
  - Programm mit Vor- und Nachbedingungen
  - Schleifen müssen Invarianten haben
  - nur möglich mit eingeschränkten Programmiersprachen
    z.B. Lightweight Java
  - an der TUM: Programmsystem Isabelle (Informatik)
    `http://isabelle.in.tum.de`

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Insertion Sort

Insertion Sort: Sortieren durch direktes Einfügen



Pseudocode von Insertion Sort

Input: Feld A[0..n-1] von n natürlichen Zahlen
Output: Feld A aufsteigend sortiert
InsertionSort(A):

```
for j=1 to länge(A)-1 {
    key = A[j];
    // füge A[j] in sortierte Liste A[0..j-1] ein
    i = j-1;
    while (i >= 0 && A[i] > key) {
        A[i+1] = A[i];
        i = i-1;
    }
    A[i+1] = key;
}
```

Insertion Sort: Ablauf

Beispielablauf:

Eingabe: A = 6, 3, 5, 7, 2, 4

j				
key				
i				
A[0..j-1]				

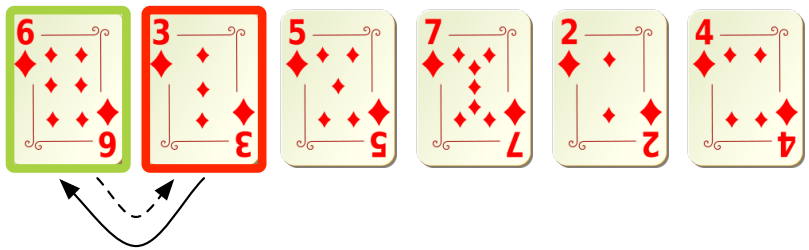
4	2	7	5	3	6

InsertionSort(A):

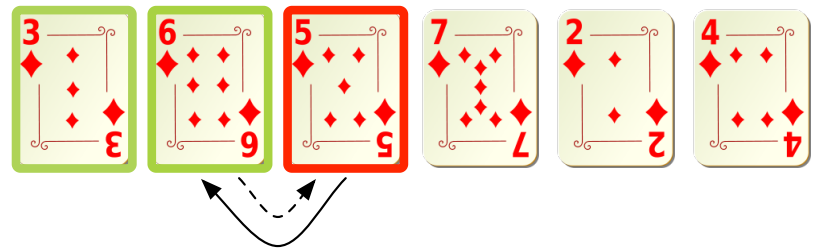
```
for j=1 to länge(A)-1 {
    key = A[j];
    // füge A[j] in sortierte
    // Liste A[0..j-1] ein
    i = j-1;
    while (i >= 0 && A[i] > key) {
       A[i+1] = A[i];
       i = i-1;
    }
    A[i+1] = key;
}
```

Insertion Sort: Ablauf

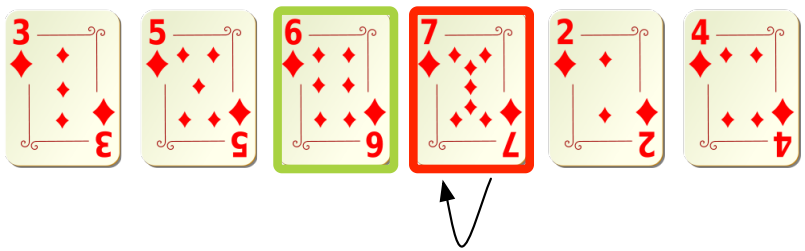
1.



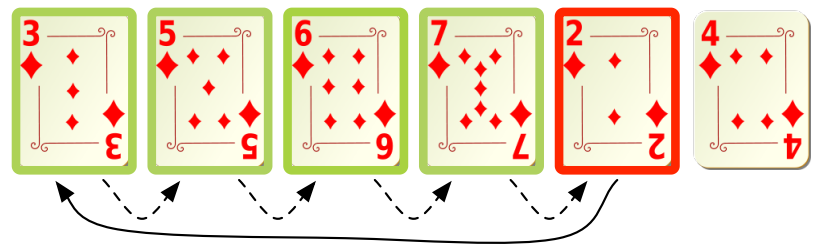
2.



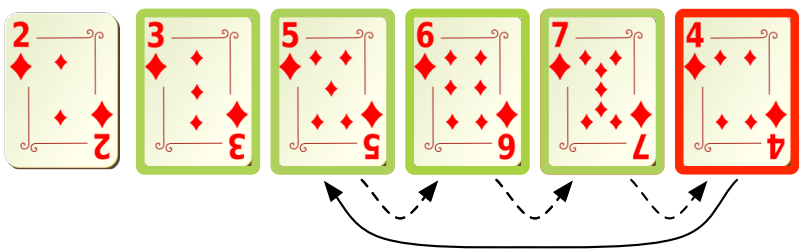
3.



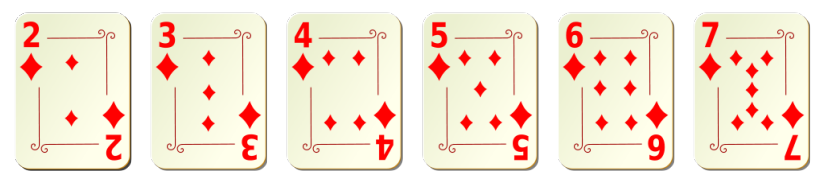
4.



5.



6.



Insertion Sort: Verifikation

Entscheidendes Kriterium: Schleifen-Invariante P der **for** Schleife

P = Teilfeld A[0..j-1] besteht aus den ursprünglich in A[0..j-1] enthaltenen Werten und A[0..j-1] ist geordnet

Prüfe:

1. Anfang j=1: Feld A[0..j-1] enthält nur ein Element A[0], ist sortiert ✓
2. aktuelles Element mit Wert key, die Werte A[j-1], A[j-2], . . . werden jeweils eine Position nach rechts verschoben, bis korrekte Position A[i] gefunden für aktuelles Element, Element wird dort eingefügt → Feld A[0..j-1] sortiert ✓
3. Algorithmus terminiert wenn j==n, also gilt mit voriger Invariante P: A[0..n-1] ist sortiert ✓

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Validation

- Validation: nicht-formaler Nachweis der Korrektheit, etwa durch systematisches Testen

Warum Validation wenn wir Verifikation haben?

- bei Verifikation können Fehler unterlaufen sein
- Verifikation zu aufwendig oder nicht mehr möglich für größere bzw. komplexe Programme
- der verwendete Compiler/Rechner kann fehlerhaft sein

- aber! Testen kann nur Anwesenheit von Fehlern zeigen, nicht die Abwesenheit!

Fehlerarten

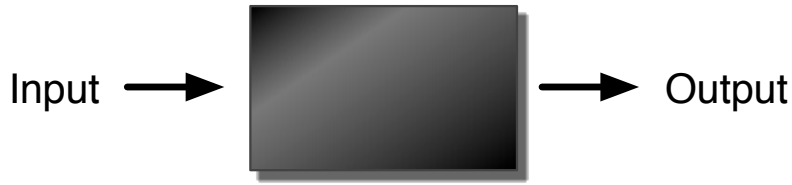
Mögliche Fehlerarten (nur ein Auszug!)

- Denkfehler bei der Konstruktion des Algorithmus
  - z.B. Annahme falscher Rahmenbedingungen
  - oder Problemstellung misverstanden
- Rechenfehler bei der Verifikation
  - z.B. bei Invarianten-Prüfung falsche Schlussfolgerung gezogen
- Tipp- oder Programmierfehler bei Umsetzung auf Computer
  - z.B. Index-Zählung bei 1 statt 0 angefangen
  - oder Ziffer 1 statt Buchstabe l getippt
- Fehler im Compiler, Betriebssystem oder Rechner selbst
  - kein Compiler ist fehlerfrei
  - kein Betriebssystem ist fehlerfrei
  - kein Rechner ist fehlerfrei

Validation durch systematische Tests

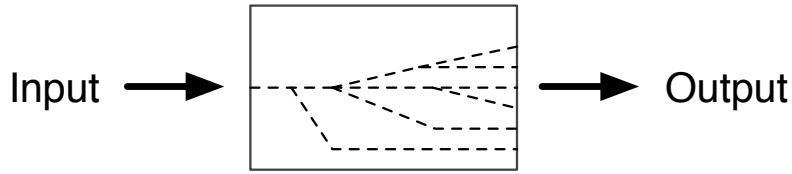
- Systematische Tests: systematische "Jagd" auf mögliche Fehler im Programm
- verschiedene Test-Typen stehen zur Verfügung:
  - Blackbox-Test
  - Whitebox-Test
  - Regressions-Test
  - Integrations-Test

Blackbox-Test



- Programm als "Blackbox" betrachten
  - interne Struktur unbekannt
  - nur Eingabe und Ausgabe bekannt
  - sowie Dokumentation was als Eingabe erlaubt ist
- systematischer Test auf mögliche Eingabedaten (und ob korrektes Ergebnis geliefert wird) $\rightarrow$ datenbezogenes Testen
- Repräsentative Werteanalyse:
  - Klassen von Eingabedaten (z.B. negative ganze Zahlen)
  - Auswahl von Repräsentanten dieser Klasse zum Test
- Grenzwertanalyse:
  - Eingabedaten haben meist Grenzwerte (z.B. Zahlen von -128 bis 127)
  - direkte Tests auf die Grenzwerte und auch darüber hinaus

Whitebox-Test

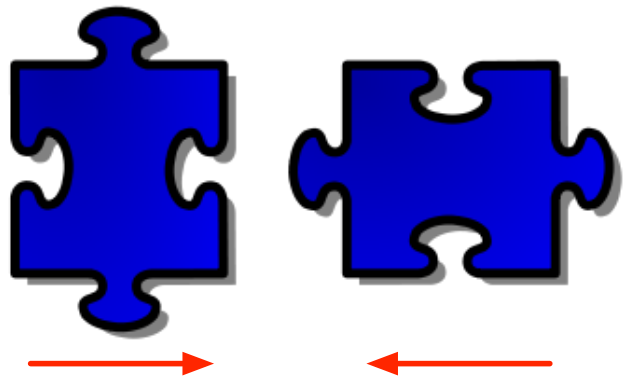


- Programm als "Whitebox" betrachten
  - innere Struktur bekannt
- systematischer Test auf innere Struktur des Programms, d.h. das alle Programmteile ausgeführt werden → ablaufbezogenes Testen
- Test-Varianten (Auszug):
  - Ausführung sämtlicher Programmwege inkl. Kombinationen (meist unpraktikabel!)
  - Alle Schleifen müssen nicht nur einmal, sondern zweimal durchlaufen werden
  - Alle Anweisungen sollen mindestens einmal ausgeführt werden

Regressions-Test

- Annahme: mehrere Versionen des Programms (mit gleicher Funktionalität!) sind verfügbar
- systematischer Test über längere Zeit der verschiedenen Versionen mit gleicher Eingabe
  - ist Ausgabe unterschiedlich, ist eine der Versionen fehlerhaft
- insbesondere zur Aufdeckung von bereits behobenen Fehlern, die wieder auftauchen (sog. "Regressionen")

Integrations-Test



- große Softwaresysteme bestehen aus Modulen (natürlich separat getestet!)
- systematischer Test der Zusammenarbeit der Module, schrittweise zusammengefügt zum Gesamtsystem
  - z.B. mittels Blackbox- und Whitebox-Tests

Testen in der Praxis

- "poor man's testing" mit `assert` in C++ (siehe `assert.h`)
  - für Debug-Modus:

    assert(length >= 0 && "oops, negative Länge geht nicht");
  - Prüfung deaktiviert im Release-Modus mittels Makro `NDEBUG`
- hiermit läßt sich auch auf Vor- und Nachbedingungen testen
- Unit Test Frameworks: Gerüste/Systeme zur Vereinfachung der Implementation von Tests
  - z.B. Microsoft Unit Testing Framework in Visual Studio
  - oder Google C++ Testing Framework
  - oder Boost Unit Testing Framework

Fehler in der Praxis

- fehlertolerantes Programmieren
  - Fehler direkt im Programm feststellen
  - möglicherweise sogar korrigieren
  - Beispiel: "keine Verbindung zum Internet, stellen Sie zuerst Internet-Verbindung her, bevor Programm weiter ausgeführt werden kann"
- fehlerpräventives Programmieren
  - Verwendung geeigneter Programmiersprache mit statischem Typsystem (z.B. C++)
  - Meiden von expliziter Typumwandlung (type casts)
  - Verwendung von sicheren Konstrukten (z.B. Smartpointer statt Zeiger)
  - Aktivierung von allen Compiler-Warnungen (z.B. Clang ist hier besonders hilfreich)
- Tests bereits in Spezifikations-Phase entwickeln (test-driven development)

Zusammenfassung

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation