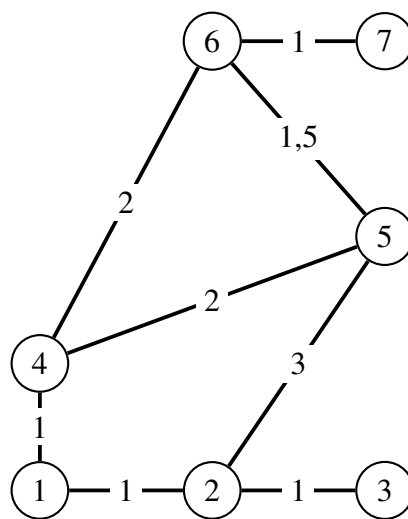


## Algorithmen und Datenstrukturen

### Aufgabe 1     Dijkstra

Gegeben sei der nachfolgende gewichtete Graph.



- Welche Bedingung muss der Graph erfüllen, damit der Dijkstra-Algorithmus anwendbar ist?
- Wenden Sie den Dijkstra-Algorithmus auf den nachfolgenden gewichteten Graphen an. Als Start Knoten wählen wir den Knoten 1. Geben Sie in jedem Schritt die Distanzen und Vorgänger zu jedem Knoten an.
- In der Praxis unterscheidet man das *SSSP*-Problem (*single source shortest path*) und das *SPSP*-Problem (*single pair shortest path*). Welches Problem wird durch den Dijkstra-Algorithmus gelöst?
- Nun betrachten wir das *SPSP*-Problem, zwischen zwei Knoten  $v, w \in V$ . Zu welchem Zeitpunkt darf man den Dijkstra-Algorithmus abbrechen, wenn man nur an dem kürzesten Pfad zwischen  $v$  und  $w$  interessiert ist?

### Aufgabe 2     Dijkstra und A\*

Um die Suche im Falle des *SPSP*-Problem zu beschleunigen, kann man zielgerichteter in Richtung des Zielknotens suchen. Die Idee ist dabei, die Kosten des bisherigen Pfades zu ergänzen um eine Heuristik  $h[v]$ , also eine Abschätzung, wie weit das Ziel vom Knoten  $v$  entfernt ist.

Im Fall einer Suche auf einer Landkarte könnte man etwa die direkte Distanz (die Luftlinie) zum Ziel benutzen, und dann den Pfad optimieren, der in der Summe aus Pfadlänge und Abschätzung optimal ist.

Diese Variante des Dijkstra-Algorithmus nennt man A\*-Suche. An welcher Stelle müsste man diese Heuristik in den Dijkstra integrieren?

**Aufgabe 3 Prim-Algorithmus**

Gegeben sei folgende Adjazenzmatrix. Berechnen Sie den minimalen Spannbaum unter Verwendung des Prim-Algorithmuses. Geben Sie alle Zustände, sowohl des Baumes als auch der Priority-Queue  $Q$ , an. Als Starknoten wählen wir  $c$ !

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	$\infty$	1	5	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$
$b$	1	$\infty$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	11
$c$	5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	$\infty$
$d$	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	9	2	$\infty$
$e$	7	$\infty$	6	9	$\infty$	8	$\infty$
$f$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	8	$\infty$	12
$g$	$\infty$	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$

**Aufgabe 4 Strassen-Algorithmus**

Berechnen Sie das folgenden Matrix-Matrix-Produkt. Verwenden Sie hierzu **einen** Divide & Conquer Schritt des Strassen-Algorithmus. Zählen Sie, die Anzahl an Multiplikationen und Additionen/Subtraktionen und vergleichen Sie diese mit der Anzahl der Operationen im Falle der „normalen“ Implementierung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 5 Lineare Gleichungssysteme**

a) Lösen Sie das angegebene Gleichungssystem  $Ax = b$  und geben Sie die Inverse  $A^{-1}$  an!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Inverse  $A^{-1}$  und die Determinante  $\det(A)$ !

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & -2.0 & 1.0 \\ 1.0 & -4.0 & -2.0 \\ 10.0 & -5.0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Inverse  $A^{-1}$  mittels Gauss-Jordan Elimination.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6 Matrix-Zerlegungen**

In den folgenden Aufgaben können Sie einen Taschenrechner verwenden.

a) Definieren die Matrizen  $P$ ,  $L$  und  $U$  eine gültige LUP-Zerlegung von  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 20 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Definiert die Matrix  $L$  eine gültige Cholesky-Zerlegung von  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.3063 & 0.1776 \\ 0.3063 & 1.0938 & 0.3397 \\ 0.1776 & 0.3397 & 0.1760 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.3063 & 1.0000 & 0 \\ 0.1776 & 0.2853 & -0.2511 \end{pmatrix}$$

c) Definieren die Matrizen  $Q$  und  $R$  eine gültige QR-Zerlegung von  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 23 & 37 \\ 34 & 57 & -1 \\ 68 & 15 & 88 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 18 \\ 0 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

d) Definieren die Matrizen  $U$ ,  $\Sigma$  und  $V$  eine gültige SVD-Zerlegung von  $A$ ?

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 13 & -11 & -1 & -1 \\ -6 & 12 & 18 & -12 \\ 22 & 38 & -2 & 3.5 \\ 46 & 3.5 & 26 & 38 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -6 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$