

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2015

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen

Bäume

Heaps

Priority Queues

2

Definition Heap

Definition Heap

Sei $G = (V, E)$ ein **Binärbaum** mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch \leq, \geq geordnet.

G heißt **Heap**, falls er folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- G ist **fast vollständig**, d.h. alle Ebenen sind vollständig gefüllt, ausser auf der untersten Ebene, die von links her nur bis zu einem bestimmten Punkt gefüllt sein muss.
- G erfüllt die **Min-Heap-Eigenschaft** bzw. die **Max-Heap-Eigenschaft**, d.h. für alle Knoten $v \in V$, $v \neq w$ gilt
 - Min-Heap: $key(v.vater) \leq key(v)$
 - Max-Heap: $key(v.vater) \geq key(v)$

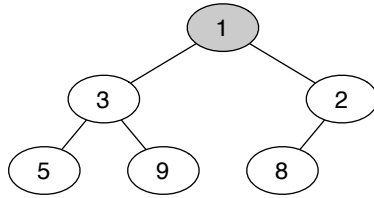
Entsprechend der Heap-Eigenschaft heißt G **Min-Heap** bzw. **Max-Heap**.

Bemerkungen zur Heap Definition

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap.

- wir beschränken uns hier auf **Min-Heaps**, alle Aussagen gelten mit entsprechenden trivialen Änderungen auch für Max-Heaps
- typische **Keys** von Knoten sind Zahlen, z.B. $key : V \rightarrow \mathbb{R}$
 - weiteres Beispiel: Strings als Keys, lexikographisch geordnet
- ein Heap ist **kein** abstrakter Datentyp!

Min-Heap: Beispiel



- Keys sind hier natürliche Zahlen
- Baum ist fast vollständiger Binärbaum
- Baum erfüllt Min-Heap-Eigenschaft:
 - für alle Knoten v (ausser Wurzel) gilt

$$\text{key}(v.\text{vater}) \leq \text{key}(v)$$

5

Heap Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Heap mit Wurzel $w \in V$.

- G als Min-Heap bzw. Max-Heap hat immer Element mit kleinstem bzw. größtem Key in Wurzel w
- G ist aber nicht vollständig sortiert (d.h. Traversierung liefert nicht notwendigerweise vollständig sortierte Folge)
- Ist $|V| = n$, so hat G Höhe von $\Theta(\log n)$
- typische Operation: extrahiere kleinsten (bzw. größten) Key (d.h. Wurzel), kurz: `extractMin` (bzw. `extractMax`)
 - anschließendes Problem: Heap-Eigenschaft wiederherstellen, als Operation: `minHeapify` (bzw. `maxHeapify`)

6

Heap: extractMin

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$.

- Operation `extractMin`:
 - entferne Wurzel w aus Heap G und liefere $\text{key}(w)$ zurück
 - tausche letzten Knoten von G an Stelle von Wurzel
 - stelle Heap-Eigenschaft wieder her mit `minHeapify`

Output: minimaler Key in G

`extractMin(G)`:

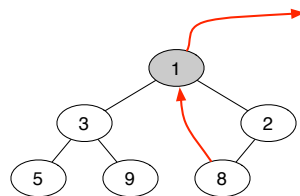
`min = key(w)`;

tausche Inhalt von w mit letztem

Knoten in G ;

`minHeapify(G, w)`;

return `min`;



7

Heap: minHeapify

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$ und $|V| = n$.

- Operation `minHeapify` auf Knoten $v \in V$ zur Wiederherstellung der Min-Heap-Eigenschaft
- **Voraussetzung:** nur Knoten v verletzt Min-Heap-Eigenschaft
- lasse v durch Heap absinken, bis Min-Heap-Eigenschaft wiederhergestellt

Input: Knoten v

`minHeapify(G, v)`:

if (v ist Blatt) **return**;

`knoten` = Minimum (bzgl. key) von v .links und v .rechts;

if ($\text{key}(\text{knoten}) < \text{key}(v)$) {

 tausche Inhalt von `knoten` und v ;

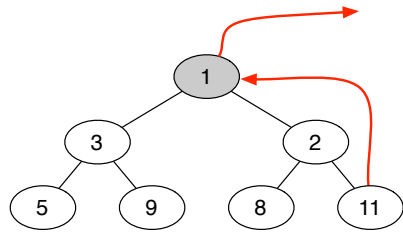
`minHeapify(G, knoten)`;

}

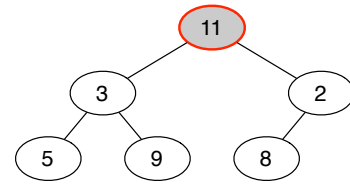
- Komplexität: $O(\log n)$

8

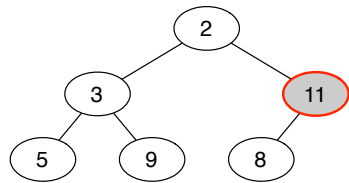
Beispiel extractMin / minHeapify



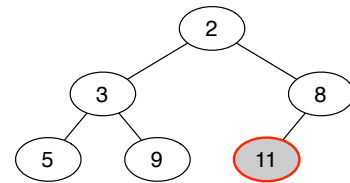
extractMin



minHeapify



minHeapify



minHeapify

9

Heap erzeugen: buildMinHeap

Gegeben sei Knoten-Liste V mit $|V| = n$ und Keys $key(v)$ für $v \in V$.

- wie erzeugt man aus V einen Min-Heap $G = (V, E)$?
 - erzeuge irgendwie fast vollständigen Binärbaum aus V
 - wende **minHeapify** auf alle Knoten $v \in V$ an, von unten nach oben (nicht nötig für unterste Ebene des Baumes!)

Input: Knoten-Liste V

Output: Min-Heap G

buildMinHeap(V):

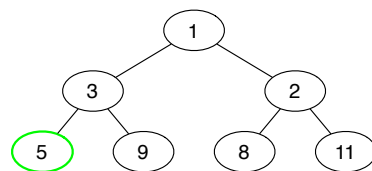
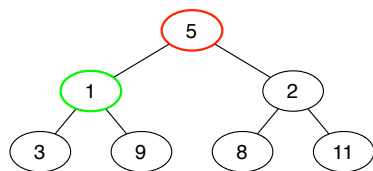
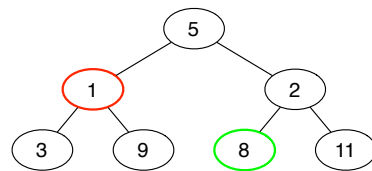
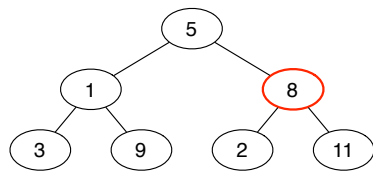
$G =$ erzeuge beliebigen fast vollständigen Binärbaum aus V ;

for each Knoten v in G von unten nach oben {
 minHeapify(G, v);
}

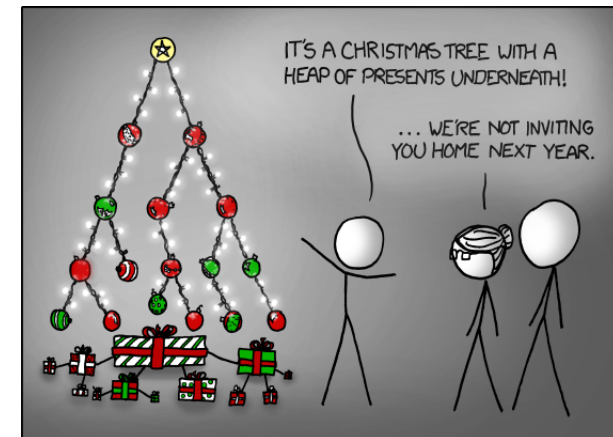
- Komplexität: $O(n)$ (nicht nur $O(n \log n)$!)

10

Beispiel buildMinHeap



11

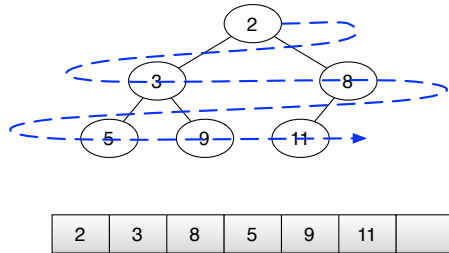


<http://xkcd.com/835/>

12

Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste I

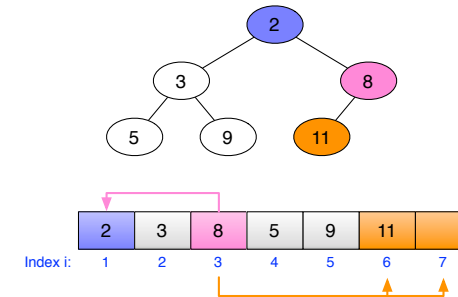
- vollständiger Binärbaum Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten
 - speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in sequentieller Liste (Array)
 - maximale Grösse von Array: $2^{k+1} - 1$
- Beispiel fast vollständiger Binärbaum:



13

Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste II

- Wurzel: an Position 1
 - Knoten an Position i :
 - Vater-Knoten an Position $\lfloor i/2 \rfloor$
 - linkes Kind an Position $2i$
 - rechtes Kind an Position $2i + 1$
- Pseudocode:
- **vater**(i): return $\lfloor i/2 \rfloor$;
 - **links**(i): return $2i$;
 - **rechts**(i): return $2i + 1$;



14

HeapSort

- Sortieren mit Heap
- Idee:
 - Heap erstellen mit **buildMinHeap**
 - wiederhole **extractMin** bis Heap leer
- mit Heap direkt im Eingabefeld:

Input: Feld $A[1..n]$ der Länge n

HeapSort(A):

buildMinHeap(A);

for $i=n$ **downto** 2 {

 tausche $A[1]$ mit $A[i]$;

$A.length = A.length - 1$;

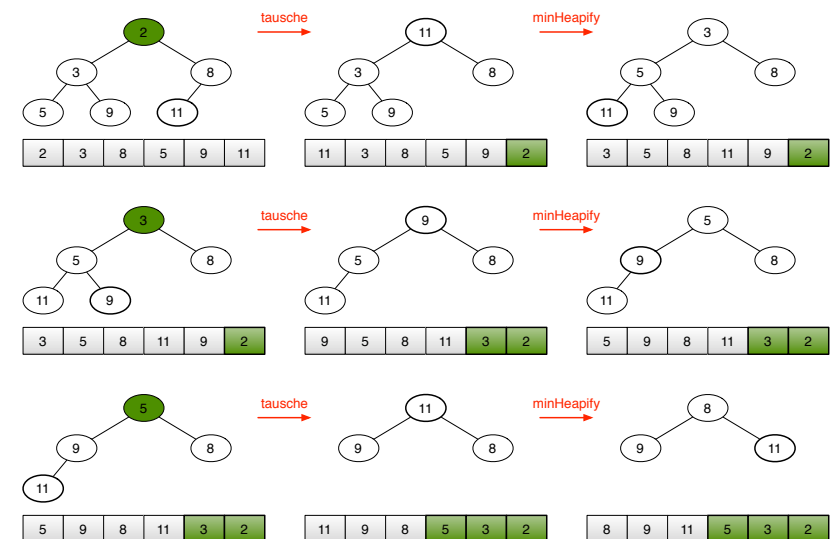
minHeapify($A, 1$);

 }

- **min-Heap** sortiert in **absteigender** Reihenfolge
- **max-Heap** sortiert in **aufsteigender** Reihenfolge

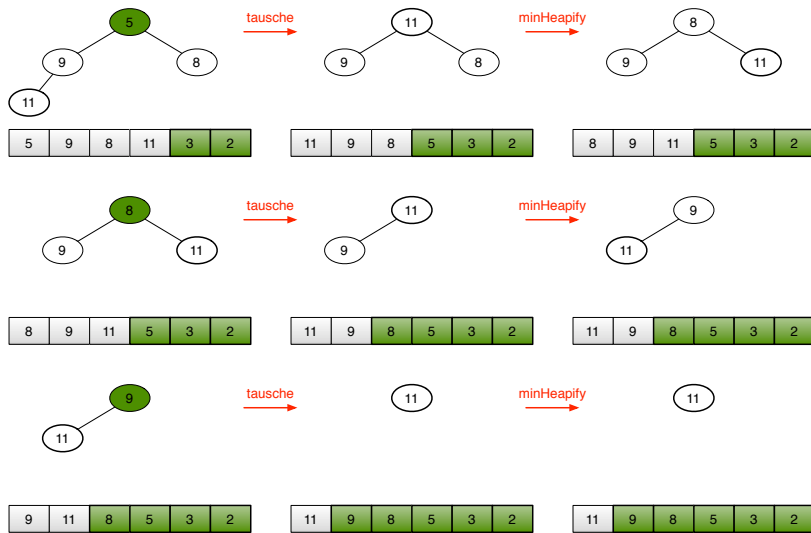
15

HeapSort: Beispiel I



16

HeapSort: Beispiel II



17

HeapSort Eigenschaften

- sortiert in-place
- Komplexität $O(n \log n)$
 - besser als QuickSort im worst case!
 - in Praxis aber erst bei grossem n
- nicht stabil

18

Stabilität von Sortierverfahren

Stabilität

Ein Sortierverfahren heißt **stabil**, wenn es die Reihenfolge von gleichrangigen Elementen bewahrt.

Beispiel:

- unsortierte Liste:

5 2 3 4 3 (blau vor rot)

- sortierte Liste (stabil):

2 3 3 4 5 (blau vor rot)

- sortiere Liste (nicht stabil):

2 3 3 4 5 (rot vor blau)

19

Sortier-Algorithmen illustriert

Animationen der Sortier-Algorithmen:
<http://www.sorting-algorithms.com>

20

Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
 - in-place, stabil
 - Komplexität $O(n^2)$, best case: $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität $O(n^2)$
- MergeSort
 - benötigt zusätzlichen Speicher, stabil
 - Komplexität $O(n \log n)$
- QuickSort
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität im Mittel $O(n \log n)$, worst case: $O(n^2)$
- HeapSort
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität $O(n \log n)$

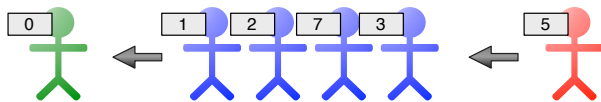
21

Definition Priority Queue

Definition Priority Queue

Eine Priority Queue ist ein **abstrakter Datentyp**. Sie beschreibt einen **Queue-artigen** Datentyp für eine Menge von Elementen mit zugeordnetem **Schlüssel** und unterstützt die Operationen

- Einfügen von Element mit Schlüssel in die Queue,
- Entfernen von Element mit **minimalem Schlüssel** aus der Queue,
- Ansehen des Elementes mit **minimalem Schlüssel** in der Queue.



- entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Element mit **maximalem Schlüssel**

23

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen
Bäume
Heaps
Priority Queues

22

Definition Priority Queue (abstrakter)

Priority Queue P ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- $\text{insert}(P, x)$ wobei x ein Element
- $\text{extractMin}(P)$ liefert ein Element
- $\text{minimum}(P)$ liefert ein Element
- $\text{isEmpty}(P)$ liefert **true** or **false**
- initialize liefert eine Priority Queue Instanz

und mit Bedingungen

- $\text{isEmpty}(\text{initialize}()) == \text{true}$
- $\text{isEmpty}(\text{insert}(P, x)) == \text{false}$
- $\text{minimum}(\text{initialize}())$ ist nicht erlaubt (Fehler)
- $\text{extractMin}(\text{initialize}())$ ist nicht erlaubt (Fehler)

(Fortsetzung nächste Folie)

24

Definition Priority Queue (abstrakter)

Fortsetzung Bedingungen Priority Queue P:

- `minimum(insert(P, x))` liefert zurück
 - falls `P == initialize()`, dann `x`
 - sonst: `min(x, minimum(P))`
- `extractMin(insert(P, x))`
 - falls `x == minimum(insert(P, x))`, dann liefert es `x` zurück und hinterlässt `P` im Originalzustand
 - sonst liefert es `extractMin(P)` zurück und hinterlässt `P` im Zustand `insert(extractMin(P), x)`

(entsprechend für die Priority Queue mit maximalem Schlüssel)

Priority Queue: Implementationen I

- mit sortierten Feldern (als sequentielle oder verkettete Liste)
 - `insert` legt Element an richtiger Stelle in sortierter Liste ab mit $O(n)$ Komplexität
 - `minimum`, `extractMin` als $O(1)$ Operation
- mit unsortierten Feldern (als sequentielle oder verkettete Liste)
 - `insert` hängt Element einfach an Ende an mit $O(1)$
 - `minimum`, `extractMin` suchen nach Element mit kleinstem Schlüssel mit $O(n)$

→ beides **nicht sonderlich effizient** (je nach Abfolge der Operationen aber ok)

25

26

Priority Queue: Implementationen II

Priority Queue P als **min-Heap** $G = (V, E)$ mit Wurzel w :

- `minimum` von P liefert **Wurzel w** zurück
 - Komplexität $O(1)$
- `extractMin` von P entspricht `extractMin` von G
 - Komplexität $O(\log n)$
- `insert` von P erfordert ein klein wenig Extra-Aufwand:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A), Element x

insert(A, x):

füge Element x an Ende von Heap A ein;

i = Index von letztem Element;

while (($i \neq 1$) && ($A[\mathbf{vater}(i)] > A[i]$)) {

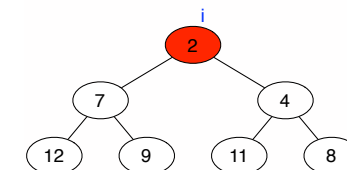
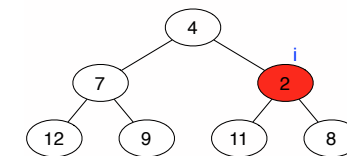
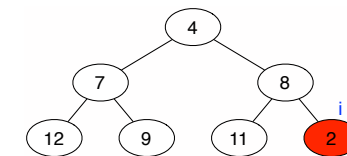
 tausche $A[i]$ mit $A[\mathbf{vater}(i)]$;

$i = \mathbf{vater}(i)$;

}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: insert Beispiel



27

28

Priority Queue: dynamisches Anpassen von Keys

- manchmal ändert sich der "Priorität" von Schlüsseln
 - Beispiel Algorithmen dafür in Kapitel 9!
- Operation `decreaseKey` verringert Schlüssel von bestimmten Element

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element mit Index i, neuer Schlüsselwert wert

decreaseKey(A, i, wert):

if (wert > A[i]) **error** "neuer Schlüssel größer als alter!"

A[i] = wert;

while ((i != 1) && (A[vater(i)] > A[i])) {

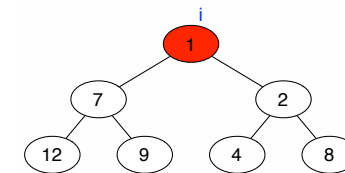
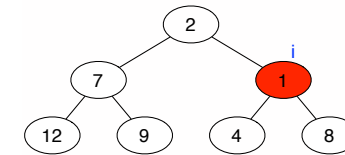
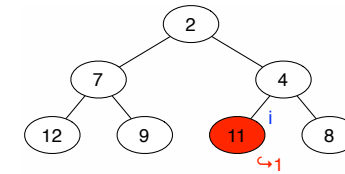
 tausche A[i] mit A[vater(i)];

 i = vater(i);

}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: decreaseKey Beispiel



29

30

Priority Queue: decreaseKey / insert

- mit Operation `decreaseKey` läßt sich `insert` anders formulieren:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element x

insert(A, x):

A.length = A.length + 1;

A[A.length] = ∞ ;

decreaseKey(A, A.length, x);

Priority Queue: Ausblick

- Priority Queue mit `Heap`: insert und decreaseKey sind $O(\log n)$
- dies läßt sich mit `Fibonacci-Heap` bzw. `Radix-Heap` verbessern auf (amortisiert) $O(1)$

→ Effiziente Algorithmen in Informatik

31

32

- mit **Priority Queues** lassen sich **Sortier-Algorithmen** implementieren
- **Schema:**
 - alle Elemente in Priority Queue **einfügen**
 - der Reihe nach alle Elemente mit **extractMin** / **extractMax** entfernen
- **Beispiele:**
 - Priority Queue mit Heap: **HeapSort**
 - Priority Queue mit sortierter sequentieller Liste: **Insertion Sort**
 - Priority Queue mit unsortierter sequentieller Liste: **Selection Sort**

- ⑦ **Fortgeschrittene Datenstrukturen**
 - Graphen
 - Bäume
 - Heaps
 - Priority Queues