

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Organisatorisches: Termine

- keine Vorlesungen am 16. und 19. Mai 201~~6~~⁶!
- keine Zentralübung am 18. Mai 201~~6~~⁶!

Programm heute

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- ⑥ Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
 - Entwurfsprinzipien
 - Divide and Conquer

Algorithmen-Entwurf

- Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!
 - insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar
- Programmieren ist **kreative** Tätigkeit
 - “The Art of Computer Programming” (D. Knuth)
- Unterstützung durch **Algorithmen-Muster**
 - auch **Design Patterns** genannt
 - “best practice”

Entwurfsprinzip: Verfeinerung

- intuitive Vorgehensweise: schrittweise Verfeinerung
- auch genannt: Top-Down Entwurf
- Schema:
 - ① Lösungsidee mit groben Anweisungen
 - ② Schrittweise Verfeinerung der Anweisungen in detailliertere / konkretere Anweisungen
 - ③ Zielprogramm in Programmiersprache (z.B. C++)

Verfeinerung: Beispiel I

Beispiel-Problem: Tee-Zubereitung

- Lösungsidee mit groben Anweisungen:
 - ① Wasser kochen
 - ② Wasser in die Tasse
 - ③ Teebeutel in die Tasse
 - ④ Teebeutel herausnehmen

Verfeinerung: Beispiel I

Beispiel-Problem: Tee-Zubereitung

- Lösungsidee mit groben Anweisungen:

- ① Wasser kochen
- ② Wasser in die Tasse
- ③ Teebeutel in die Tasse
- ④ Teebeutel herausnehmen

- Verfeinerung:

- ① Wasser kochen
 - ① Wasser in Wasserkocher füllen
 - ② Wasserkocher anstecken
 - ③ Wasserkocher anschalten
 - ④ Warten bis Wasser kocht
 - ⑤ Wasserkocher ausschalten
- ② Wasser in die Tasse
 - ① Wasserkocher abstecken
 - ② Wasser in Tasse füllen
- ③ ...

Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

Definition Median

Sei $(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{N}$ eine aufsteigend sortierte Folge natürlicher Zahlen mit $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Der Median \tilde{x} ist definiert als

$$\tilde{x} := x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Beispiele:

- Folge 3, 4, 7, 10, 11: Median ist 7
- Folge 21, 33, 47, 111: Median ist 33

(*Bemerkung:* manchmal ist der Median im Fall von n gerade auch als arithmetisches Mittel von $x_{\frac{n}{2}}$ und $x_{\frac{n}{2}+1}$ definiert)

Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
 - ① Eingabe Zahlenfolge X ;
 - ② Sortiere X ;
 - ③ Bestimme Median xt von X ;
 - ④ Gebe xt aus;

Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
 - 1 Eingabe Zahlenfolge X;
 - 2 Sortiere X;
 - 3 Bestimme Median xt von X;
 - 4 Gebe xt aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
 - 1 $X = \text{EingabeFolge}()$; // Eingabe der Folge
 - 2 $\text{Sort}(X)$; // rufe Sortiermethode auf
 - 3 $xt = X[\text{ceil}(X.\text{laenge} / 2)]$; // bestimme Median
 - 4 $\text{Output}(xt)$; // gib xt aus

Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
 - 1 Eingabe Zahlenfolge X;
 - 2 Sortiere X;
 - 3 Bestimme Median xt von X;
 - 4 Gebe xt aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
 - 1 `X = EingabeFolge(); // Eingabe der Folge`
 - 2 `Sort(X); // rufe Sortiermethode auf`
 - 3 `xt = X[ceil(X.laenge / 2)]; // bestimme Median`
 - 4 `Output(xt); // gib xt aus`
- Verfeinerung (C++):
 - 1 `std::vector<int> X{3, 4, 7, 10, 11}; // Folge fest vorgegeben`
 - 2 `int length = X.size(); // fixe Länge`
 - 3 `std::sort(X); // sortiere Folge`
 - 4 `int xt = X[ceil(length/ 2)]; // bestimme Median`
 - 5 `std::cout << "Median ist " << xt; // gib xt aus`

Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
 - 1 Eingabe Zahlenfolge X;
 - 2 Sortiere X;
 - 3 Bestimme Median xt von X;
 - 4 Gebe xt aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
 - 1 `X = EingabeFolge(); // Eingabe der Folge`
 - 2 `Sort(X); // rufe Sortiermethode auf`
 - 3 `xt = X[ceil(X.laenge / 2)]; // bestimme Median`
 - 4 `Output(xt); // gib xt aus`
- Verfeinerung (C++):
 - 1 `std::vector<int> X{3, 4, 7, 10, 11}; // Folge fest vorgegeben`
 - 2 `int length = X.size(); // fixe Länge`
 - 3 `std::sort(X); // sortiere Folge`
 - 4 `int xt = X[ceil(length/ 2)]; // bestimme Median`
 - 5 `std::cout << "Median ist " << xt; // gib xt aus`
- ...

Verfeinerung

- keine festen Regeln für Verfeinerungs-Prozess
- passende Notation für Detailstufe verwenden (z.B. Pseudocode)
- jeder Verfeinerungsschritt enthält **Entwurfs-Entscheidungen**
 - bestimmt z.B. Art der Eingabe von Daten
 - bestimmt z.B. Laufzeitverhalten des Programms (Größe, Geschwindigkeit)

Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- Idee: allgemeines **Algorithmen-Muster** entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: **Design Pattern** oder “best practice” Strategie

Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- **Idee:** allgemeines **Algorithmen-Muster** entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: **Design Pattern** oder “**best practice**” Strategie
- **Beispiel Problemklasse:** finden einer optimalen Lösung bezüglich Kosten in großem Lösungsraum
 - konkret z.B. kürzester Weg zwischen zwei Städten

Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- **Idee:** allgemeines **Algorithmen-Muster** entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: **Design Pattern** oder “**best practice**” Strategie
- **Beispiel Problemklasse:** finden einer optimalen Lösung bezüglich Kosten in großem Lösungsraum
 - konkret z.B. kürzester Weg zwischen zwei Städten
- **Verfahrensweise Algorithmen-Muster:**
 - Beschreibung des Lösungsverfahrens an möglichst einfachem Beispiel
 - Transfer auf konkrete Problemstellung

Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- 6 Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
 - Entwurfsprinzipien
 - Divide and Conquer

Entwurfsprinzip: Divide and Conquer

Definition: Divide and Conquer (nach G. Saake)

Divide and Conquer ist die **rekursive** Rückführung eines zu lösenden Problems auf ein **identisches** Problem mit **kleinerer** Eingabemenge.

- Divide and Conquer: zu deutsch “Teile und herrsche”
- Prinzip:
 - teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
 - rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf

Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer als Algorithmen-Muster:

- 1 Teile gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
 - löse Teilaufgaben einzeln
 - setze Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen zusammen
- 2 Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann
- 3 Jede Teilaufgabe sollte von derselben Art sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer-Muster als Pseudocode:

Input: Aufgabe A

DivideAndConquer(A):

```
if ( $A$  klein) {  
    löse  $A$  explizit;
```

```
}
```

```
else {
```

```
    teile  $A$  in Teilaufgaben  $A_1, \dots, A_n$  auf;
```

```
    DivideAndConquer( $A_1$ );
```

```
    ...
```

```
    DivideAndConquer( $A_n$ );
```

```
    setze Lösung für  $A$  zusammen aus Lösungen für  $A_1, \dots, A_n$ 
```

```
}
```

Divide and Conquer: MergeSort

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ Feld mit n natürlichen Zahlen $a_i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: sortiere A in aufsteigender Reihenfolge.

- Lösung mit Divide and Conquer-Muster: **Merge Sort**
- Idee:
 - **Divide:** teile A auf in zwei gleich große Teilfelder
 - **Rekursion:** rufe Merge Sort rekursiv für die zwei Teilfelder auf
 - **Conquer:** setze die Teilfelder zusammen (**merge** bzw. mischen)
- Wann ist Teilfolge **“klein”**, d.h. wann löst man explizit?
→ Teilfolge mit nur **einem** Element → sortiert!

MergeSort: Algorithmus

Input: zu sortierendes Feld A

Output: sortiertes Feld

MergeSort(A):

```
if ( $A$  ein-elementig) { // Teilfeld ist klein
    return  $A$ ;
}
else {
    halbiere  $A$  in  $A_1$  und  $A_2$ ; // Divide
     $A_1$  = MergeSort( $A_1$ ); // Rekursion
     $A_2$  = MergeSort( $A_2$ ); // Rekursion
    return Merge( $A_1$ ,  $A_2$ ); // Conquer
}
```

→ “komplizierter” Teil ist in **Merge**!

MergeSort: Merge Funktion

bereits sortiert!

Input: zu sortierende Felder A_1, A_2

Output: sortiertes Feld B

Merge(A_1, A_2):

$B =$ leeres Feld;

while (A_1 und A_2 nicht leer) {

entferne das kleinere der Anfangselemente von A_1 bzw. A_2 ;

hänge dieses Element an B an;

}

hänge das verbliebene, nicht-leere Feld A_1 oder A_2 an B an;

return B ;

→ tatsächliche Implementation muß Entfernen/Anhängen effizient lösen!

MergeSort: Beispiel

Divide



A_1'

A_2'

MergeSort

MergeSort

"klein"



A_1''

A_2''



MERGE

MERGE:

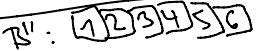


MERGE

MERGE:



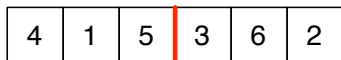
MERGE



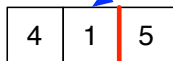
sortiert

MergeSort: Beispiel

Divide :

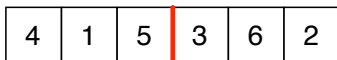


Divide:

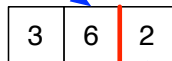
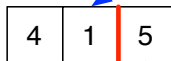


MergeSort: Beispiel

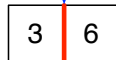
Divide



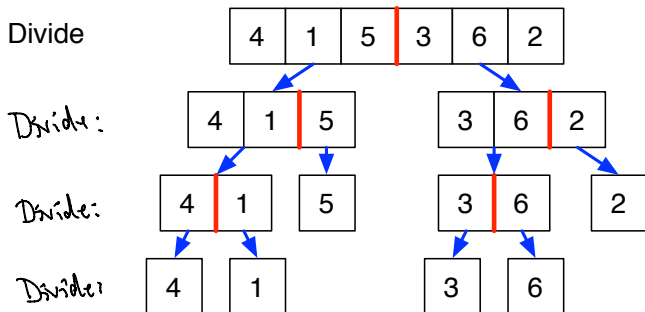
Divide:



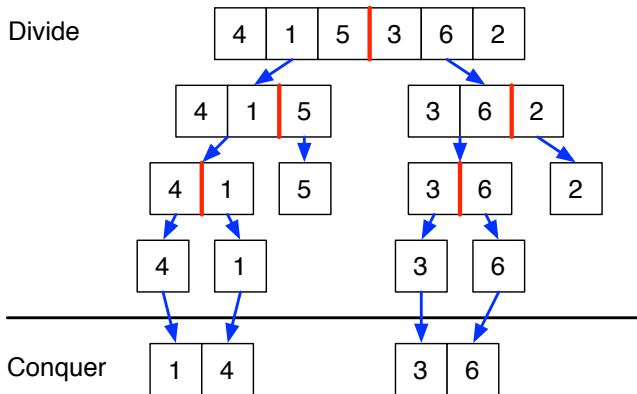
Divide:



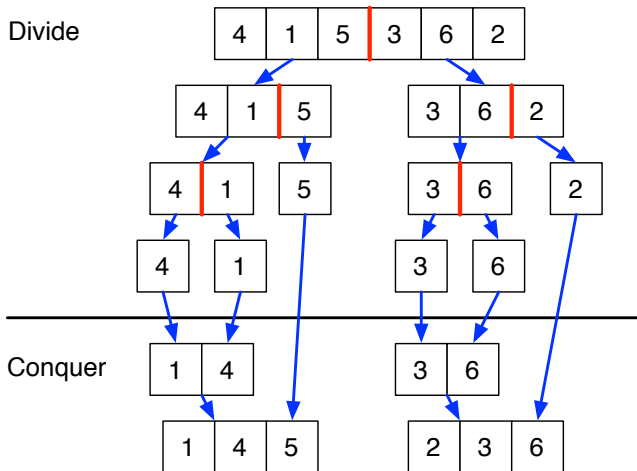
MergeSort: Beispiel



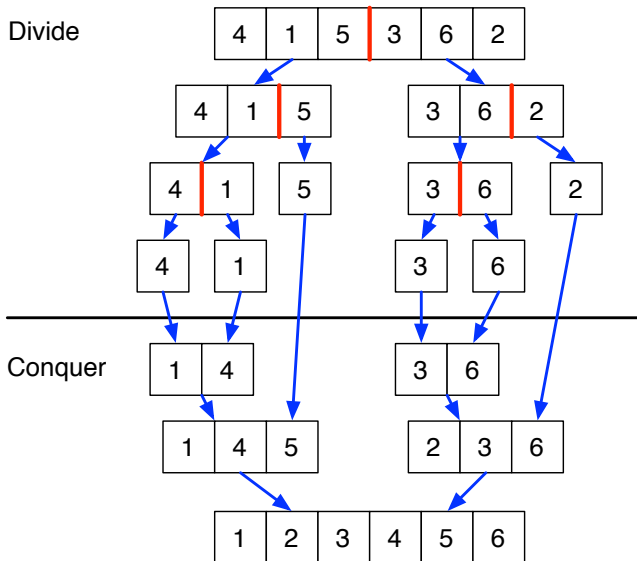
MergeSort: Beispiel



MergeSort: Beispiel



MergeSort: Beispiel



MergeSort: Eigenschaften

- Merge Sort benötigt **zusätzlichen Speicher** in Funktion **Merge**
 - insgesamt n zusätzliche Elemente falls A Länge n
- best und worst case sind identisch
- die meiste Arbeit steckt in **Merge**
 - wie viel genau?

MergeSort: Komplexität Merge Funktion

- $|A| = n$
- Sei $|A_1| = n_1, |A_2| = n_2$
→ $n_1 + n_2 \leq n$
- Annahme:
 - entfernen ist $O(1)$
 - anhängen ist $O(1)$
- Anzahl **while** Durchläufe:
 ~~$\min(n_1, n_2)$~~ oder evtl. etwas mehr: m
wobei $m \leq n_1 + n_2$
- anschließend
 ~~$\max(n_1, n_2)$~~ ~~$\min(n_1, n_2)$~~
Anhänge-Operationen
→ **Merge** ist $O(n_1 + n_2)$ ← $m + m' = n_1 + n_2$
- also ist **Merge** auch $O(n)$!

Input: zu sortierende Felder A_1, A_2

Output: sortiertes Feld B

Merge(A_1, A_2):

$B =$ leeres Feld;

```
while ( $A_1$  und  $A_2$  nicht leer) {  
    entferne das kleinere der Anfangs-  
    elemente von  $A_1$  bzw.  $A_2$ ;  
    hänge dieses Element an  $B$  an;  
}  
hänge das verbliebene, nicht-leere  
Feld  $A_1$  oder  $A_2$  an  $B$  an;  
return  $B$ ;
```


MergeSort: Komplexität I

- Laufzeit von Merge Sort

$$T(n) = ?$$

- Zeilen 1-3: "Problem klein"

$$O(1)$$

- Zeile 5: Divide

$$O(1)$$

- Zeile 6 und 7: Rekursion

$$\text{jeweils } T(n/2)$$

- Zeile 8: Conquer

$$O(n)$$

Input: zu sortierendes Feld A

Output: sortiertes Feld

MergeSort(A):

```

 $O(1)$  1  if ( $A$  ein-elementig) {
 $O(1)$  2      return  $A$ ;
- 3      }
- 4  else {
 $O(1)$  5      halbiere  $A$  in  $A_1$  und  $A_2$ ;
 $T(n/2)$  6       $A_1 = \text{MergeSort}(A_1)$ ;
 $T(n/2)$  7       $A_2 = \text{MergeSort}(A_2)$ ;
 $O(n)$  8      return Merge( $A_1$ ,  $A_2$ );
- 9  }
```

MergeSort: Komplexität I

- Laufzeit von Merge Sort

$$T(n) = ?$$

- Zeilen 1-3: "Problem klein"

$$O(1)$$

- Zeile 5: Divide

$$O(1)$$

- Zeile 6 und 7: Rekursion

$$\text{jeweils } T(n/2)$$

- Zeile 8: Conquer

$$O(n)$$

Input: zu sortierendes Feld A

Output: sortiertes Feld

MergeSort(A):

```
1  if (A ein-elementig) {
2  return A;
3  }
4  else {
5  halbiere A in  $A_1$  und  $A_2$ ;
6   $A_1 = \text{MergeSort}(A_1)$ ;
7   $A_2 = \text{MergeSort}(A_2)$ ;
8  return Merge( $A_1$ ,  $A_2$ );
9  }
```

Handwritten annotations in red:

- $O(n)$ next to line 1
- $O(n)$ next to line 2
- next to line 3
- next to line 4
- $O(n)$ next to line 5
- $T(n/2)$ next to line 6
- $T(n/2)$ next to line 7
- $O(n)$ next to line 8
- next to line 9

$$\rightarrow T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

MergeSort: Komplexität II

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

liefert durch Auflösen der Rekursionsgleichung

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Wie kann man das zeigen?

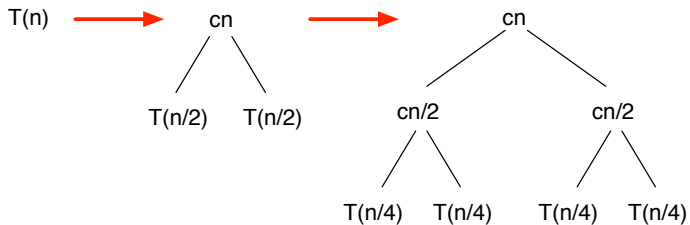
- **Master-Theorem** (s. Cormen, Kapitel 4.5)
- intuitiver: **Rekursions-Baum**

hierzu Annahme: c passende Konstante, so daß

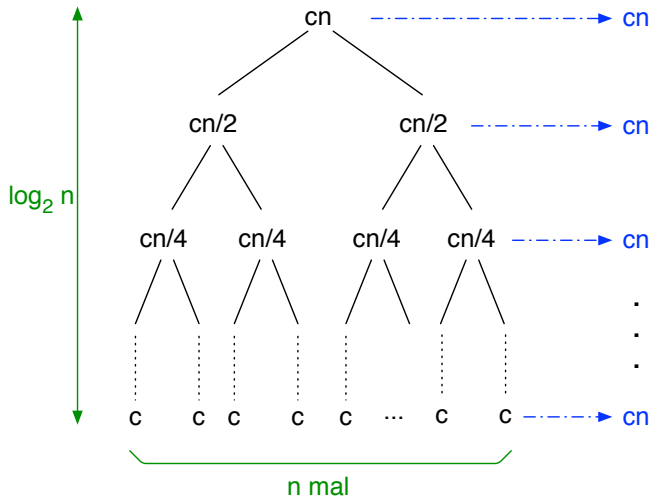
$$T(n) = \begin{cases} c & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

und sei n Zweier-Potenz, d.h. $n = 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$

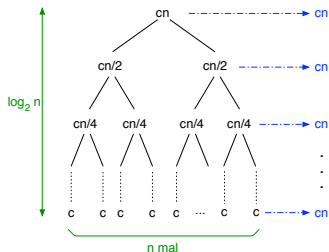
MergeSort: Rekursions-Baum



MergeSort: Rekursions-Baum



MergeSort: Komplexität III



- Baum hat Höhe $\log_2 n$, also $\log_2 n + 1$ Ebenen
- pro Ebene cn Kosten

→ Gesamtkosten $cn(\log_2 n + 1) = cn \log_2 n + cn$

$$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n) \quad \checkmark$$

MergeSort: Illustration



<http://www.sorting-algorithms.com/merge-sort>

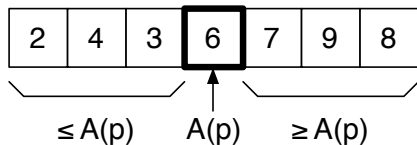
Divide and Conquer: QuickSort

QuickSort:

- Muster: Divide and Conquer
- in-place (ohne extra Speicherbedarf)

Hauptidee:

- teile Feld A mittels **Pivot-Element** $A(p)$ in zwei Teile
- links vom Pivot-Element $A(p)$ sind alle Elemente kleiner als $A(p)$
- rechts vom Pivot-Element $A(p)$ sind alle Elemente größer als $A(p)$



QuickSort: Algorithmus

Input: zu sortierendes Feld A

Indices untere und obere Grenze u, o

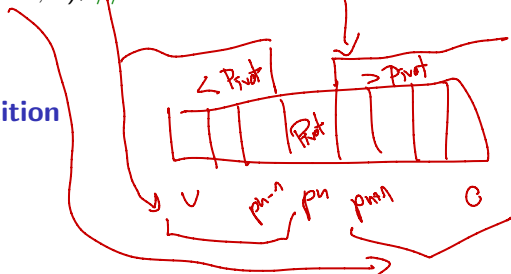
QuickSort: (A, u, o) falls A nicht kleinⁿ

```
if ( $o > u$ ) {  
    bestimme Index  $p$  des Pivot-Elements; // ist beliebig  
     $pn = \mathbf{Partition}(A, u, o, p)$ ; // Divide  
    QuickSort $(A, u, pn - 1)$ ; // Rekursion  
    QuickSort $(A, pn + 1, o)$ ; // Rekursion  
}
```

→ "Intelligenz" in **Partition**



→ versch. Strategie



QuickSort: Funktion Partition I



Input: zu zerlegendes Feld A ,
Indices von unterer und oberer Grenze u, o ,
Position p des Pivot-Elements

Output: neue Position pn des Pivot-Elements

Partition(A, u, o, p)

$pn = u$;

$pv = A(p)$;

tausche $A(p)$ und $A(o)$; // Pivot-Element nach rechts

for $i = u$ **to** $o - 1$ { durch gesamtes Feld von u nach $o-1$

if ($A(i) \leq pv$) {

 tausche $A(pn)$ und $A(i)$;

$pn = pn + 1$;

 }

}

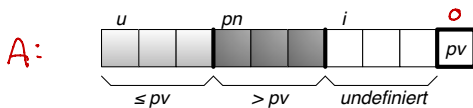
tausche $A(o)$ und $A(pn)$; // Pivot-Element zurück

return pn ;



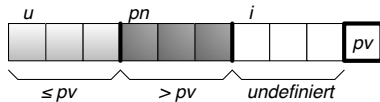
QuickSort: Funktion Partition II

Partitions-Prinzip:

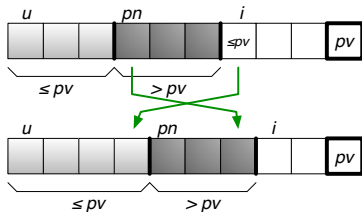
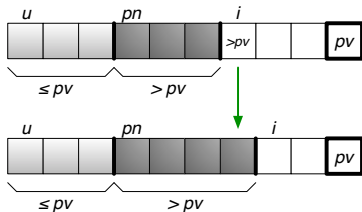


QuickSort: Funktion Partition II

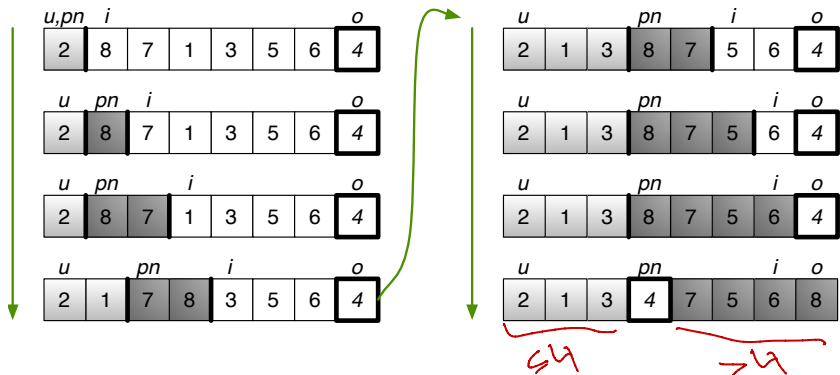
Partitions-Prinzip:



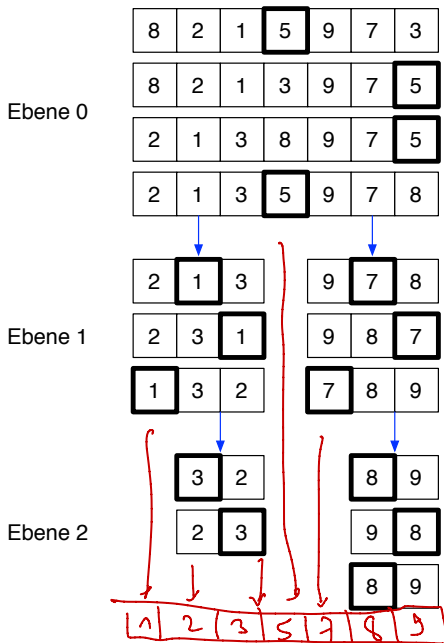
Austausch-Schritt:



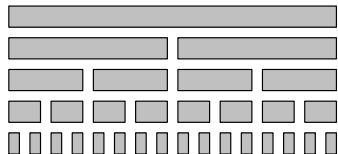
Partition: Beispiel



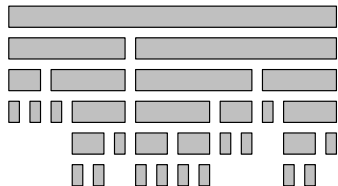
QuickSort: Komplettes Beispiel



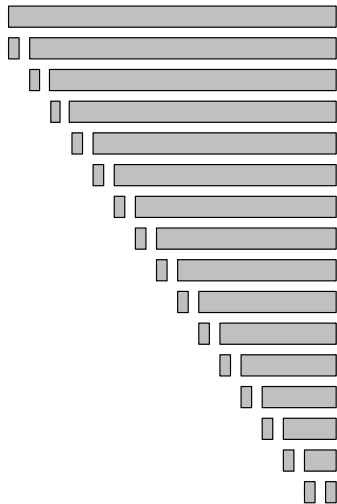
Quicksort: Illustration best/worst case



Best Case



Average Case



Worst Case

QuickSort: Komplexität

Komplexität von QuickSort:

- worst case: $\Theta(n^2)$
 - tritt ein wenn Pivot-Element ständig unbalanciert ist (d.h. ein Teilfeld leer)
 - insbesondere wenn Feld bereits sortiert
- best case: $O(n \log n)$
 - wenn Pivot-Element Folge laufend halbiert
- im Durchschnitt: $O(n \log n)$
 - Beweis aufwendig
- typische Verbesserung: randomisierte Wahl von Pivot-Element
 - Komplexität dann immer noch $O(n \log n)$

Bei Interesse an Beweis/Herleitung: s. Cormen, Kapitel 7.2 und 7.4

QuickSort: Illustration



<http://www.sorting-algorithms.com/quick-sort>

Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
 - in-place
 - Komplexität $O(n^2)$, best case: $O(n)$
- ~~Selection Sort (Übung)~~
 - in-place
 - Komplexität $O(n^2)$
- MergeSort
 - benötigt zusätzlichen Speicher $O(n)$
 - Komplexität $O(n \log n)$
- QuickSort
 - in-place
 - Komplexität im Mittel $O(n \log n)$, worst case: $O(n^2)$

Wahlfunktion

Zusammenfassung

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
- ⑥ Grundlagen des Algorithmen-Entwurfs
 - Entwurfsprinzipien
 - Divide and Conquer