

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2015

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

Kürzeste Pfade

Minimaler Spannbaum

2

Definition Kürzester Pfad

Sei $G = (V, E)$ Graph mit **Gewichtsfunktion**

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

- das **Gewicht eines Pfades** $p = (v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k$, ist die Summe der Gewichte aller seiner Kanten

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

- das **Gewicht des kürzesten Pfades** zwischen zwei Knoten u und v ($u, v \in V$) ist

$$w_{min}(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : p \text{ Pfad von } u \text{ nach } v\} & \text{Pfad existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

3

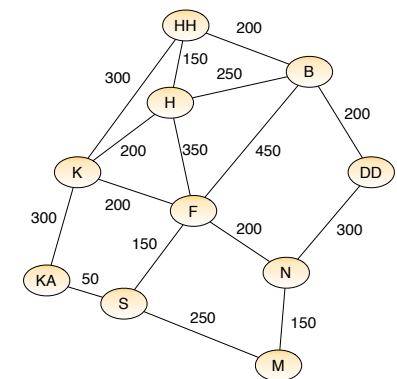
Beispiel: kürzeste Pfade

Navigationssystem:

- Knoten sind Großstädte
- Kanten sind Autobahnverbindung
- Gewichte der Kanten sind (grobe) Entfernungen in Kilometern

Fragestellungen:

- kürzester Weg von M nach HH?
- alle kürzesten Verbindungen von M zu anderen Städten?
- alle kürzesten Verbindungen zwischen allen Städten?



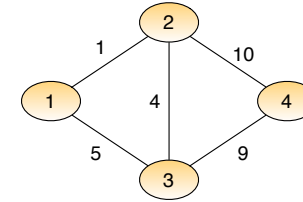
4

Kürzeste Pfade: Algorithmen

Sei $G = (V, E)$ gewichteter, gerichteter Graph.

- Kürzeste Pfade in Graphen von fixem **Startknoten s** :
 - **Dijkstra-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - **A*-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Komplexität: mit guter Heuristik, besser als Dijkstra
 - **Bellman-Ford-Algorithmus** (auch negative Gewichte)
Komplexität: $O(|V| * |E|)$
- Kürzeste Pfade in Graphen zwischen **allen Knotenpaaren**:
 - **Floyd-Warshall-Algorithmus** (all pairs shortest path)
basiert auf dynamischer Programmierung
Komplexität: $\Theta(|V|^3)$

Gegenbeispiel Greedy-Algorithmus

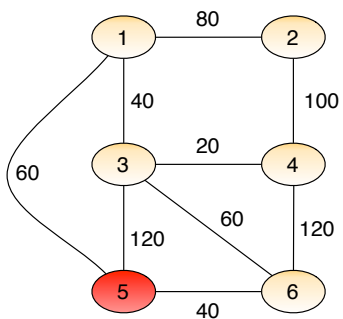


- **Greedy-Schema**: füge kürzeste Kante zu Pfad (so dass kein Zyklus entsteht)
 - Starte bei Knoten 1
 - füge Kante (1,2) hinzu (Kosten 1)
 - füge Kante (2,3) hinzu (Kosten 4)
 - füge Kante (3,4) hinzu (Kosten 9)
- Problem: Pfad von 1 nach 4 hat Kosten 14, kürzester Pfad hat aber Kosten 11!

5

6

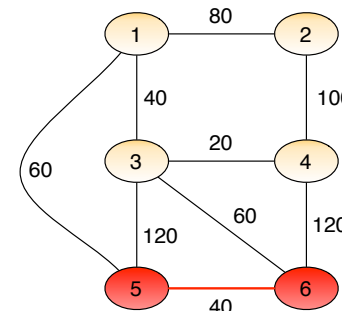
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



Kürzester Pfad		Länge
5		0

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
1	5	60
3	5	120
6	5	40

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



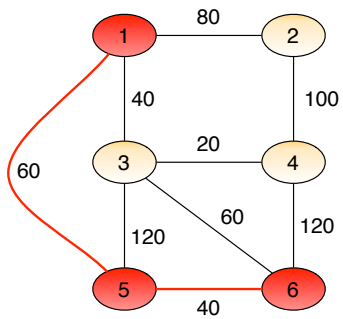
Kürzester Pfad		Länge
5		0
5,6		40

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
1	5	60
3	5,6	100
4	5,6	160

7

8

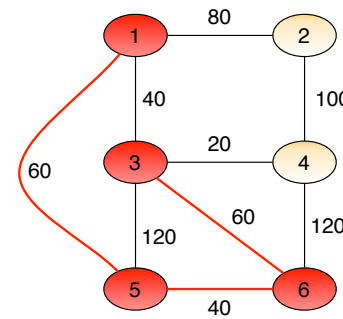
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 3



Kürzester Pfad		Länge
5		0
5,6		40
5,1		60

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
3	5,6	100
4	5,6	160

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 4



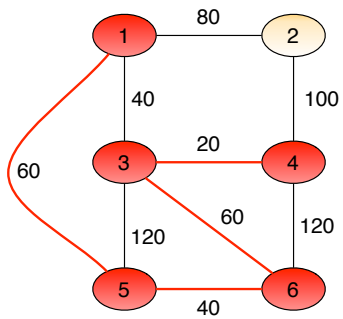
Kürzester Pfad		Länge
5		0
5,6		40
5,1		60
5,6,3		100

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
4	5,6,3	120

9

10

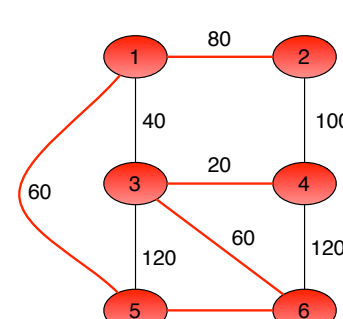
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 5



Kürzester Pfad		Länge
5		0
5,6		40
5,1		60
5,6,3		100
5,6,3,4		120

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 6



Kürzester Pfad		Länge
5		0
5,6		40
5,1		60
5,6,3		100
5,6,3,4		120
5,1,2		140

fertig

11

12

Dijkstra-Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Gewicht $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahlen).

- Startknoten $s \in V$ für kürzesten Pfad
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im kürzesten Pfad $pred$
- jeder Knoten hat Markierung d
 - Distanz (bzgl. Gewicht) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Algorithmus: Dijkstra

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste $pred$, Distanz-Markierung d

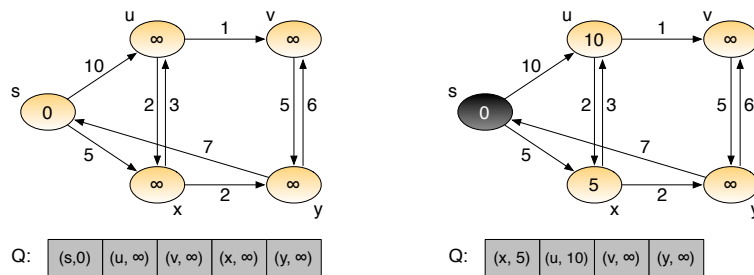
Dijkstra(G, w, s):

```

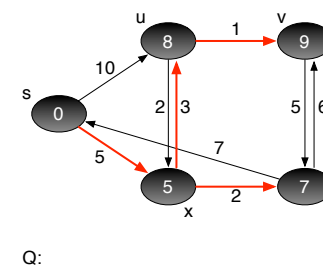
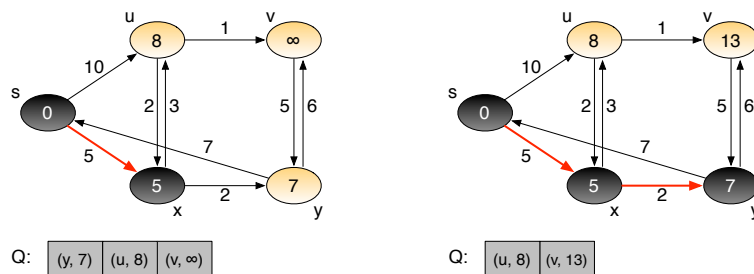
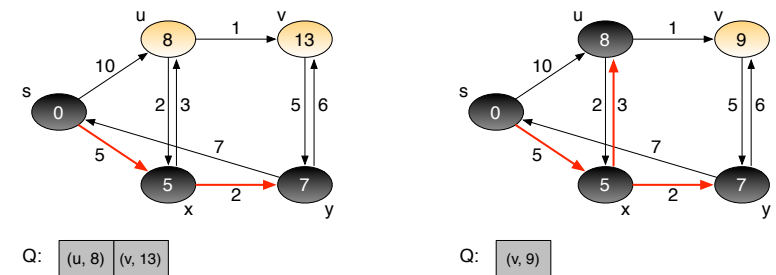
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
     $pred[v] = null$ ;  $d[v] = \infty$ ;
}
 $d[s] = 0$ ;
 $Q =$  Priority Queue mit Elementen  $V$ , Schlüsseln  $d$ ;
while ( ! $Q.isEmpty()$  ) {
     $u = Q.extractMin()$ ;
    for each ( $v \in adj[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
        if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
             $pred[v] = u$ ;  $d[v] = d[u] + w(u, v)$ ;
             $Q.decreaseKey(v, d[v])$ ;
        }
    }
}

```

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



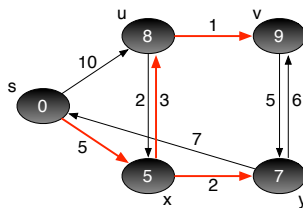
Dijkstra-Algorithmus

Nach Ausführung von **Dijkstra**(G, w, s) gilt für $v \in V$:

- $d[v]$ = Gewicht $w_{min}(s, v)$ des kürzesten Pfades von s zu v
- $pred[v]$ = Vorgängerknoten
- Kürzester Pfad von s zu v :

$pred[v], pred[pred[v]], \dots, s$

Beispiel:



17

Dijkstra: Komplexität

- Komplexität des Dijkstra Algorithmus hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

19

Dijkstra: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-15: Ausführung $|V|$ mal
 - Zeile 7: $O(\log |V|)$
 - Zeile 8-14: Ausführung inkl. äußerer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
 - Zeile 12: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

Dijkstra(G, w, s):

```

1  for each (Knoten  $v \in V$ ) {
2       $pred[v] = null; d[v] = \infty;$ 
3  }
4   $d[s] = 0;$ 
5   $Q = \text{Priority Queue}(V, d);$ 
6  while ( !Q.isEmpty() ) {
7       $u = Q.extractMin();$ 
8      for each ( $v \in adj[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
9          if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
10              $pred[v] = u;$ 
11              $d[v] = d[u] + w(u, v);$ 
12              $Q.decreaseKey(v, d[v]);$ 
13         }
14     }
15 }
```

18

Dijkstra: Korrektheit

(nur Beweisidee, dies ist kein formaler Beweis!)

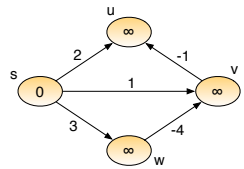
Annahme: bisherige Iterationen waren korrekt, bisher bearbeitete Knoten: $X \subset V$

- nächster Iterationsschritt nimmt kürzeste direkte Verbindung von Knoten $x \in X$ zu noch nicht bearbeitetem Knoten $y \in V \setminus X$ hinzu
- $d[y]$ ist nun $d[x] + w(x, y)$
- jeder andere Pfad zu y hat entweder
 - eine Kante, die aus X heraus geht und ist damit nicht kürzer als (x, y)
 - mehrere Kanten, und ist damit nicht kürzer als $d[y]$, da die Kanten positives Gewicht haben

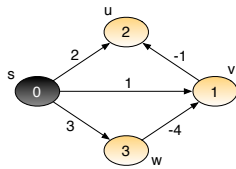
Entscheidende Annahme: Kanten haben positives Gewicht!

20

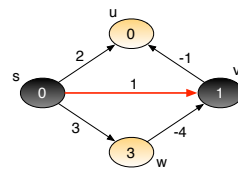
Dijkstra: Negativ-Beispiel



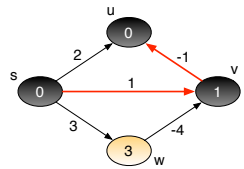
Q: (s,0) (u,∞) (v,∞) (w,∞)



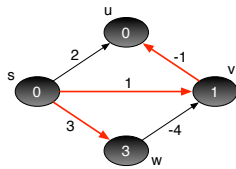
Q: (v,1) (u,2) (w,3)



Q: (u,0) (w,3)



Q: (w,3)



Q:

21

Dijkstra: Anwendungen

Dijkstra ist einer der am häufigsten verwendete Graph-Algorithmen

Beispiele:

- Routenplanung in GIS (Geographic Information System)
 - Navigationssystem im Auto
 - Maps Applikation (Google, Bing, Apple etc.)
 - Routen mit Flugzeugen, Bahn usw.
- Routing Protokolle für IP Netzwerke
 - z.B. Open Shortest Path First
- Pfadplanung von Robotern, UAV/Dronen, etc.
- Segmentierung von medizinischen Bilddaten

22

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

Kürzeste Pfade

Minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Spannbaum:** Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
- **minimaler Spannbaum:** Spannbaum G' mit minimalem Gewicht

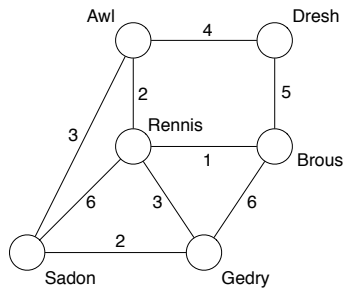
$$w_{G'} = \sum_{(x,y) \in E'} w(x,y)$$

23

24

Minimaler Spannbaum: Beispiel

Beispiel: 6 (virtuelle) Städte und Kosten für Strassenbau dazwischen (in Million Euro):

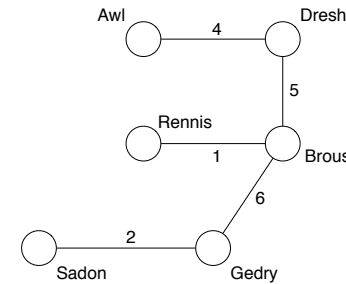


Problem: Strassenbau mit minimalen Kosten, so daß alle Städte verbunden sind (direkt oder über andere Städte)

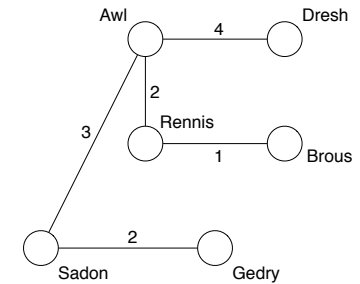
Lösung: minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum: Beispiel 2

Mögliche Lösungen:



Gewicht: 18



Gewicht: 12

25

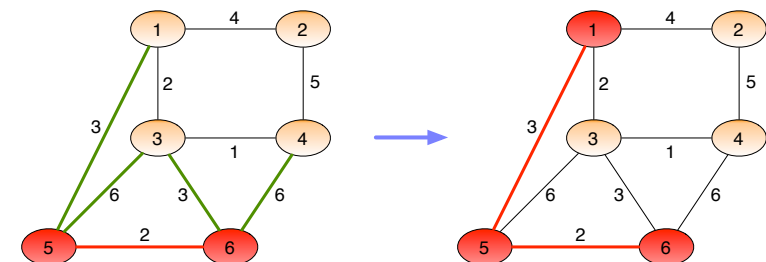
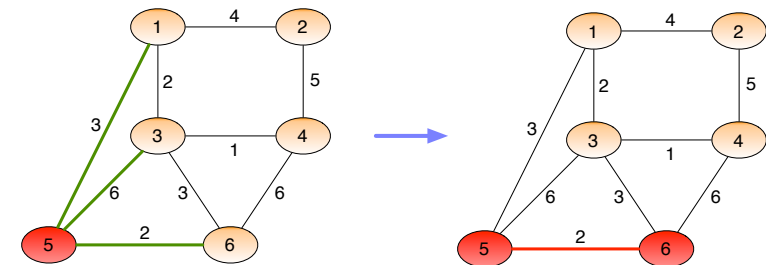
26

Minimaler Spannbaum: Algorithmen

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Minimaler Spannbaum von G :
 - Algorithmus von Kruskal: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - Algorithmus von Prim: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - viele Varianten davon als parallele Algorithmen

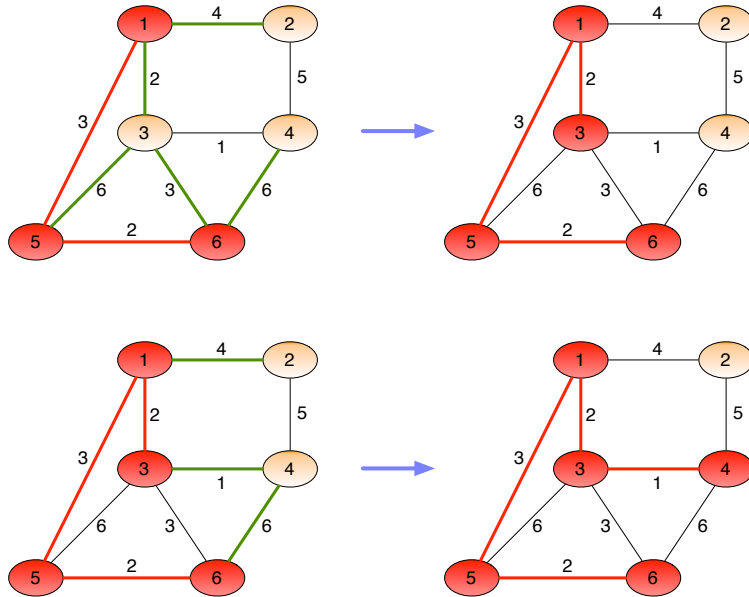
Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 1



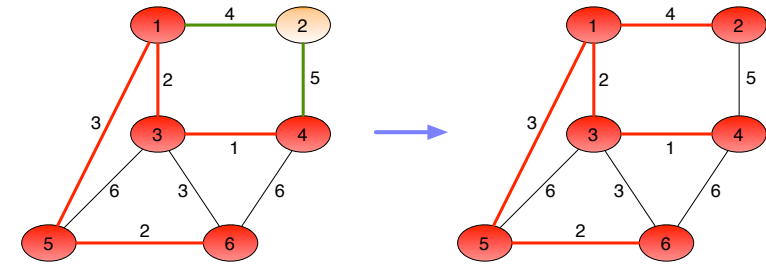
27

28

Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 2



Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 3



Beobachtungen:

- Zwischenlösungen von Prim Algorithmus sind Bäume
- es werden öfters mehrere Kanten zum selben Knoten betrachtet (s. oben)
 - Vereinfachung: betrachte nur Kante mit minimalem Gewicht

29

30

Prim Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Startknoten $s \in V$ für minimalen Spannbaum
- Graph repräsentiert als Adjazenzliste `adj`
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im Spannbaum `pred`
- jeder Knoten hat Markierung `g`
 - kleinstes Gewicht um Knoten mit aktuellem Spannbaum zu verbinden
- Hilfsmittel: Priority Queue `Q`

Algorithmus: Prim

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste `pred`

Prim(G, w, s):

for each (Knoten $v \in V$) { // Initialisierung

`pred[v] = null; g[v] = ∞;`

}

`g[s] = 0;`

`Q = Priority Queue mit Elementen V , Schlüsseln g ;`

while (`!Q.isEmpty()`) { // Hauptschleife

`u = Q.extractMin();`

for each ($v \in \text{adj}[u]$ mit $v \in Q$) {

if ($w(u, v) < g[v]$) {

`pred[v] = u; g[v] = w(u, v);`

`Q.decreaseKey(v, g[v]);`

 }

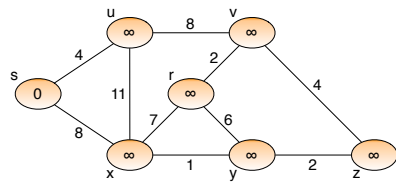
 }

}

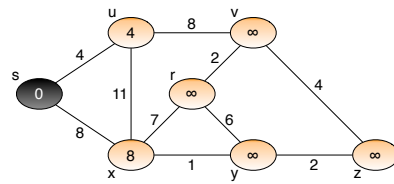
31

32

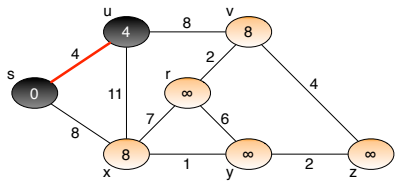
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 1



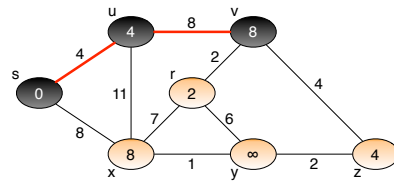
Q: (s,0) (u,∞) (v,∞) (r,∞) (x,∞) (y,∞) (z,∞)



Q: (u,4) (x,8) (r,∞) (v,∞) (y,∞) (z,∞)



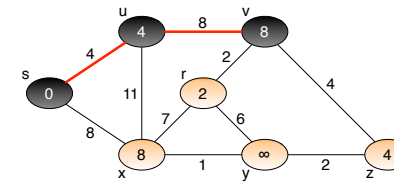
Q: (v,8) (x,8) (r,∞) (y,∞) (z,∞)



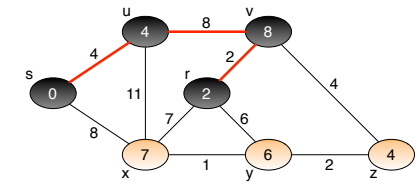
Q: (r,2) (z,4) (x,8) (y,∞)

33

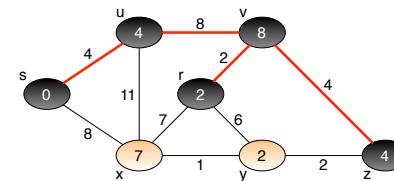
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 2



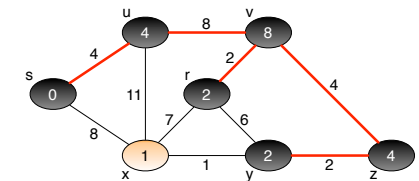
Q: (r,2) (z,4) (x,8) (y,∞)



Q: (z,4) (y,6) (x,7)



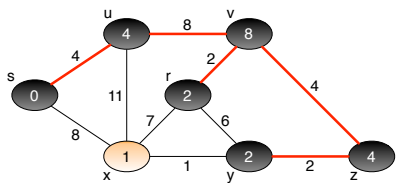
Q: (y,2) (x,7)



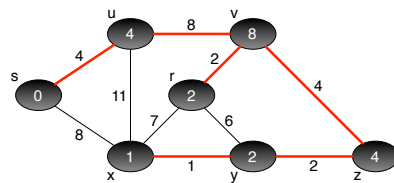
Q: (x,1)

34

Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 3



Q: (x,1)



Q:

Nach Ausführung von $\text{Prim}(G, w, s)$ gilt für $v \in V$:

- $\text{pred}[v]$ = Vorgängerknoten im Spannbaum
- Pfad in Spannbaum von v zu Wurzel s :
 $\text{pred}[v], \text{pred}[\text{pred}[v]], \dots, s$

35

Prim: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-14: Ausführung $|V|$ mal
 - Zeile 7: $O(\log |V|)$
 - Zeile 8-13: Ausführung inkl. äußerer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
 - Zeile 11: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

$\text{Prim}(G, w, s)$:

```

1  for each (Knoten  $v \in V$ ) {
2       $\text{pred}[v] = \text{null}; g[v] = \infty;$ 
3  }
4   $g[s] = 0;$ 
5  Q = Priority Queue( $V, g$ );
6  while ( !Q.isEmpty() ) {
7      u = Q.extractMin();
8      for each ( $v \in \text{adj}[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
9          if ( $w(u, v) < g[v]$ ) {
10              $\text{pred}[v] = u; g[v] = w(u, v);$ 
11             Q.decreaseKey( $v, g[v]$ );
12         }
13     }
14 }
```

36

Prim: Komplexität

- Komplexitätsanalyse von Prim fast identisch mit Dijkstra!
- Komplexität des Algorithmus von Prim hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

37

Ausblick: Graphen-Algorithmen

- **Fluss in Graphen:** statt Kantengewichten gibt es Kapazitäten, betrachtet wird Fluss von Quelle zu Senke
 - Problem: finde maximalen Fluss
 - Anwendung: z.B. Fluss in Kommunikations-Netzwerken
- **Einfärben von Graphen:** Färbe Knoten von Graph so ein, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben
 - Anwendungen: z.B. Scheduling, Sudoku
- **Planare Graphen:** lässt sich Graph ohne Kanten-Überschneidung zeichnen?
 - Anwendung: z.B. Chip- bzw. Platinen-Design
- **Klassifikation von medizinischen Daten:** über analytische Operationen auf Adjazenzmatrix, z.B. Laplace-Operator
 - Anwendungen: z.B. Identifikation von Melanomen, Tracking von Endoskopen

39

Prim: Anwendungen

- Planung von Netzwerken
 - Strassennetz
 - Kommunikations-Netzwerk
 - elektronische Schaltungen
- Clustering von Daten
 - Daten als Knoten, "Nähe" als Kanten, entferne "lange" Kanten aus minimalem Spannbaum → Clustering
- Extrahieren/Tracking von Objekten aus Bildern in Computer Vision

38

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche
Breitensuche
Kürzeste Pfade
Minimaler Spannbaum

40