Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

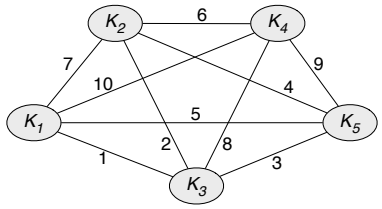
Übersicht: Graphen

Klassen von Graphen:

- ungerichteter Graph
- gerichteter Graph

Zusätzliche Eigenschaften:

- gewichteter Graph



Definition: Ungerichteter Graph

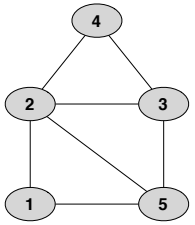
Definition: Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

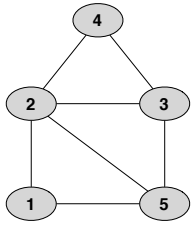
- V endliche Menge der Knoten
- $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ Menge der Kanten

- auf Englisch:
  - Knoten = vertices
  - Kanten = edges
- es ist $\{u, v\} = \{v, u\}$, d.h. Richtung der Kante spielt keine Rolle

Beispiel:



Ungerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_u = (V_u, E_u)$
- Knoten $V_u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten
  $E_u = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$

Definition: Gerichteter Graph

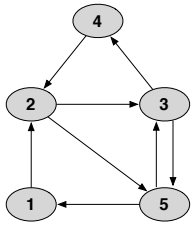
Definition: Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

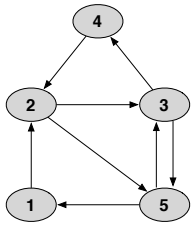
- V endliche Menge der Knoten
- $E \subseteq V \times V$ Menge der Kanten

- $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} = V \times V$
- es ist $(u, v) \neq (v, u)$, d.h. Richtung der Kante spielt eine Rolle
- hier sind Schleifen möglich, d.h. Kanten der Form (u, u) für $u \in V$

Beispiel:



Gerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_g = (V_g, E_g)$
- Knoten $V_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten
  $E_g = \{(1,2), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,2), (5,1), (5,3)\}$

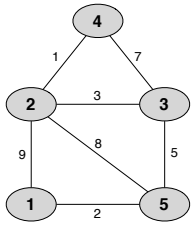
Definition: Gewichteter Graph

Definition: Gewichteter Graph

Ein gewichteter Graph ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.

- der Graph G kann gerichtet oder ungerichtet sein
- je nach Anwendung kann ein verschiedener Wertebereich für die Funktion w gewählt werden
  - z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}_0$

Beispiel:



Eigenschaften von Graphen I

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Ist $(u, v) \in E$ bzw. $\{u, v\} \in E$ für $u, v \in V$, so heißt v adjazent zu u.
- Sei G gerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
  - die Anzahl der eintretenden Kanten in v heißt Eingangsgrad (englisch: indegree) von v,

$$indeg(v) = \left|\{v' : (v', v) \in E\}\right|$$

  - die Anzahl der austretetenden Kanten von v heißt Ausgangsgrad (englisch: outdegree) von v,

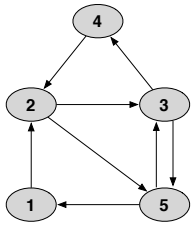
$$outdeg(v) = \left|\{v' : (v, v') \in E\}\right|$$

- Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
  - die Anzahl der eintretenden bzw. austretenden Kanten von v heißt Grad (englisch: degree) von v oder kurz $deg(v)$.

Eigenschaften von Graphen: Beispiel

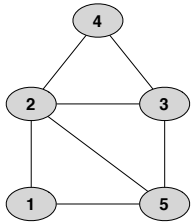
Beispiel gerichteter Graph:

- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 1
- Knoten 1 ist adjazent zu Knoten 5
- $outdeg(2) = 2$, $indeg(2) = 2$
- $indeg(1) = 1$, $outdeg(1) = 1$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Knoten 4 ist adjazent zu Knoten 2
- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 4
- $deg(2) = 4$
- $deg(1) = 2$



Eigenschaften von Graphen II

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Seien $v, v' \in V$. Ein Pfad von v nach v' ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \ldots, v_k) \subset V$ mit
  - $v_0 = v$, $v_k = v'$
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ bzw. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, k-1$

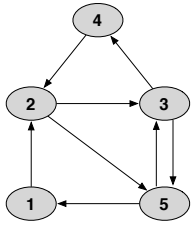
  k heißt Länge des Pfades.
- Ein Pfad heißt einfach, falls alle Knoten des Pfades paarweise verschieden sind.

Gibt es einen Pfad von u nach v, so heißt v erreichbar von u.

Eigenschaften von Graphen II: Beispiel

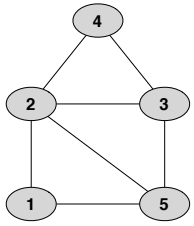
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 2
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Pfad der Länge 3, aber nicht einfach
- 5 ist erreichbar von 1



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(5, 2, 4, 3, 2)$ ist ein Pfad der Länge 4, aber nicht einfach
- $(1, 2, 3, 4)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 3
- 3 ist erreichbar von 1



Eigenschaften von Graphen III

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- Ein Pfad $(v_0, \ldots, v_k)$ heißt Zyklus, falls
  - $v_0 = v_k$ und
  - der Pfad mindestens eine Kante enthält
- Ein Zyklus $(v_0, \ldots, v_k)$ heißt einfach, falls $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschieden sind.

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

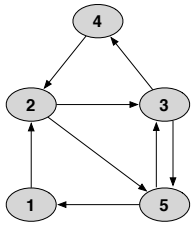
- Ein Pfad $(v_0, \ldots, v_k)$ heißt Zyklus, falls
  - $v_0 = v_k$
  - $k \geq 3$
  - $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschieden

Ein Graph ohne Zyklen heißt azyklisch.

Eigenschaften von Graphen III: Beispiel

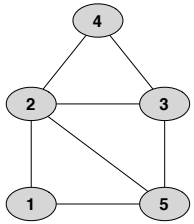
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 3, 5, 1)$ ist ein Zyklus, aber nicht einfach
- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein einfacher Zyklus



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein Zyklus
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Zyklus



Eigenschaften von Graphen IV

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G.
  - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "gegenseitig erreichbar"

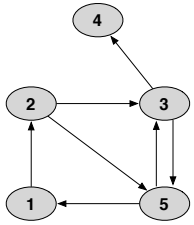
Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

- G heißt zusammenhängend, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G.
  - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "erreichbar von"

Eigenschaften von Graphen IV: Beispiel

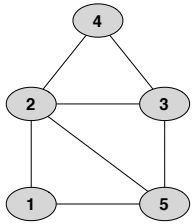
Beispiel gerichteter Graph:

- Graph ist nicht stark zusammenhängend (z.B. 3 nicht erreichbar von 4)
- starke Zusammenhangskomponenten: $\{1, 2, 3, 5\}$ und $\{4\}$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Graph ist zusammenhängend
- nur eine Zusammenhangskomponente: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



Darstellung von Graphen: Adjazenzmatrizen

Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die Adjazenzmatrix von G speichert die vorhandenen Kanten in einer $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

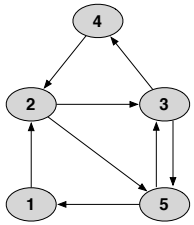
- $A(i, j) = 1$ falls Kante von Knoten v_i zu v_j existiert
- $A(i, j) = 0$ falls keine Kante von Knoten v_i zu v_j existiert

für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Adjazenzmatrizen: Beispiele

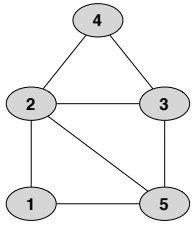
Beispiel gerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel ungerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Adjazenzmatrizen: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll wenn der Graph nahezu vollständig ist (d.h. fast alle möglichen Kanten tatsächlich in E liegen)
- Speicherkomplexität: $O(|V|^2)$
- bei ungerichteten Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch
- bei gewichteten Graphen kann man statt der 1 in der Matrix das Gewicht der Kante eintragen

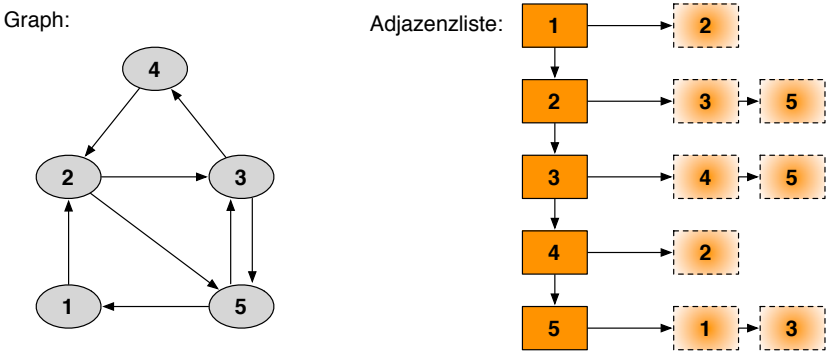
Darstellung von Graphen: Adjazenzlisten

Adjazenzliste

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph. Eine Adjazenzliste von G sind $|V| + 1$ verkettete Listen, so daß

- die erste Liste alle Knoten enthält
- für jeden Knoten v eine Liste angelegt wird mit allen Knoten, die durch eine von v austretende Kante zu erreichen sind

Adjazenzliste: Beispiel



Adjazenzliste: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzlisten zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll bei dünn besetzten Graphen mit wenigen Kanten
- Speicherkomplexität: $O(|V| + |E|)$
- bei ungerichteten Graphen gleiches Verfahren
  - allerdings muß jede Kante zweimal gespeichert werden
- bei gewichteten Graphen kann man die Gewichte mit in den verketteten Listen der jeweiligen Knoten speichern

Komplexität der Darstellungen

Sei $G = (V, E)$ Graph.

Operation	Adjazenzmatrix	Adjazenzliste
Kante einfügen	$O(1)$	$O(\|V\|)$
Kante löschen	$O(1)$	$O(\|V\|)$
Knoten einfügen	$O(\|V\|^2)$	$O(1)$
Knoten löschen	$O(\|V\|^2)$	$O(\|V\| + \|E\|)$

- falls Größe im Vorhinein bekannt, kann Knoten löschen/einfügen bei Adjanzenzmatrix effizienter implementiert werden
- auch die Adjanzenzlisten lassen sich effizienter implementieren, z.B. auf Kosten von Speicher (sequentielle Liste statt verkettete Liste)
- Löschen von Knoten ist immer aufwendig, da auch alle Kanten von/zu diesem Knoten gelöscht werden müssen

Algorithmen auf Graphen

Ausblick auf Algorithmen auf Graphen:

- Traversierung (Durchlaufen) von allen Knoten
  - Depth-First Search (DFS)
  - Breadth-First Search (BFS)
- kürzester Pfad zwischen Knoten in Graphen
- minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST)

→ siehe Kapitel 9!

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen
- Graphen
- Bäume

Bäume

Bäume sind alltägliches Mittel zur Strukturierung:

- Stammbaum
- Hierarchie in Unternehmen
- Systematik in der Biologie
- etc.

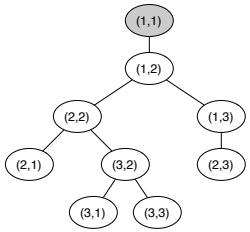
In Informatik:

- Bäume sind spezielle Graphen
- Wurzel oben!

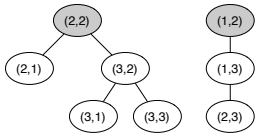
Definition Wald/Baum

Definition: Wald und Baum

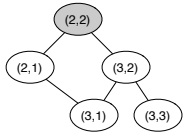
- Ein azyklischer ungerichteter Graph heißt auch Wald.
- Ein zusammenhängender, azyklischer ungerichteter Graph heißt auch Baum.



Baum



Wald



kein Baum!

Eigenschaften von Bäumen

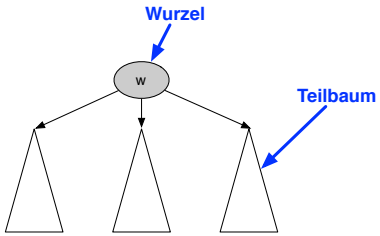
Sei $G = (V, E)$ ein Baum.

- jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ ist durch einen einzigen Pfad verbunden
- G ist zusammenhängend, aber wenn eine Kante aus E entfernt wird, ist G nicht mehr zusammenhängend
- G ist azyklisch, aber wenn eine Kante zu E hinzugefügt wird, ist G nicht mehr azyklisch
- es ist $|E| = |V| - 1$

Wurzel von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein Baum.

- genau ein Knoten $w \in V$ wird als Wurzel ausgezeichnet
- entfernt man w erhält man einen Wald von Teilbäumen

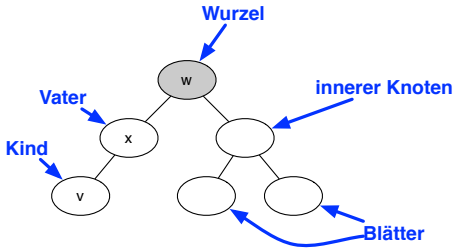


Hinweis: manchmal wird zwischen "freiem" und "gewurzeltem" Baum unterschieden!

Weitere Begriffe bei Bäumen I

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

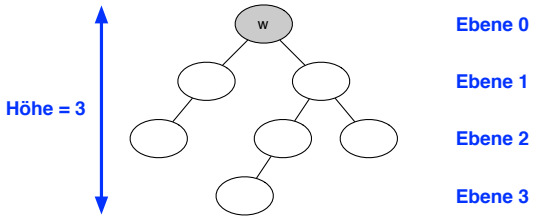
- jeder Knoten $v \in V$ mit $v \neq w$ ist mit genau einer Kante mit seinem Vaterknoten $x \in V$ (oder: Vorgänger) verbunden
- v wird dann als Kind (oder: Sohn, Nachfolger) von $x \in V$ bezeichnet
- ein Knoten ohne Kinder heißt Blatt, alle anderen Knoten heißen innere Knoten



Weitere Begriffe bei Bäumen II

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

- Anzahl der Kinder von Knoten $x \in V$ heißt auch Grad von x
  - Achtung: der Grad in dem ungerichteten Graph G ist anders definiert!
- Länge des Pfades von Wurzel w zu Knoten $x \in V$ heißt Tiefe von x
- alle Knoten gleicher Tiefe bilden eine Ebene des Baumes G
- die Höhe des Baumes G ist die maximale Tiefe der Knoten von G
  - Achtung: manchmal ist Höhe auch als Anzahl der Ebenen definiert

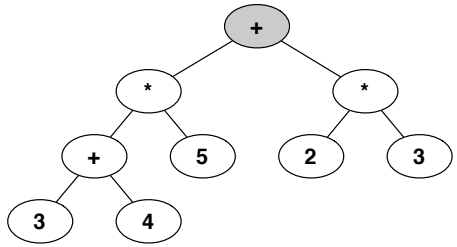


Bäume: Beispiele

- arithmetischer Ausdruck

$$(3 + 4) * 5 + 2 * 3$$

repräsentiert als Baum:



- hierarchisches Dateisystem
  - Windows z.B. "C:\"
  - Unix "/"
- Suchbaum → Kapitel 8

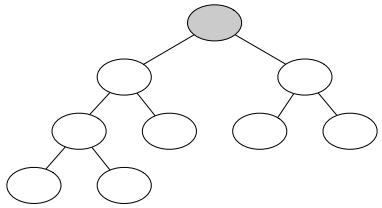
Besondere Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

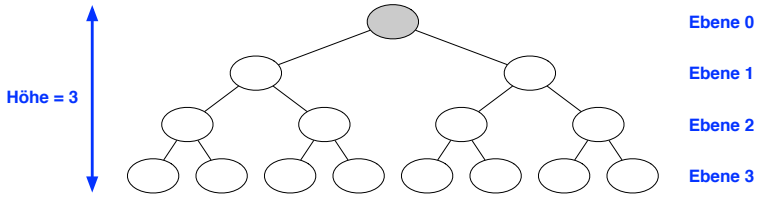
- sind die Kinder jedes Knotens in bestimmter Reihenfolge angeordnet, heißt G geordneter Baum
- ist die Anzahl n der Kinder jedes Knotens vorgegeben, heißt G n-ärer Baum

Wichtiger Spezialfall:

- ist G geordnet und hat jeder Knoten maximal zwei Kinder, heißt G Binärbaum



Beispiel: Binärbaum



Binärbaum mit Höhe 3, 8 Blättern und 7 inneren Knoten.

- Binärbaum heißt vollständig, wenn jede Ebene die maximale Anzahl an Knoten enthält
- ein vollständiger Binärbaum der Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten, davon 2^k Blätter

Darstellung von Bäumen: als Graph

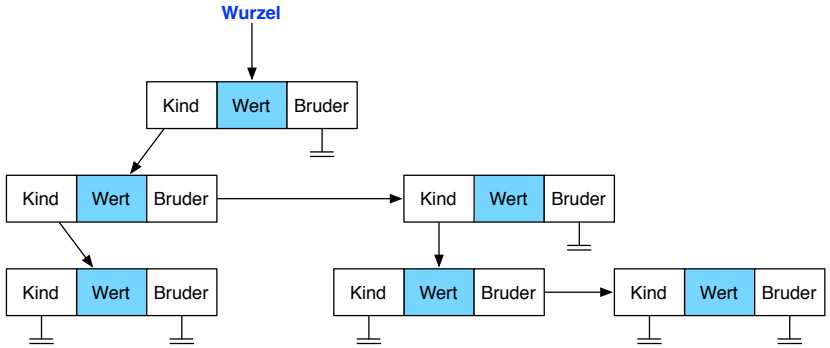
Bäume sind Graphen $\rightarrow$ Darstellung als

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzliste

$\rightarrow$ leider meist nicht effizient (sowohl Laufzeit als auch Speicher)

Darstellung von Bäumen: verkettete Liste

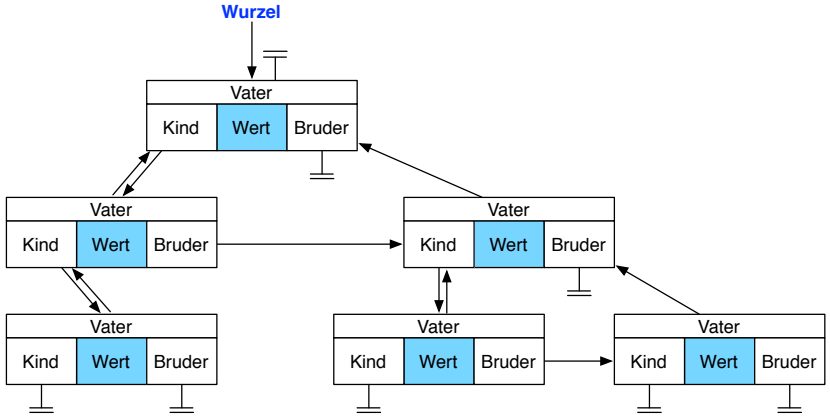
Darstellung mit angepassten verketteten Listen:



Nachteil: nur Navigation "nach unten" möglich

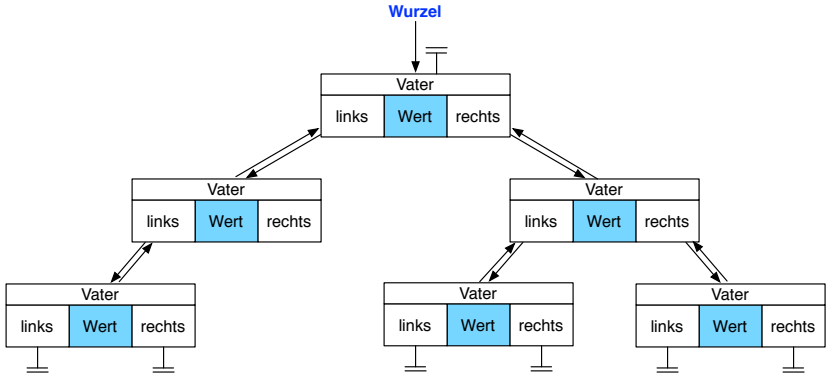
Darstellung von Bäumen: doppelt verkettete Liste

Darstellung mit angepassten doppelt verketteten Listen:



Darstellung von Binärbäumen

Darstellung direkt mit linkem/rechtem Kind (doppelt verkettet):



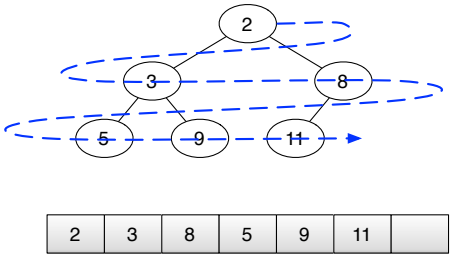
Binärbaum als sequentielle Liste I

- vollständiger Binärbaum Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten

  $\rightarrow$ speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in sequentieller Liste (Array)

  $\rightarrow$ maximale Grösse von Array: $2^{k+1} - 1$

- Beispiel fast vollständiger Binärbaum:

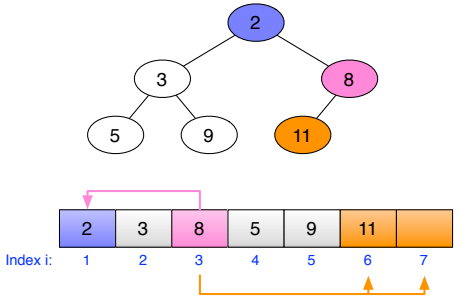


Binärbaum als sequentielle Liste II

- Wurzel: an Position 1
- Knoten an Position i:
  - Vater-Knoten an Position $\lfloor i/2 \rfloor$
  - linkes Kind an Position $2i$;
  - rechtes Kind an Position $2i + 1$

Pseudocode:

- **vater**(i): **return** $\lfloor i/2 \rfloor$;
- **links**(i): **return** $2i$;
- **rechts**(i): **return** $2i + 1$;

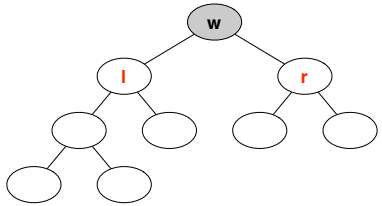


Traversierung von Binärbäumen

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

In welcher Reihenfolge durchläuft man G?

- Wurzel zuerst
- danach linker oder rechter Kind-Knoten l bzw. r?
- falls l: danach Kind-Knoten von l oder zuerst r?
- falls r: danach Kind-Knoten von r oder zuerst l?



→ falls zuerst in die Tiefe: Depth-first search (DFS)

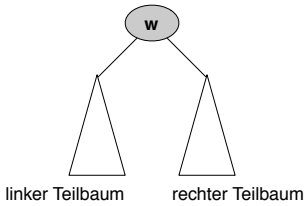
→ falls zuerst in die Breite: Breadth-first search (BFS)

DFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Tiefensuche (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

1. Pre-order Reihenfolge
   - besuche Wurzel
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - durchlaufe rechten Teilbaum
2. In-order Reihenfolge
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - besuche Wurzel
   - durchlaufe rechten Teilbaum
3. Post-order Reihenfolge
   - durchlaufe linken Teilbaum
   - durchlaufe rechten Teilbaum
   - besuche Wurzel



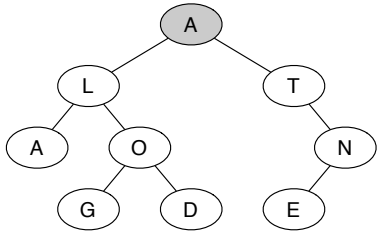
Pre-order Traversierung

Pre-order Reihenfolge:

- besuche Wurzel
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, A, O, G, D, T, N, E



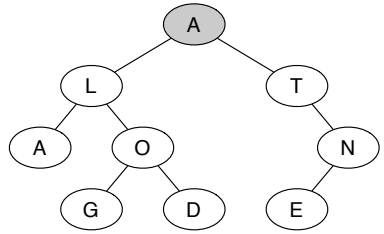
In-order Traversierung

In-order Reihenfolge:

- durchlaufe linken Teilbaum
- besuche Wurzel
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, G, O, D, A, T, E, N



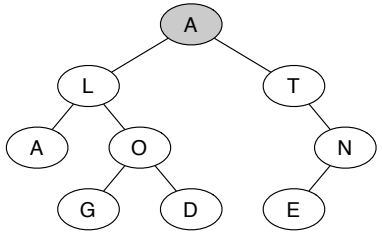
Post-order Traversierung

Post-order Reihenfolge:

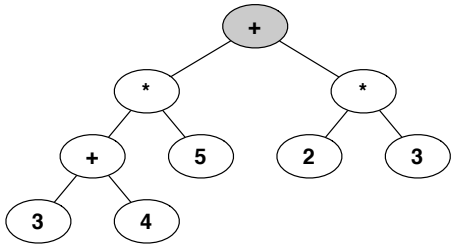
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum
- besuche Wurzel

Beispiel:

A, G, D, O, L, E, N, T, A



Beispiel: Arithmetischer Term



Traversierung:

- Pre-order: + * + 3 4 5 * 2 3
- In-order: 3 + 4 * 5 + 2 * 3
- Post-order: 3 4 + 5 * 2 3 * +

Implementierung DFS Traversierung

Datenstruktur:

- Algorithmus preorder:

```
preorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    besuche(knoten);
    preorder(knoten.links);
    preorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus inorder:

```
inorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    inorder(knoten.links);
    besuche(knoten);
    inorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus postorder:

```
postorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    postorder(knoten.links);
    postorder(knoten.rechts);
    besuche(knoten);
```

- rekursive Algorithmen
- auf Call-Stack basiert

Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

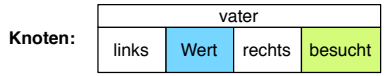
- Datenstruktur:

- Hilfsmittel: Stack von Knoten "knotenStack"

```
postorderIterativ(wurzelKnoten):
  knotenStack.push(wurzelKnoten);
  while ( !knotenStack.isEmpty() ) {
    knoten = knotenStack.top();
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
      knotenStack.push(knoten.links);
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
      knotenStack.push(knoten.rechts);
    else {
      besuche(knoten);
      knoten.besucht = true;
      knotenStack.pop();
    }
  }
```

Implementierung ohne Rekursion und ohne Stack

- Datenstruktur:



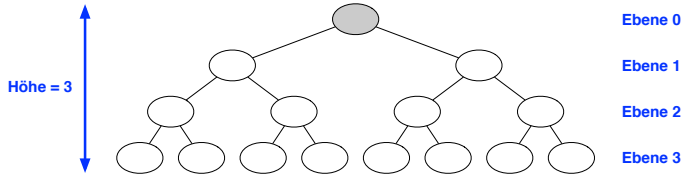

```
postorderIterativeOhneStack(wurzelKnoten):
  knoten = wurzelKnoten;
  while (true) {
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
      knoten = knoten.links;
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
      knoten = knoten.rechts;
    else {
      besuche(knoten);
      knoten.besucht = true;
      if (knoten.vater == null) break;
      else knoten = knoten.vater;
    }
  }
```


BFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Breitensuche (Breadth-first search, BFS):

- besuche Wurzel
- für alle Ebenen von 1 bis Höhe
  - besuche alle Knoten aktueller Ebene



Implementierung BFS Traversierung

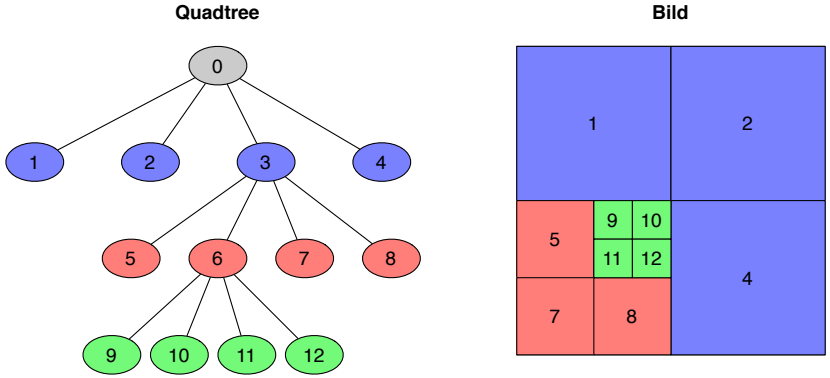
- Datenstruktur:

- Hilfsmittel: Queue von Knoten "knotenQueue"

```
breitensuche(wurzelKnoten):
  knotenQueue = leer;
  knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);
  while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {
    knoten = knotenQueue.dequeue();
    besuche(knoten);
    if (knoten.links != null)
      knotenQueue.enqueue(knoten.links);
    if (knoten.rechts != null)
      knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);
  }
```

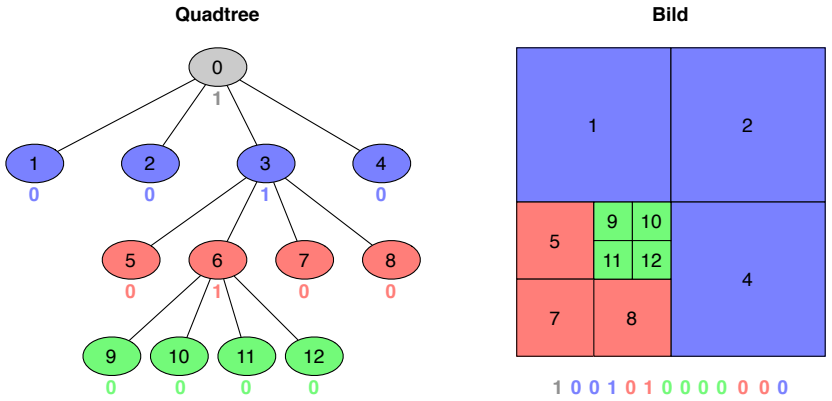

Anwendung: Quadtree I

- 4-närer Baum heißt Quadtree



Anwendung: Quadtree II

- Codierung des Baumes mit Binärziffern



Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen
  Graphen
  Bäume