

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2015

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche

- Binäre Suche

- Binäre Suchbäume

- Balancierte Suchbäume

Such-Algorithmen

Gegeben sei eine Menge M von Objekten. Ein **Such-Algorithmus** sucht in M nach Mustern oder nach Objekten mit bestimmten Eigenschaften.

Beispiele:

- Suche von Adresse von Person in Telefonbuch
- Suche nach Webseite mit Google Search
- Suche nach Produkt auf Amazon
- Suche nach ähnlichen Mustern: Viren-Scanner
- Suche nach Mustern: Bilderkennung
- Suche nach Tumoren in medizinischen Bildern von Patienten

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- **einfachster Such-Algorithmus:** Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch genannt: **Lineare Suche**
- **Algorithmus:**

Input: Array A[1..n] mit Schlüsseln, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

linearSearch(A, k):

```
i = 1;
while ( (A[i] != k) && (i ≤ n) ) {
    i = i + 1;
}
if (i ≤ n) return i; // fündig geworden
else return 0; // nichts gefunden
```

- auch anwendbar für verkettete Listen

Lineare Suche: Komplexität

5	7	3	9	11	2
---	---	---	---	----	---

Laufzeit $T(n)$ von `linearSearch`:

- **best-case**: sofort gefunden, $T(n) = 1$, d.h. $T(n) = O(1)$
- **worst-case**: alles durchsuchen, $T(n) = n$, d.h. $T(n) = O(n)$
- **im Mittel**: Annahme jede Anordnung der Such-Schlüssel ist gleich wahrscheinlich:

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$$

d.h. $T(n) = O(n)$

- einfacher Algorithmus, aber nicht besonders effizient

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Binäre Suche

2	3	5	7	9	11
---	---	---	---	---	----

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- falls häufiger gesucht wird: Array A **vorsortieren!** $O(n \log n)$
- Such-Algorithmus mittels **Divide & Conquer**
Algorithmen-Muster:
 - **Divide:** vergleiche mittleres Element mit gesuchtem
 - **Rekursion:** falls kleiner, Rekursion auf linker Hälfte
 - **Rekursion:** falls grösser, Rekursion auf rechter Hälfte
 - **Conquer:** falls gleich, liefere Ergebnis

Binäre Suche: Algorithmus rekursiv

Input: Array $A[1..n]$ sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
low, high: unterer/oberer Index von aktueller Array-Hälfte

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

binarySearch($A, k, low, high$):

if ($low > high$) **return** 0; // nichts gefunden

middle = $\lfloor (low + high) / 2 \rfloor$;

if ($A[middle] == k$) **return** middle; // fündig geworden

if ($A[middle] > k$)

return **binarySearch**($A, k, low, middle-1$);

else

return **binarySearch**($A, k, middle+1, high$);

- erster Aufruf mit **binarySearch**($A, k, 1, n$)

Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array $A[1..n]$ sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

binarySearchIterative(A, k):

low = 1;

high = n;

while (low <= high) {

middle = $\lfloor (low + high) / 2 \rfloor$;

if ($A[middle] == k$) **return** middle; // fündig geworden

if ($A[middle] > k$)

high = middle - 1;

else

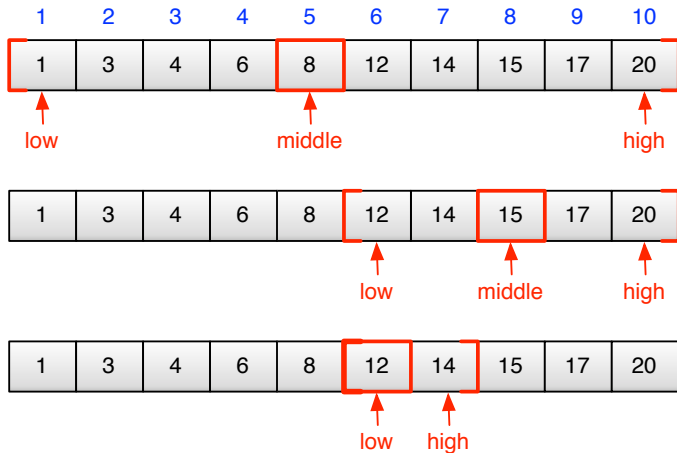
low = middle + 1;

}

return 0; // nichts gefunden

Binäre Suche: Beispiel

- Gesucht: Schlüssel 12



Binäre Suche: Komplexität

- Komplexität: $O(\log n)$
 - errechnet z.B. via Rekursionsbaum wie bei MergeSort
- Beispiel-Laufzeiten:

Algorithmus	$n = 10$	$n = 1000$	$n = 10^6$
Lineare Suche ($n/2$)	≈ 5	≈ 500	≈ 500.000
Binäre Suche ($\log_2 n$)	≈ 3.3	≈ 9.9	≈ 19.9

- sehr effizienter Such-Algorithmus!
- falls sich Daten oft ändern, muss jeweils neu sortiert werden
 - besser: Suchbäume

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Binärer Suchbaum

Definition binärer Suchbaum

Sei $G = (V, E)$ ein **Binärbaum** mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch \leq, \geq geordnet.

G heißt **binärer Suchbaum**, falls für alle **inneren Knoten** $v \in V$ gilt

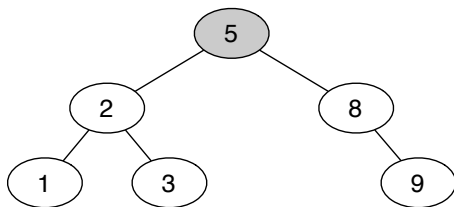
- für alle Knoten x im **linken Teilbaum** $v.left$ gilt

$$key(x) \leq key(v)$$

- für alle Knoten y im **rechten Teilbaum** $v.right$ gilt

$$key(y) \geq key(v)$$

Binärer Suchbaum: Beispiel



- binärer Baum muss **nicht vollständig** sein!
- Repräsentation üblicherweise mit verketteter Liste (geht aber auch als sequentielle Liste)

Binärer Suchbaum: Operationen

Operationen auf binärem Suchbaum:

- **Suchen:** finde Element mit Schlüssel k
- **Minimum/Maximum:** finde Element mit minimalem/
maximalem Schlüssel
- **Einfügen:** füge Element zum Suchbaum hinzu
- **Löschen:** entferne Element aus Suchbaum

Binärer Suchbaum: Suchen (rekursiv)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

search(v , k):

```
if ( $v == \text{null}$ ) return null; // hier gibt es nichts!
```

```
if ( $\text{key}(v) == k$ ) return  $v$ ; // fündig geworden!
```

```
if ( $k < \text{key}(v)$ )
```

```
    search( $v.\text{left}$ ,  $k$ );
```

```
else
```

```
    search( $v.\text{right}$ ,  $k$ );
```

- erster Aufruf mit **search**(w , k)
- falls v kein linkes/rechtes Kind hat, ist das durch null markiert

Binärer Suchbaum: Suchen (iterativ)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

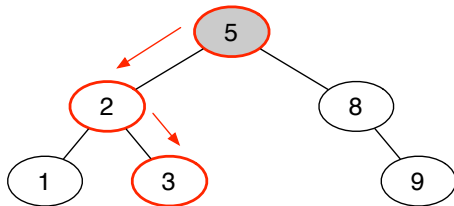
searchIterative(v , k):

```
while ( ( $v \neq \text{null}$ ) && ( $\text{key}(v) \neq k$ ) ) {  
  if ( $k < \text{key}(v)$ )  
     $v = v.\text{left};$   
  else  
     $v = v.\text{right};$   
}  
return  $v;$ 
```

- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Suchen

- **Beispiel:** suche Schlüssel 3



Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum

Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

Output: Knoten mit **minimalem** Schlüssel

minimum(v):

```
while ( $v.left \neq \text{null}$ )  
     $v = v.left$ ;  
return  $v$ ;
```

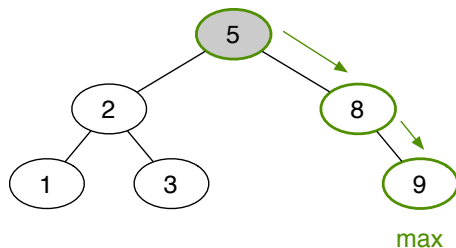
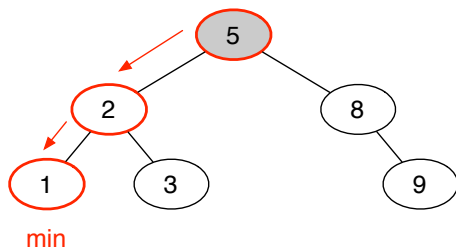
Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

Output: Knoten mit **maximalem** Schlüssel

maximum(v):

```
while ( $v.right \neq \text{null}$ )  
     $v = v.right$ ;  
return  $v$ ;
```

Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum



- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Einfügen

Input: Wurzel v des Baumes, x einzufügendes Element

insert(v, x):

```
if ( $v == \text{null}$ ) { // Baum leer
```

```
     $v = x$ ; return;
```

```
}
```

```
while ( $v \neq \text{null}$ ) {
```

```
    hilfsKnoten =  $v$ ;
```

```
    if ( $\text{key}(x) < \text{key}(v)$ )
```

```
         $v = v.\text{left}$ ;
```

```
    else
```

```
         $v = v.\text{right}$ ;
```

```
}
```

```
 $x.\text{vater} = \text{hilfsKnoten}$ ;
```

```
if ( $\text{key}(x) < \text{key}(\text{hilfsKnoten})$ )
```

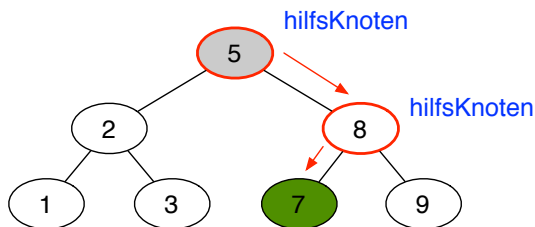
```
     $\text{hilfsKnoten}.\text{left} = x$ ;
```

```
else
```

```
     $\text{hilfsKnoten}.\text{right} = x$ ;
```

Binärer Suchbaum: Einfügen

- Einfügen von Knoten mit Schlüssel 7:



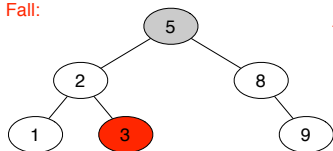
- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Löschen

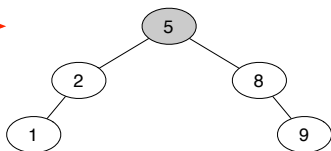
- Löschen von Knoten x in Suchbaum ist etwas komplizierter
- Drei Fälle:
 - ① x ist Blatt: einfach entfernen
 - ② x hat nur ein Kind: setze Kind an Stelle von x
 - ③ x hat zwei Kinder: setze **minimales** Element von **rechtem** Teilbaum an Stelle von x
(alternativ: maximales Element von linkem Teilbaum)
- Komplexität: $O(h)$, wobei h **Höhe** von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Löschen

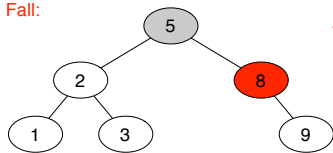
1. Fall:



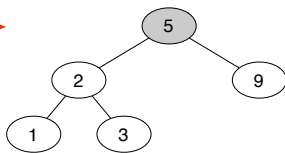
erase →



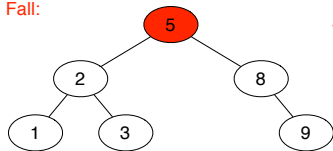
2. Fall:



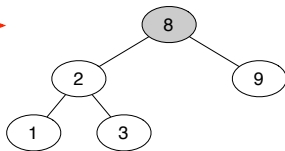
erase →



3. Fall:



erase →



Binärer Suchbaum: Löschen

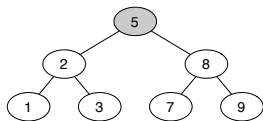
Input: Wurzel v des Baumes, x zu löschendes Element

erase(v, x):

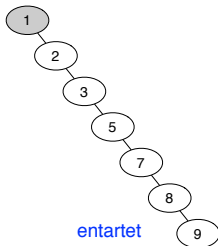
```
if (x ist Blatt) { // 1. Fall
  if (x ist linkes Kind) x.vater.left = null;
  else x.vater.right = null;
} else { // 2. Fall
  if (x.left == null) {
    if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.right;
    else x.vater.right = x.right;
  } else {
    if (x.right == null) {
      if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.left;
      else x.vater.right = x.left;
    } else { // 3. Fall
      kind = minimum(x.right);
      ersetze x durch kind;
    }
  }
}
```

Binärer Suchbaum: Effizienz

- Suchbäume mit n Knoten sind sehr effizient
 - aber nur wenn sie ausgeglichen (“balanciert”) sind!
- best-case Komplexität: $O(\log n)$
- worst-case Komplexität: $O(n)$



ausgeglichen



entartet

- Ausweg: automatisch balancierte Suchbäume
(z.B. AVL Bäume, Rot-Schwarz Bäume, B-Bäume)

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

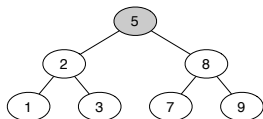
Lineare Suche

Binäre Suche

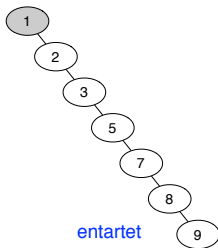
Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Entartete Suchbäume



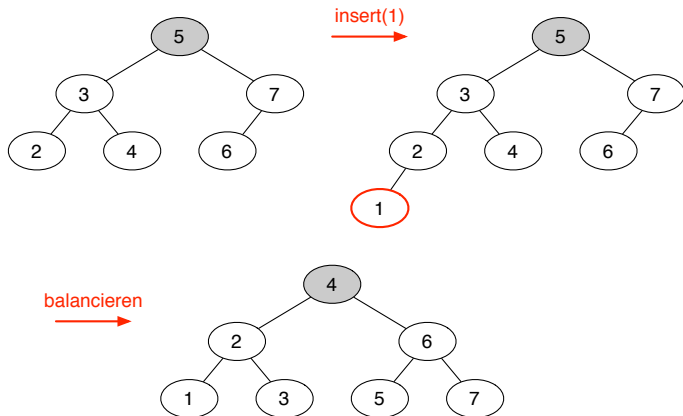
ausgeglichen



entartet

- Wie können Suchbäume **entarten**?
 - Beispiel: einfügen aus sortierter Liste
- **Erwünscht**: Suchbäume, die immer **ausgeglichen** (balanciert) bleiben
 - **AVL-Bäume**, Rot-Schwarz-Bäume, B-Bäume etc.

Beispiel: Balancieren von Suchbaum



- hier müssen zum Balancieren **alle** Knoten bewegt werden → Effizienz-Problem

Ansätze für balancierte Suchbäume

- Binärbaum und gleichzeitig balanciert ist ineffizient
- Idee: Aufweichen eines der beiden Kriterien!

- **Abschwächung** des Kriteriums **balanciert**
 - Beispiel: AVL-Bäume

- **Abschwächung** des Kriteriums **Binärbaum**
 - Mehrweg-Bäume, Beispiel: B-Bäume
 - mehrere Verzweigungen kodiert als Binärbaum, Beispiel: Rot-Schwarz-Bäume

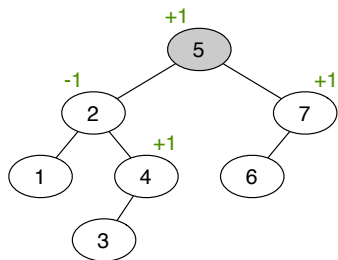
Definition AVL-Baum

Definition AVL-Baum

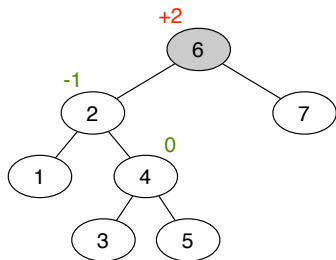
Ein binärer Suchbaum $G = (V, E)$ mit Wurzel $w \in V$ heißt **AVL-Baum**, falls er die **AVL-Bedingung** erfüllt:

- für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt: Höhe von linkem und rechtem Teilbaum von v unterscheidet sich maximal um 1.
- benannt nach G.M. Adelson-Velskii und E.M. Landis (russische Mathematiker)
- AVL-Bedingung nur für Wurzel w ist nicht ausreichend
 - beide Teilbäume der Wurzel können entartet sein

AVL-Baum: Beispiel



AVL-Baum



kein AVL-Baum!

- linkes Beispiel: AVL-Bedingung überall erfüllt
- rechtes Beispiel: AVL-Bedingung in Wurzel verletzt

AVL Baum: Operationen

- Operationen `search`, `minimum`, `maximum` unverändert von binärem Suchbaum
- Operationen `insert`, `erase` müssen verändert werden, damit die AVL-Bedingung erhalten wird

AVL-Baum: Einfügen

Einfüge-Operation bei AVL-Baum:

- **insert** wie in binärem Suchbaum
- nun kann AVL-Bedingung verletzt sein:
 - $balance = \text{height}(\textit{left}) - \text{height}(\textit{right})$
 - AVL-Bedingung: $balance \in \{-1, 0, +1\}$
 - nach **insert**: $balance \in \{-2, -1, 0, 1, +2\}$
- reparieren der AVL-Bedingung mittels **Rotation** und **Doppelrotation**

Einfügen / Verletzung AVL-Bedingung

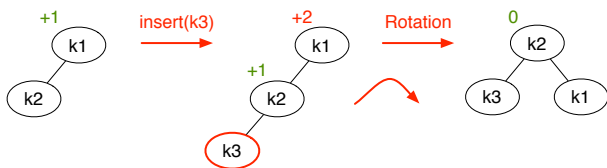
Fallunterscheidung Verletzung AVL-Bedingung bei Einfügen:

- ① Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes
- ② Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes
- ③ Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes
- ④ Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes

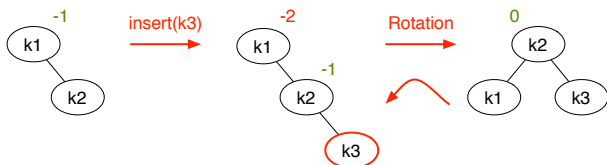
1 und 4 sind symmetrische Fälle, sowie 2 und 3

AVL-Baum: Rotation

- ① Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes:

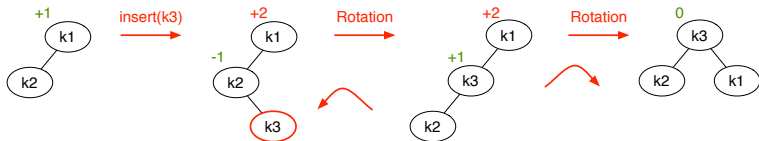


- ④ Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes:

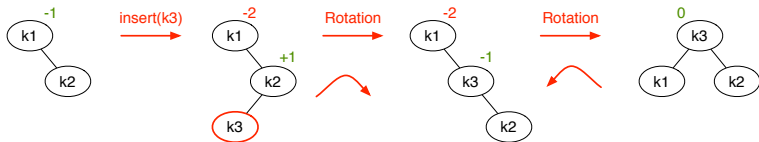


AVL-Baum: Doppelrotation

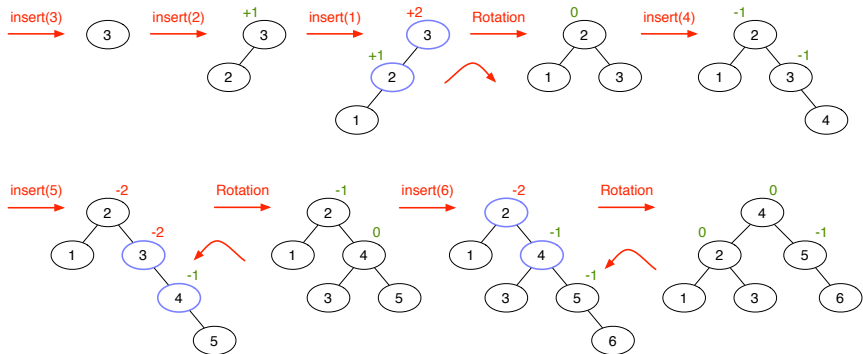
2 Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes:



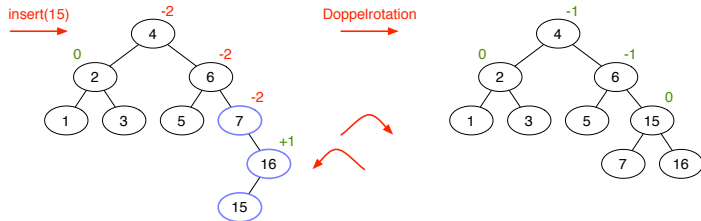
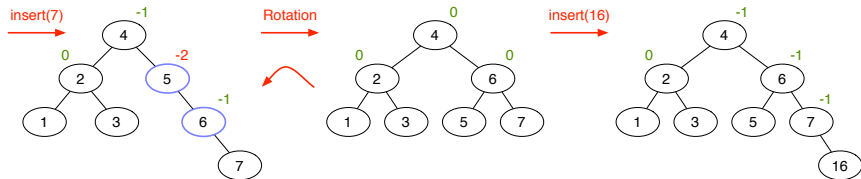
3 Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes:



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz I



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz II

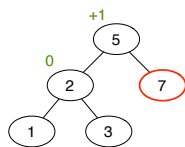


AVL-Baum: Löschen

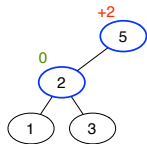
Löschen-Operation bei AVL-Baum:

- `erase` wie in binärem Suchbaum
- Verletzung der AVL-Bedingung in Teilbäumen durch Rotationen reparieren
- bei jedem Eltern-Knoten wieder AVL-Bedingungen reparieren, bis hin zur Wurzel

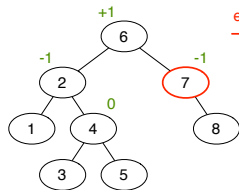
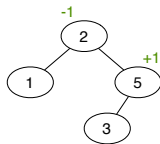
AVL-Baum: Beispiel-Sequenz III



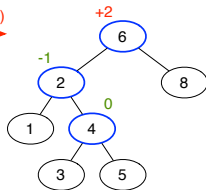
erase(7)



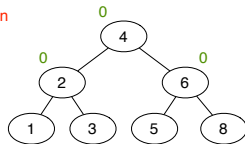
Rotation



erase(7)



Doppelrotation



Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche

- Binäre Suche

- Binäre Suchbäume

- Balancierte Suchbäume