Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2015

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Notizen

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Notizen

Beispiele für Fehler I

- 1996: Explosion der Ariane 5 Rakete mit 4 Satelliten an Bord
  - Schaden: ca. 500 Millionen Dollar
  - Ursache: Wert der horizontalen Geschwindigkeit von 64 Bit Floating Point Zahl (`double`) konvertiert auf 16 Bit Ganzzahl (`signed short`)

    → Zahl grösser als $2^{15} = 32768$ → overflow

    → Zusammenbruch des Lenksystems

    → Backup-Rechner verwendet gleiches Programm, selber Fehler

    → Selbstzerstörung nach 36.7 Sekunden Flugzeit

    Annahme dass Rakete nie so schnell fliegen wird...

Notizen

Beispiele für Fehler II

- 1995: Ausfall Stellwerk Hamburg-Altona
  - Schaden: 2 Tage kein Schienenverkehr in Hamburg-Altona, 2 Monate Notfahrplan
  - Ursache: Stack-Overflow

    → neues zentrales, computerisiertes Stellwerk für 62.6 Millionen D-Mark von Siemens

    → 3.5kB Stack für Stellbefehle (als sequentielle Liste)

    → zu klein schon für normalen Verkehr → overflow

    → Fehlerbehandlungsroutine fehlerhaft → Endlosschleife

Notizen

Beispiele für Fehler III

- 1985 – 1987: Therac-25 Maschine zur Strahlentherapie
  - Schaden: 3 Todesfälle durch Strahlenüberdosis
  - Ursache: "race condition" in Software-Sperre für Strahl

    (race condition: Ergebnis einer Operation hängt vom zeitlichen Verhalten der Einzeloperationen ab, siehe Multitasking)

    → Overflow in 8 Bit Test-Zähler zusammen mit Benutzereingabe deaktivieren Software-Sperre für Strahl

    → unkontrollierte Bestrahlung mit bis zu 100-facher Dosis

    → 40 - 200 Gray Dosis statt 2 Gray, ab 10 Gray tödlich

    → mind. 3 Personen sterben an Strahlenüberdosis

Notizen

Beispiele für Fehler IV

- 2011 – 2014: Heartbleed Fehler in OpenSSL
  - Schaden: unklar (potentiell Millionen von kompromittierten Accounts)
  - Ursache: Buffer-Overflow in verschlüsselter Kommunikation

    → keine Prüfung der Grösse eines angeforderten Arrays

    → durch eigene Speicherverwaltung in OpenSSL gelangen sensitive Daten an potentielle Angreifer (Passwörter, Zertifikate)

    → viele Webservices betroffen (von Amazon bis Wikipedia)

    → viele Geräte betroffen (von Android Jelly Bean bis Cisco Router)

Notizen

Relative Korrektheit

Die Korrektheit eines Algorithmus bezieht sich immer auf die Spezifikation dessen, was er tun soll.

- Korrektheit ist relativ
- Algorithmus kann nicht an sich als korrekt bewiesen werden, sondern nur in Bezug auf Spezifikation

Spezifikation: eindeutige Festlegung der berechneten Funktion bzw. des Terminierungsverhaltens einer Softwarekomponente

Notizen

Nachweis der Korrektheit

Nachweis der Korrektheit durch

- Verifikation: formaler, mathematischer Beweis, dass Algorithmus korrekt bezüglich formaler Spezifikation
  - erfordert Formalisierung der Algorithmensprache und Spezifikation
- Validation: nicht-formaler Nachweis der Korrektheit etwa durch systematisches Testen
  - in der Regel kein 100%ig sicherer Nachweis der Korrektheit!

Notizen

Verifikation vs. Validation

E.W. Dijkstra (1930 - 2002):

"Testing shows the presence, not the absence of bugs"

Analogie zur Mathematik:

- Spezifikation: entspricht Satz
- Verifikation: Beweis des Satzes
- Validation: Ausprobieren an Beispielwerten

Notizen

Programm heute

1 Einführung

2 Grundlagen von Algorithmen

3 Grundlagen von Datenstrukturen

4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Notizen

Vor- und Nachbedingungen

Vor- und Nachbedingungen: Methode zur Spezifikation von gewünschten Eigenschaften von Algorithmen

{VOR} ANW {NACH}

- {VOR}: Aussage über Zustand vor Ausführung von ANW
- {NACH}: Aussage über Zustand nach Ausführung von ANW

Bedeutung:

- Gilt die Vorbedingung {VOR} unmittelbar vor Ausführung von ANW
- und terminiert ANW
- so gilt die Nachbedingung {NACH} unmittelbar nach Ausführung von ANW

Notizen

Vor- und Nachbedingung

{VOR} ANW {NACH}

Sonderfälle:

- terminiert ANW nicht, so ist Aussage immer wahr
  - egal wie {VOR}, {NACH} aussehen
- gilt {VOR} nicht, so ist Aussage auch immer wahr
  - egal ob ANW terminiert oder ob {NACH} gilt

Notizen

Vor- und Nachbedingung: Beispiele I

- Aussage

  $\{X{==}0\}$ X = X+1 $\{X{==}1\}$

  ist wahr
- Aussage

  $\{\texttt{true}\}$ X = Y $\{X{==}Y\}$

  ist wahr
- Aussage

  $\{Y{==}a\}$ X = Y $\{X{==}a \wedge Y{==}a\}$

  ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$

Notizen

Vor- und Nachbedingung: Beispiele II

- Aussage

  $\{X{==}a \wedge Y{==}b \wedge a{\neq}b\}$ X = Y; Y = X $\{X{==}b \wedge Y{==}a\}$

  ist falsch für alle $a, b \in \mathbb{Z}$!
  (nach erstem Schritt haben X, Y beide Wert b - typischer Fehler bei Wertetausch!)
- Aussage

  $\{X{==}a \wedge Y{==}b\}$ Z = X; X = Y; Y = Z $\{X{==}b \wedge Y{==}a\}$

  ist wahr für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ (korrekter Wertetausch mit Hilfsvariable Z)

Notizen

Vor- und Nachbedingung: Beispiele III

- Aussage

  $$\{\texttt{false}\}\ \text{ANW}\ \{\text{NACH}\}$$

  ist wahr für alle ANW und NACH, da Vorbedingung falsch
- Aussage

  $$\{\texttt{true}\}\ \text{ANW}\ \{\texttt{false}\}$$

  ist genau dann wahr, wenn ANW nicht terminiert
- Aussage

  $$\{X{=}{=}a\}\ \textbf{while}\ X \neq 0\ \{\ X = X\text{-}1\ \}\ \{X{=}{=}0\}$$

  ist wahr für alle $a \in \mathbb{Z}$
  (auch für $a < 0$, da dann while-Schleife nicht terminiert!)

Notizen

Partielle Korrektheit

Partielle Korrektheit

Ein Programm mit Anweisungen ANW sowie Vorbedingung {VOR} und Nachbedingung {NACH} heißt partiell korrekt bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

$$\{\text{VOR}\}\ \text{ANW}\ \{\text{NACH}\}$$

wahr ist.

Das Programm heißt total korrekt bezüglich VOR, NACH genau dann, wenn

- es partiell korrekt ist bezüglich VOR, NACH ist und
- ANW immer dann terminiert, wenn VOR gilt.

Notizen

Bausteine von Algorithmen

Wiederholung: Bausteine von Algorithmen

- Elementarer Verarbeitungsschritt (z.B. Zuweisung an Variable)
- Sequenz (elementare Schritte nacheinander)
- Bedingter Verarbeitungsschritt (z.B. if/else)
- Wiederholung (z.B. while-Schleife)

Notizen

Korrektheit von Anweisungstypen I

- Elementarer Verarbeitungsschritt α

  $$\{\text{VOR}\}\ \alpha\ \{\text{NACH}\}$$

- Sequenz $\alpha; \beta$

  $$\{\text{VOR}\}\ \alpha; \beta\ \{\text{NACH}\}$$

  wird gezeigt mittels Zwischenbedingung MITTE, also

  $$\{\text{VOR}\}\ \alpha\ \{\text{MITTE}\}$$

  und

  $$\{\text{MITTE}\}\ \beta\ \{\text{NACH}\}$$

Notizen

Korrektheit von Anweisungstypen II

- Bedingter Verarbeitungsschritt

$$\{\text{VOR}\}\ \textbf{if}\ (\text{B})\ \{\ \alpha\ \}\ \text{else}\ \{\ \beta\ \}\ \{\text{NACH}\}$$

  wird gezeigt mittels

$$\{\text{VOR} \wedge \text{B}\}\ \alpha\ \{\text{NACH}\}$$

  und

$$\{\text{VOR} \wedge \neg\text{B}\}\ \beta\ \{\text{NACH}\}$$

  $\rightarrow$ zeige also dass NACH gilt, egal welcher Zweig ausgeführt wird!

Notizen

Korrektheit von Anweisungstypen III

- Wiederholung

  {VOR}
  while (B) { β }
  {NACH}

  wird gezeigt mittels Schleifeninvariante P:

  1. prüfe, daß VOR $\Rightarrow$ P
     (Vorbedingung garantiert Schleifeninvariante bei Eintritt in Schleife)
  2. prüfe, daß

$$\{\text{P} \wedge \text{B}\}\ \beta\ \{\text{P}\}$$

     (wenn Schleife durchlaufen, bleibt Schleifeninvariante wahr)
  3. prüfe, daß $\{\text{P} \wedge \neg\text{B}\} \Rightarrow \text{NACH}$
     (Nachbedingung muß nach Verlassen der Schleife gelten)

Notizen

Verifikation: Beispiel I

Gauss'sche Summenformel

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
   sum = 0;
   i = 0;
   while (i < n) {
      i = i + 1;
      sum = sum + i;
   }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```


Notizen

Verifikation: Beispiel II

Sequenz mit Zwischenbedingung:

```
{ n > 0 }
   sum = 0;
{ n > 0 ∧ sum == 0 }
   i = 0;
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
```

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
   sum = 0;
   i = 0;
   while (i < n) {
      i = i + 1;
      sum = sum + i;
   }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```


Notizen

Verifikation: Beispiel III

Wiederholung mit Invariante:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
  while (i < n) {
    i = i + 1;
    sum = sum + i;
  }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Passende Invariante P?

P = (sum == i*(i+1)/2 ∧ i <= n)

Algorithmus:

```
{ n > 0 }
  sum = 0;
  i = 0;
  while (i < n) {
    i = i + 1;
    sum = sum + i;
  }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```


Notizen

Verifikation: Beispiel IV

Prüfe:

1. {VOR} ⇒ {P}

   es ist i==0, also i<=n, und sum==0*1/2==0 ✓

2. {P ∧ B} β {P}

   es ist i<n, also nach i=i+1 immer noch i<=n , und für sum gilt sum=$\frac{i(i+1)}{2}$+(i+1)==$\frac{(i+1)*(i+2)}{2}$ ✓

3. {P ∧ ¬B} ⇒ {NACH}

   es ist P ∧ ¬B ⇔ P ∧ !(i<n)

   ⇔ sum==$\frac{i(i+1)}{2}$ ∧ i<=n ∧ !(i<n)

   ⇔ sum==$\frac{i(i+1)}{2}$ ∧ i==n

   ⇒ sum==$\frac{n(n+1)}{2}$ ✓

Wiederholung mit Invariante:

```
{ n > 0 ∧ sum == 0 ∧ i == 0 }
  while (i < n) {
    i = i + 1;
    sum = sum + i;
  }
{ sum == n*(n+1)/2 }
```

Invariante P:

P = (sum == i*(i+1)/2 ∧ i <= n)

Notizen

Verifikation

- Verifikation ist manuell sehr aufwendig
  - in Praxis daher leider sehr selten eingesetzt
- Vorgang lässt sich weitgehend automatisieren

  → Programm-Verifizierer
  - Programm mit Vor- und Nachbedingungen
  - Schleifen müssen Invarianten haben
  - nur möglich mit eingeschränkten Programmiersprachen z.B. Lightweight Java
  - an der TUM: Programmsystem Isabelle (Informatik) `http://isabelle.in.tum.de`

Notizen

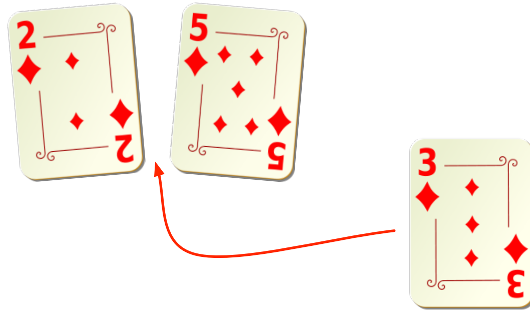
Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Notizen

Insertion Sort

Insertion Sort: Sortieren durch direktes Einfügen



Notizen

Pseudocode von Insertion Sort

Input: Feld A[0..n-1] von n natürlichen Zahlen
Output: Feld A aufsteigend sortiert
InsertionSort(A):

```
for j=1 to länge(A)-1 {
   key = A[j];
   // füge A[j] in sortierte Liste A[0..j-1] ein
   i = j-1;
   while (i >= 0 && A[i] > key) {
      A[i+1] = A[i];
      i = i-1;
   }
   A[i+1] = key;
}
```


Notizen

Insertion Sort: Ablauf

Beispielablauf:

Eingabe: A = 6, 3, 5, 7, 2, 4

j				
key				
i				
A[0..j-1]				

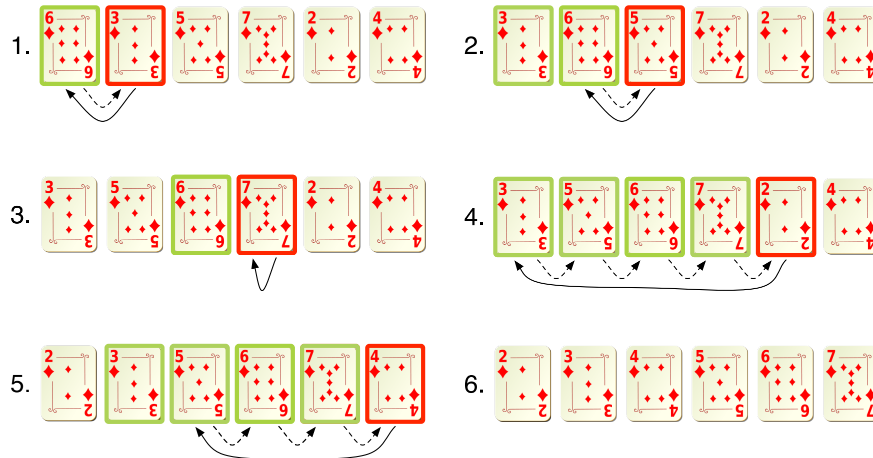
4	2	7	5	3	6

InsertionSort(A):

```
for j=1 to länge(A)-1 {
   key = A[j];
   // füge A[j] in sortierte
   // Liste A[0..j-1] ein
   i = j-1;
   while (i >= 0 && A[i] > key) {
      A[i+1] = A[i];
      i = i-1;
   }
   A[i+1] = key;
}
```

Notizen

Insertion Sort: Ablauf



Notizen

Insertion Sort: Verifikation

Entscheidendes Kriterium: Schleifen-Invariante P der **for** Schleife

P = Teilfeld A[0..j-1] besteht aus den ursprünglich in A[0..j-1] enthaltenen Werten und A[0..j-1] ist geordnet

Prüfe:

1. Anfang j=1: Feld A[0..j-1] enthält nur ein Element A[0], ist sortiert ✓
2. aktuelles Element mit Wert key, die Werte A[j-1], A[j-2], ... werden jeweils eine Position nach rechts verschoben, bis korrekte Position A[i] gefunden für aktuelles Element, Element wird dort eingefügt → Feld A[0..j-1] sortiert ✓
3. Algorithmus terminiert wenn j==n, also gilt mit voriger Invariante P: A[0..n-1] ist sortiert ✓

Notizen

Programm heute

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Notizen

Validation

- Validation: nicht-formaler Nachweis der Korrektheit, etwa durch systematisches Testen

Warum Validation wenn wir Verifikation haben?

- bei Verifikation können Fehler unterlaufen sein
- Verifikation zu aufwendig oder nicht mehr möglich für größere bzw. komplexe Programme
- der verwendete Compiler/Rechner kann fehlerhaft sein

- aber! Testen kann nur Anwesenheit von Fehlern zeigen, nicht die Abwesenheit!

Notizen

Fehlerarten

Mögliche Fehlerarten (nur ein Auszug!)

- Denkfehler bei der Konstruktion des Algorithmus
  - z.B. Annahme falscher Rahmenbedingungen
  - oder Problemstellung misverstanden
- Rechenfehler bei der Verifikation
  - z.B. bei Invarianten-Prüfung falsche Schlussfolgerung gezogen
- Tipp- oder Programmierfehler bei Umsetzung auf Computer
  - z.B. Index-Zählung bei 1 statt 0 angefangen
  - oder Ziffer 1 statt Buchstabe l getippt
- Fehler im Compiler, Betriebssystem oder Rechner selbst
  - kein Compiler ist fehlerfrei
  - kein Betriebssystem ist fehlerfrei
  - kein Rechner ist fehlerfrei

Notizen

Validation durch systematische Tests

- Systematische Tests: systematische "Jagd" auf mögliche Fehler im Programm
- verschiedene Test-Typen stehen zur Verfügung:
    - Blackbox-Test
    - Whitebox-Test
    - Regressions-Test
    - Integrations-Test

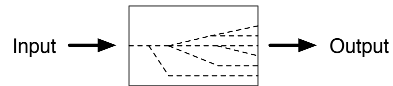
Notizen

Blackbox-Test

- Programm als "Blackbox" betrachten
    - interne Struktur unbekannt
    - nur Eingabe und Ausgabe bekannt
    - sowie Dokumentation was als Eingabe erlaubt ist
- systematischer Test auf mögliche Eingabedaten (und ob korrektes Ergebnis geliefert wird) → datenbezogenes Testen
- Repräsentative Werteanalyse:
    - Klassen von Eingabedaten (z.B. negative ganze Zahlen)
    - Auswahl von Repräsentanten dieser Klasse zum Test
- Grenzwertanalyse:
    - Eingabedaten haben meist Grenzwerte (z.B. Zahlen von -128 bis 127)
    - direkte Tests auf die Grenzwerte und auch darüber hinaus

Notizen

Whitebox-Test



- Programm als "Whitebox" betrachten
  - innere Struktur bekannt
- systematischer Test auf innere Struktur des Programms, d.h. das alle Programmteile ausgeführt werden → ablaufbezogenes Testen
- Test-Varianten (Auszug):
  - Ausführung sämtlicher Programmwege inkl. Kombinationen (meist unpraktikabel!)
  - Alle Schleifen müssen nicht nur einmal, sondern zweimal durchlaufen werden
  - Alle Anweisungen sollen mindestens einmal ausgeführt werden

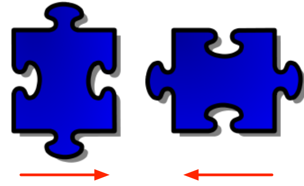
Notizen

Regressions-Test

- Annahme: mehrere Versionen des Programms (mit gleicher Funktionalität!) sind verfügbar
- systematischer Test über längere Zeit der verschiedenen Versionen mit gleicher Eingabe
  - ist Ausgabe unterschiedlich, ist eine der Versionen fehlerhaft
- insbesondere zur Aufdeckung von bereits behobenen Fehlern, die wieder auftauchen (sog. "Regressionen")

Notizen

Integrations-Test



- große Softwaresysteme bestehen aus Modulen (natürlich separat getestet!)
- systematischer Test der Zusammenarbeit der Module, schrittweise zusammengefügt zum Gesamtsystem
  - z.B. mittels Blackbox- und Whitebox-Tests

Notizen

Testen in der Praxis

- "poor man's testing" mit `assert` in C++ (siehe `assert.h`)
  - für Debug-Modus:

    ```
    assert(length >= 0 && "oops, negative Länge geht nicht");
    ```
  - Prüfung deaktiviert im Release-Modus mittels Makro `NDEBUG`
- hiermit läßt sich auch auf Vor- und Nachbedingungen testen
- Unit Test Frameworks: Gerüste/Systeme zur Vereinfachung der Implementation von Tests
  - z.B. Microsoft Unit Testing Framework in Visual Studio
  - oder Google C++ Testing Framework
  - oder Boost Unit Testing Framework

Notizen

Fehler in der Praxis

- fehlertolerantes Programmieren
  - Fehler direkt im Programm feststellen
  - möglicherweise sogar korrigieren
  - Beispiel: “keine Verbindung zum Internet, stellen Sie zuerst Internet-Verbindung her, bevor Programm weiter ausgeführt werden kann”
- fehlerpräventives Programmieren
  - Verwendung geeigneter Programmiersprache mit statischem Typsystem (z.B. C++)
  - Meiden von expliziter Typumwandlung (type casts)
  - Verwendung von sicheren Konstrukten (z.B. Smartpointer statt Zeiger)
  - Aktivierung von allen Compiler-Warnungen (z.B. Clang ist hier besonders hilfreich)
- Tests bereits in Spezifikations-Phase entwickeln (test-driven development)

Notizen

Zusammenfassung

1. Einführung
2. Grundlagen von Algorithmen
3. Grundlagen von Datenstrukturen
4. Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
   - Motivation und Spezifikation
   - Verifikation
   - Beispiel: Insertion Sort
   - Validation

Notizen