# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München


## Programm heute





## Algorithmen-Entwurf

- Kein Patentrezept zum Entwurf von Algorithmen!
  - insbesondere Ableitung von Algorithmus aus Spezifikation nicht automatisierbar
- Programmieren ist kreative Tätigkeit
  - "The Art of Computer Programming" (D. Knuth)
- Unterstützung durch Algorithmen-Muster
  - auch Design Patterns genannt
  - "best practice"



## Entwurfsprinzip: Verfeinerung

- intuitive Vorgehensweise: schrittweise Verfeinerung
- auch genannt: Top-Down Entwurf
- Schema:
  1. Lösungsidee mit groben Anweisungen
  2. Schrittweise Verfeinerung der Anweisungen in detailliertere / konkretere Anweisungen
  3. Zielprogramm in Programmiersprache (z.B. C++)

# Verfeinerung: Beispiel I

Beispiel-Problem: Tee-Zubereitung

- Lösungsidee mit groben Anweisungen:
  1. Wasser kochen
  2. Wasser in die Tasse
  3. Teebeutel in die Tasse
  4. Teebeutel herausnehmen
- Verfeinerung:
  1. Wasser kochen
     1. Wasser in Wasserkocher füllen
     2. Wasserkocher anstecken
     3. Wasserkocher anschalten
     4. Warten bis Wasser kocht
     5. Wasserkocher ausschalten
  2. Wasser in die Tasse
     1. Wasserkocher abstecken
     2. Wasser in Tasse füllen
  3. ...



# Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

**Definition Median**

Sei $(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{N}$ eine aufsteigend sortierte Folge natürlicher Zahlen mit $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Der Median $\tilde{x}$ ist definiert als

$$\tilde{x} := x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Beispiele:

- Folge 3, 4, 7, 10, 11: Median ist 7
- Folge 21, 33, 47, 111: Median ist 33

(*Bemerkung:* manchmal ist der Median im Fall von $n$ gerade auch als arithmetisches Mittel von $x_{\frac{n}{2}}$ und $x_{\frac{n}{2}+1}$ definiert)



# Verfeinerung: Beispiel II

Beispiel-Problem: bestimme Median von Zahlenfolge

- Lösungsidee mit groben Anweisungen (Pseudocode):
  1. Eingabe Zahlenfolge X;
  2. Sortiere X;
  3. Bestimme Median *xt* von X;
  4. Gebe *xt* aus;
- Verfeinerung (Pseudocode):
  1. X = EingabeFolge(); // Eingabe der Folge
  2. Sort(X); // rufe Sortiermethode auf
  3. xt = X[ ceil(X.laenge / 2) ]; // bestimme Median
  4. Output(xt); // gib xt aus
- Verfeinerung (C++):
  1. std::vector<int> X{3, 4, 7, 10, 11}; // Folge fest vorgegeben
  2. int length = X.size(); // fixe Länge
  3. std::sort(X); // sortiere Folge
  4. int xt = X[ ceil(length/ 2) ]; // bestimme Median
  5. std::cout << "Median ist " << xt; // gib xt aus
- ...



# Verfeinerung

- keine festen Regeln für Verfeinerungs-Prozess
- passende Notation für Detailstufe verwenden (z.B. Pseudocode)
- jeder Verfeinerungsschritt enthält Entwurfs-Entscheidungen
  - bestimmt z.B. Art der Eingabe von Daten
  - bestimmt z.B. Laufzeitverhalten des Programms (Größe, Geschwindigkeit)

## Entwurfsprinzip: Algorithmen-Muster

- Idee: allgemeines Algorithmen-Muster entwickelt für bestimmte Problemklasse, dann Anpassung an konkretes Problem
- auch genannt: Design Pattern oder "best practice" Strategie

- Beispiel Problemklasse: finden einer optimalen Lösung bezüglich Kosten in großem Lösungsraum
  - konkret z.B. kürzester Weg zwischen zwei Städten

- Verfahrensweise Algorithmen-Muster:
  - Beschreibung des Lösungsverfahrens an möglichst einfachem Beispiel
  - Transfer auf konkrete Problemstellung



## Programm heute





## Entwurfsprinzip: Divide and Conquer

**Definition: Divide and Conquer (nach G. Saake)**

Divide and Conquer ist die rekursive Rückführung eines zu lösenden Problems auf ein identisches Problem mit kleinerer Eingabemenge.

- Divide and Conquer: zu deutsch "Teile und herrsche"
- Prinzip:
  - teile große Aufgabe in mehrere kleine Teilaufgaben
  - rufe denselben Algorithmus rekursiv auf den Teilaufgaben auf



## Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer als Algorithmen-Muster:

1. Teile gegebene Aufgabe in mehrere getrennte Teilaufgaben
   - löse Teilaufgaben einzeln
   - setze Lösung der Gesamtaufgabe aus Teillösungen zusammen
2. Wende dieselbe Technik auf jede Teilaufgabe an, dann auf deren Teilaufgaben etc., bis die Teilaufgabe so klein ist, dass Lösung explizit berechnet werden kann
3. Jede Teilaufgabe sollte von derselben Art sein wie die Gesamtaufgabe, so dass der gleiche Algorithmus rekursiv aufgerufen werden kann

## Muster: Divide and Conquer

Divide and Conquer-Muster als Pseudocode:

**Input:** Aufgabe $A$
**DivideAndConquer**($A$):
  **if** ($A$ klein) {
    löse $A$ explizit;
  }
  **else** {
    teile $A$ in Teilaufgaben $A_1, \ldots, A_n$ auf;
    **DivideAndConquer**($A_1$);
    ...
    **DivideAndConquer**($A_n$);
    setze Lösung für $A$ zusammen aus Lösungen für $A_1, \ldots, A_n$
}



## Divide and Conquer: MergeSort

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Feld mit $n$ natürlichen Zahlen $a_i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: sortiere $A$ in aufsteigender Reihenfolge.

- Lösung mit Divide and Conquer-Muster: Merge Sort
- Idee:
  - Divide: teile $A$ auf in zwei gleich große Teilfelder
  - Rekursion: rufe Merge Sort rekursiv für die zwei Teilfelder auf
  - Conquer: setze die Teilfelder zusammen (merge bzw. mischen)
- Wann ist Teilfolge "klein", d.h. wann löst man explizit?
  → Teilfolge mit nur einem Element → sortiert!



## MergeSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld $A$
**Output:** sortiertes Feld

**MergeSort**($A$):
  **if** ($A$ ein-elementig) { // Teilfeld ist klein
    **return** A;
  }
  **else** {
    halbiere $A$ in $A_1$ und $A_2$; // Divide
    $A_1$ = **MergeSort**($A_1$); // Rekursion
    $A_2$ = **MergeSort**($A_2$); // Rekursion
    **return Merge**($A_1$, $A_2$); // Conquer
  }

→ "komplizierter" Teil ist in **Merge**!



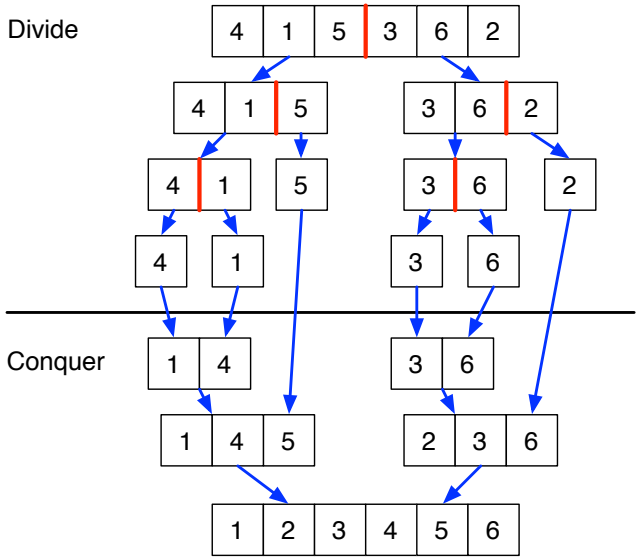
## MergeSort: Merge Funktion

**Input:** zu sortierende Felder $A_1$, $A_2$
**Output:** sortiertes Feld $B$

**Merge**($A_1$, $A_2$):
  $B$ = leeres Feld;
  **while** ($A_1$ und $A_2$ nicht leer) {
    entferne das kleinere der Anfangselemente von $A_1$ bzw. $A_2$;
    hänge dieses Element an $B$ an;
  }
  hänge das verbliebene, nicht-leere Feld $A_1$ oder $A_2$ an $B$ an;
  **return** $B$;

→ tatsächliche Implementation muß Entfernen/Anhängen effizient lösen!

## MergeSort: Beispiel






## MergeSort: Eigenschaften

- Merge Sort benötigt zusätzlichen Speicher in Funktion **Merge**
  - insgesamt $n$ zusätzliche Elemente falls $A$ Länge $n$
- best und worst case sind identisch
- die meiste Arbeit steckt in **Merge**
  - wie viel genau?



## MergeSort: Komplexität Merge Funktion

- $|A| = n$
- Sei $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$
  $\rightarrow n_1 + n_2 \leq n$
- Annahme:
  - entfernen ist $O(1)$
  - anhängen ist $O(1)$
- Anzahl **while** Durchläufe:
  $\min(n_1, n_2)$
- anschließend
  $\max(n_1, n_2) - \min(n_1, n_2)$
  Anhänge-Operationen
  $\rightarrow$ **Merge** ist $O(n_1 + n_2)$
- also ist **Merge** auch $O(n)$!

**Input:** zu sortierende Felder $A_1$, $A_2$
**Output:** sortiertes Feld $B$

**Merge**($A_1$, $A_2$):
  $B$ = leeres Feld;
  **while** ($A_1$ und $A_2$ nicht leer) {
    entferne das kleinere der Anfangs-
    elemente von $A_1$ bzw. $A_2$;
    hänge dieses Element an $B$ an;
  }
  hänge das verbliebene, nicht-leere
  Feld $A_1$ oder $A_2$ an $B$ an;
  **return** $B$;



## MergeSort: Komplexität I

- Laufzeit von Merge Sort
  $T(n) = ?$
- Zeilen 1-3: "Problem klein"
  $O(1)$
- Zeile 5: Divide
  $O(1)$
- Zeile 6 und 7: Rekursion
  jeweils $T(n/2)$
- Zeile 8: Conquer
  $O(n)$

**Input:** zu sortierendes Feld $A$
**Output:** sortiertes Feld

**MergeSort**($A$):
1  **if** ($A$ ein-elementig) {
2  **return** A;
3  }
4  **else** {
5  halbiere $A$ in $A_1$ und $A_2$;
6  $A_1$ = **MergeSort**($A_1$);
7  $A_2$ = **MergeSort**($A_2$);
8  **return Merge**($A_1$, $A_2$);
9  }

$$\rightarrow T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

## MergeSort: Komplexität II

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + O(n) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

liefert durch Auflösen der Rekursionsgleichung

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Wie kann man das zeigen?

- Master-Theorem (s. Cormen, Kapitel 4.5)
- intuitiver: Rekursions-Baum

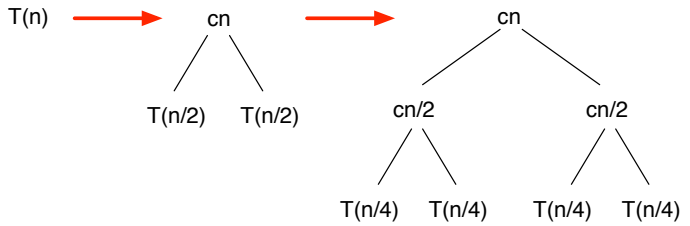
hierzu Annahme: $c$ passende Konstante, so daß

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{für } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

und sei $n$ Zweier-Potenz, d.h. $n = 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$

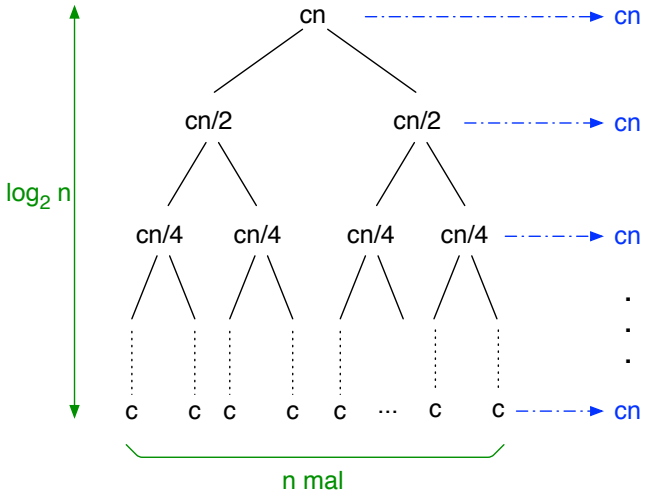


## MergeSort: Rekursions-Baum



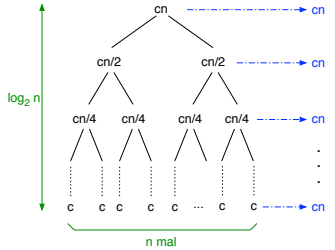



## MergeSort: Rekursions-Baum






## MergeSort: Komplexität III




- Baum hat Höhe $\log_2 n$, also $\log_2 n + 1$ Ebenen
- pro Ebene $cn$ Kosten

  $\rightarrow$ Gesamtkosten $cn(\log_2 n + 1) = cn \log_2 n + cn$

  $\longrightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$ ✓

## MergeSort: Illustration

☞ `http://www.sorting-algorithms.com/merge-sort`



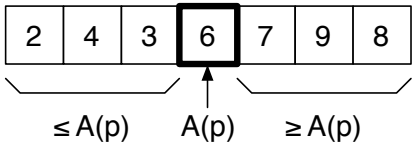
## Divide and Conquer: QuickSort

QuickSort:

- Muster: Divide and Conquer
- in-place (ohne extra Speicherbedarf)

Hauptidee:

- teile Feld $A$ mittels Pivot-Element $A(p)$ in zwei Teile
- links vom Pivot-Element $A(p)$ sind alle Elemente kleiner als $A(p)$
- rechts vom Pivot-Element $A(p)$ sind alle Elemente größer als $A(p)$






## QuickSort: Algorithmus

**Input:** zu sortierendes Feld $A$
Indices untere und obere Grenze $u, o$

**QuickSort:**$(A, u, o)$
**if** $(o > u)$ {
bestimme Index $p$ des Pivot-Elements; // ist beliebig
$pn =$ **Partition**$(A, u, o, p)$; // Divide
**QuickSort**$(A, u, pn - 1)$; // Rekursion
**QuickSort**$(A, pn + 1, o)$; // Rekursion
}

→ "Intelligenz" in **Partition**



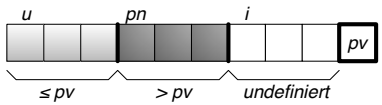
## QuickSort: Funktion Partition I

**Input:** zu zerlegendes Feld $A$,
Indices von unterer und oberer Grenze $u, o$,
Position $p$ des Pivot-Elements
**Output:** neue Position $pn$ des Pivot-Elements

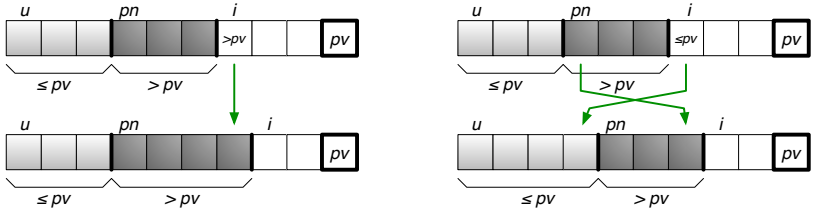
**Partition**$(A, u, o, p)$
$pn = u$;
$pv = A(p)$;
tausche $A(p)$ und $A(o)$; // Pivot-Element nach rechts
**for** $i = u$ **to** $o - 1$ {
**if** $(A(i) \leq pv)$ {
tausche $A(pn)$ und $A(i)$;
$pn = pn + 1$;
}
}
tausche $A(o)$ und $A(pn)$; // Pivot-Element zurück
**return** $pn$;

# QuickSort: Funktion Partition II

## Partitions-Prinzip:

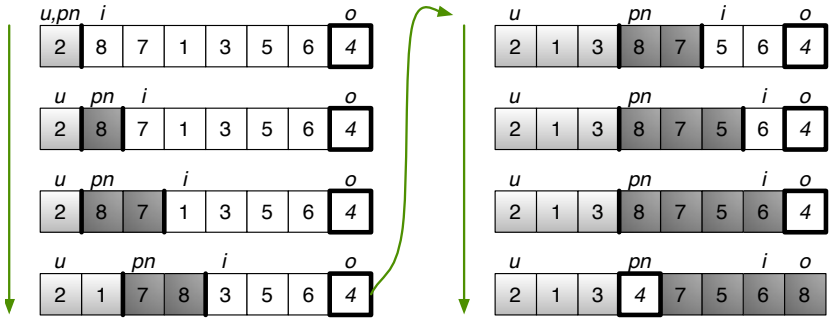



## Austausch-Schritt:



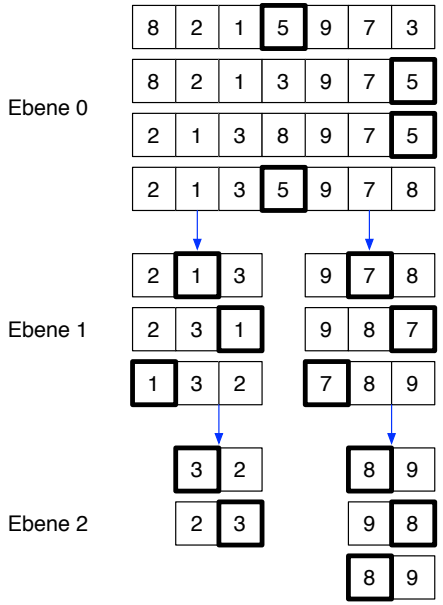



# Partition: Beispiel



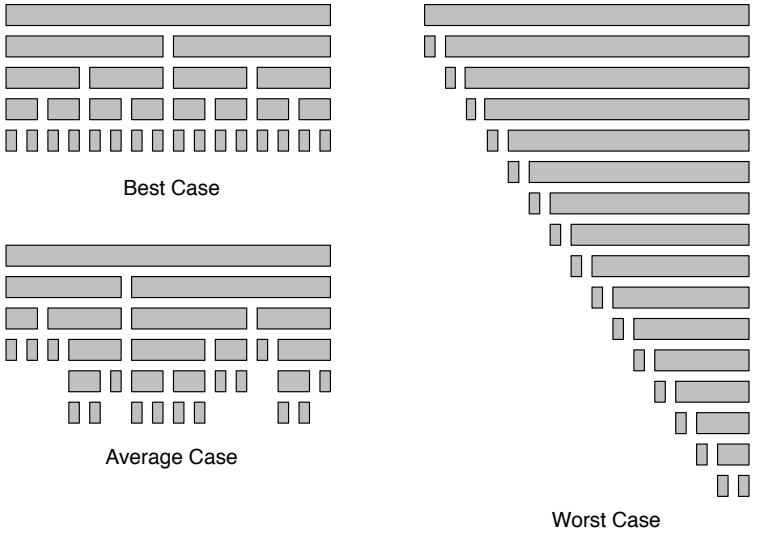



# QuickSort: Komplettes Beispiel






# Quicksort: Illustration best/worst case



## QuickSort: Komplexität

Komplexität von QuickSort:

- worst case: $\Theta(n^2)$
  - tritt ein wenn Pivot-Element ständig unbalanciert ist (d.h. ein Teilfeld leer)
  - insbesondere wenn Feld bereits sortiert
- best case: $O(n \log n)$
  - wenn Pivot-Element Folge laufend halbiert
- im Durchschnitt: $O(n \log n)$
  - Beweis aufwendig
- typische Verbesserung: randomisierte Wahl von Pivot-Element
  - Komplexität dann immer noch $O(n \log n)$

Bei Interesse an Beweis/Herleitung: s. Cormen, Kapitel 7.2 und 7.4



## QuickSort: Illustration

☞ `http://www.sorting-algorithms.com/quick-sort`



## Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
  - in-place
  - Komplexität $O(n^2)$, best case: $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
  - in-place
  - Komplexität $O(n^2)$
- MergeSort
  - benötigt zusätzlichen Speicher
  - Komplexität $O(n \log n)$
- QuickSort
  - in-place
  - Komplexität im Mittel $O(n \log n)$, worst case: $O(n^2)$



## Zusammenfassung