Technische Universität München
Institut für Informatik I-16
Dr. Tobias Lasser
Matthias Wieczorek

SoSe 2015
Lösungsblatt 2
30. April 2015

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 Stack und Queue (Beispiellösung)

a)

$$\leftrightarrow (5,8,2,3,9)$$

(i) pop(S) = 5

$$\leftrightarrow (8,2,3,9)$$

(ii) push(S, 8)

$$\leftrightarrow (8,8,2,3,9)$$

(iii) top(S) = 8

$$\leftrightarrow (8,8,2,3,9)$$

(iv) push(S, 1)

$$\leftrightarrow (1,8,8,2,3,9)$$

(v) pop(S) = 1

$$\leftrightarrow (8,8,2,3,9)$$

b)

$$\rightarrow (0,9,1,3,4) \rightarrow$$

(i) dequeue(Q) = 4

$$\rightarrow (0,9,1,3) \rightarrow$$

(ii) enqueue(Q, 7)

$$\rightarrow (7,0,9,1,3) \rightarrow$$

(iii) enqueue(Q, 5)

$$\rightarrow (5,7,0,9,1,3) \rightarrow$$

(iv) dequeue(Q) = 3

$$\rightarrow (5,7,0,9,1) \rightarrow$$

(v) isEmpty(Q) = false

$$\rightarrow (5,7,0,9,1) \rightarrow$$

Aufgabe 2 Insertion Sort (Beispiellösung)

a) $(1,9,4,3,7)$
$(1)\ (9,4,3,7)$
$(1,9)\ (4,3,7)$
$(1,4,9)\ (3,7)$
$(1,3,4,9)\ (7)$
$(1,3,4,7,9)$

b) $(2,7,5,1,8)$
$(2)\ (7,5,1,8)$
$(2,7)\ (5,1,8)$
$(2,5,7)\ (1,8)$
$(1,2,5,7)\ (8)$
$(1,2,5,7,8)$

Aufgabe 3 Verifikation der Multiplikation durch Addition (Beispiellösung)

a) Vor- und Nachbedingung von **Multiply**

$$\begin{aligned} VOR &= a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \in \mathbb{Z} \\ NACH &= (c = a \cdot b) \end{aligned}$$

b) Schleifeninvariante für dritten Fall

$$P \quad = \quad (a \cdot b = c + (a - i + 1) \cdot b)$$

c) Abkürzung:

$\{VOR\}$
if $(a = 0 \ \vee \ b = 0)$ {
    α
}
else if $(a < 0)$ {
    β
}
else {
    γ
}
$\{NACH\}$

- $\{VOR \ \wedge \ (a = 0 \ \vee \ b = 0)\}$ α $\{NACH\}$

  Trivial, da $c = a \cdot b = 0$, falls $a = 0$ oder $b = 0$.

- $\{VOR \ \wedge \ \neg(a = 0 \ \vee \ b = 0) \ \wedge \ a < 0\}$ β $\{NACH\}$

  Vereinfachung der Vorbedingung:

  $$VOR \ \wedge \ a < 0 \ \wedge \ b \neq 0$$

  Allgemein bei $a < 0$:

  $$a = -|a| = -1 \cdot |a| = -1 \cdot (-a) \ ,$$
  $$c = a \cdot b = (-1 \cdot (-a)) \cdot b$$

  Assoziativgesetz:

  $$c = -1 \cdot ((-a) \cdot b) \ .$$

  Falls **Multiply** korrekt für positives a (Fall 3!), gilt auch hier $\{NACH\}$.

- $\{VOR \ \wedge \ \neg(a = 0 \ \vee \ b = 0) \ \wedge \ \neg(a < 0)\}$ γ $\{NACH\}$

  $\{C_0\}$
      $c = 0;$
      $i = 1;$
  $\{C_1\}$
      while $(i \leq a)$ {
  $\{C_2\}$
          $c = c + b;$
          $i = i + 1;$
  $\{C_3\}$
      }
  $\{NACH\}$

  Vereinfachung der Vorbedingung:

  $$C_0 \quad := \quad (VOR \ \wedge \ a > 0 \ \wedge \ b \neq 0)$$

  Bezeichne Schleifeninitialisierung mit γ_{init} und Schleifenkörper mit $\gamma_{\text{körper}}$.

– $C_1 \Rightarrow P$ (Korrektheit des Schleifeneintritts)

$$C_1 \;:=\; (C_0 \;\wedge\; c = 0 \;\wedge\; i = 1)$$

Einsetzen von c und i in P:

$$c + (a - i + 1) \cdot b = 0 + (a - 1 + 1) \cdot b = a \cdot b$$

– $\{P \;\wedge\; (i \leq a)\}\ \gamma_{\text{körper}}\ \{P\}$ (Korrektheit des Schleifenkörpers)

$$C_2 \;:=\; (P \;\wedge\; i \leq a)$$

Bezeichne *neue* Werte von c und i vorübergehend mit c' und i':

$$\begin{aligned} c' &= c + b \\ i' &= i + 1 \end{aligned}$$

Invariante galt vorher:

$$a \cdot b = c + (a - i + 1) \cdot b$$

Nachher, unter Nutzung des alten Zustandes:

$$\begin{aligned} c' + (a - i' + 1) \cdot b &= (c + b) + (a - (i + 1) + 1) \cdot b \\ &= c + b + (a - i) \cdot b \\ &= c + (a - i + 1) \cdot b \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

– $P \;\wedge\; \neg(i \leq a) \Rightarrow \mathit{NACH}$ (Schleifenende, also verletzte Schleifenbedingung)
Es gilt $i = a + 1$ nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= c + (a - i + 1) \cdot b \\ &= c + (a - (a + 1) + 1) \cdot b \\ &= c + (a - a - 1 + 1) \cdot b \\ &= c + 0 \cdot b \\ &= c \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Verifikation von Selection Sort (Beispiellösung)

a) (i) **SelectionSort**

$$\begin{aligned} \mathit{VOR}_{sort} &= n \geq 0 \\ \mathit{NACH}_{sort} &= A \text{ enthält Permutation der Originaldaten } \wedge \\ &\quad A[0] \leq A[1] \leq \ldots \leq A[n-1] \end{aligned}$$

(ii) **IndexOfMin**

$$\begin{aligned} \mathit{VOR}_{min} &= n > 0 \;\wedge\; 0 \leq j < n \\ \mathit{NACH}_{min} &= j \leq i < n \;\wedge\; A[i] \leq A[k] \;\; \forall k \in \{j, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

(iii) **Swap** $(\forall a, b \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \mathit{VOR}_{swap} &= n > 0 \;\wedge\; 0 \leq i, j < n \;\wedge\; A[i] = a \;\wedge\; A[j] = b \\ \mathit{NACH}_{swap} &= A[i] = b \;\wedge\; A[j] = a \;\wedge\; A[k] \text{ unverändert } \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i, j\} \end{aligned}$$

b) Konstruktion der Invariante:

- Permutation der Originaldaten in A laut $NACH_{sort}$.
- Sortierung der bereits bearbeiteten Indices 0 bis $j-1$, also $A[0] \leq A[1] \leq ... \leq A[j-1]$.
- Unsortierter Teil darf nicht kleineres als $A[j-1]$ enthalten, also $A[j-1] \leq A[j..n-1]$.

Somit:

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & A \text{ enthält Permutation der Originaldaten} \quad \wedge \\ & A[0] \leq A[1] \leq ... \leq A[j-1] \leq A[j..n-1] \end{aligned}$$

Nach Ersatz der **for**-Schleife durch eine äquivalente **while**-Schleife:

```
{C0}
    j = 0;
{C1}
    while (j < n) {
{C2}
        i = IndexOfMin(A, j);
{C3}
        if (j ≠ i)
            Swap(A, i, j);
{C4}
        j = j + 1;
{C5}
    }
{C6}
```

$\{C_0\}$ (Vorbedingung)

$$C_0 \quad = \quad VOR_{sort} \quad = \quad n \geq 0$$

$\{C_1\}$ (Schleifeneintritt)

$$\begin{aligned} C_1 \quad &= \quad C_0 \quad \wedge \quad j = 0 \quad \wedge \quad P \\ &= \quad n \geq 0 \quad \wedge \quad j = 0 \quad \wedge \quad P \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. (Sonderfall $n = 0$ unten!) Zu zeigen ist letztendlich:

$$C_6 = P \quad \wedge \quad ...$$

$\{C_2\}$ (ergibt Vorbedingung von **IndexOfMin**, VOR_{min})

$$C_2 \quad = \quad n > 0 \quad \wedge \quad 0 \leq j < n \quad \wedge \quad P$$

$\{C_3\}$ (Nachbedingung von **IndexOfMin**, $NACH_{min}$; wird unten gezeigt)

$$\begin{aligned} C_3 \quad = \quad & n > 0 \quad \wedge \quad 0 \leq j < n \quad \wedge \quad P \quad \wedge \\ & j \leq i < n \quad \wedge \quad A[i] \leq A[k] \quad \forall k \in \{j, ..., n-1\} \end{aligned}$$

$\{C_4\}$ (Entweder bereits gegeben oder via Nachbedingung von **Swap**, $NACH_{swap}$)

$$\begin{aligned} C_4 \quad = \quad & n > 0 \quad \wedge \quad 0 \leq j < n \quad \wedge \quad P \quad \wedge \\ & A[j] \leq A[(j+1)..(n-1)] \end{aligned}$$

$\{C_5\}$ („Verschiebung der Trennstelle“)

$$C_5 \quad = \quad n > 0 \ \wedge \ (0 \leq j < n \ \vee \ j \geq n) \ \wedge \ P$$

$\{C_6\}$ (Nachbedingung im Fall $n > 0$)

$$\begin{array}{rcl} C_6 & \stackrel{n>0}{=} & n > 0 \ \wedge \ j \geq n \ \wedge \ P \\ & = & n > 0 \ \wedge \ j \geq n \ \wedge \ A \text{ enthält Permutation der Originaldaten} \ \wedge \\ & & A[0] \leq A[1] \leq ... \leq A[j-1] \leq A[j..(n-1)] \\ & = & n > 0 \ \wedge \ A \text{ enthält Permutation der Originaldaten} \ \wedge \\ & & A[0] \leq A[1] \leq ... \leq A[n-1] \\ & = & C_5 \wedge \neg(j < n) \\ & \Rightarrow & NACH_{sort} \end{array}$$

$\{C_6\}$ (Nachbedingung im Sonderfall $n = 0$)

$$\begin{array}{rcl} C_6 & = & n = 0 \ \wedge \ j = 0 \ \wedge \ P \\ C_6 & \stackrel{n=0}{=} & C_1 \wedge \neg(j < n) \\ & \Rightarrow & NACH_{sort} \end{array}$$

c) Invariante:

$$P \quad = \quad A[i] \leq A[j..(k-1)]$$

Nach Ersatz der **for**-Schleife sowie Entfernen der Hilfsvariable Ai:

$\{C_0\}$
$i = j;$
$k = j+1;$
$\{C_1\}$
while $(k < n)$ {
$\{C_2\}$
if $(A[k] < A[i])$
$i = k;$
$\{C_3\}$
$k = k+1;$
$\{C_4\}$
}
$\{C_5\}$

$\{C_0\}$ (Vorbedingung)

$$C_0 \quad = \quad VOR_{min}$$

$\{C_1\}$ (Schleifeneintritt)

$$C_1 \quad = \quad C_0 \ \wedge \ i = j \ \wedge \ k = j+1 \ \wedge \ P$$

Sei $n > j+1$. (Sonderfall $n = j+1$ unten!)

$\{C_2\}$ (Schleifeninvariante und Schleifenbedingung)

$$C_2 \quad = \quad n > 0 \ \wedge \ 0 < k < n \ \wedge \ \underbrace{A[i] \leq A[j..(k-1)]}_{= P}$$

$\{C_3\}$ (Entweder bereits gegeben oder via Zuweisung $i = k$)

$$\begin{aligned} C_3 \quad &= \quad \ldots \ \wedge \ A[i] \leq A[j..k] \\ &= \quad \ldots \ \wedge \ P \ \wedge \ A[i] \leq A[k] \end{aligned}$$

$\{C_4\}$ („Verschiebung der Trennstelle“)

$$C_4 \quad = \quad n > 0 \ \wedge \ (0 < k < n \ \vee \ k \geq n) \ \wedge \ P$$

$\{C_5\}$ (Nachbedingung im Fall $n > j+1$)

$$C_5 \overset{j<n-1}{=} C_4 \wedge \neg(k < n) \quad \Rightarrow \quad NACH_{min}$$

$\{C_5\}$ (Nachbedingung im Sonderfall $n = j+1$)

$$C_5 \overset{j=n-1}{=} C_1 \wedge \neg(k < n) \quad \Rightarrow \quad NACH_{min}$$