

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Notizen

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Notizen

Suchen

Such-Algorithmen

Gegeben sei eine Menge M von Objekten. Ein **Such-Algorithmus** sucht in M nach Mustern oder nach Objekten mit bestimmten Eigenschaften.

Beispiele:

- Suche von Adresse von Person in Telefonbuch
- Suche nach Webseite mit Google Search
- Suche nach Produkt auf Amazon
- Suche nach ähnlichen Mustern: Viren-Scanner
- Suche nach Mustern: Bilderkennung
- Suche nach Tumoren in medizinischen Bildern von Patienten

3

Notizen

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n , das Such-Schlüssel enthält.

- **einfachster Such-Algorithmus:** Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch genannt: **Lineare Suche**
- **Algorithmus:**

Input: Array $A[1..n]$ mit Schlüsseln, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

linearSearch(A, k):

```
i = 1;
while ( (A[i] != k) && (i <= n) ) {
    i = i + 1;
}
if (i <= n) return i; // fündig geworden
else return 0; // nichts gefunden
```

- auch anwendbar für verkettete Listen

4

Notizen

Lineare Suche: Komplexität

5	7	3	9	11	2
---	---	---	---	----	---

Laufzeit $T(n)$ von `linearSearch`:

- **best-case**: sofort gefunden, $T(n) = 1$, d.h. $T(n) = O(1)$
- **worst-case**: alles durchsuchen, $T(n) = n$, d.h. $T(n) = O(n)$
- **im Mittel**: Annahme jede Anordnung der Such-Schlüssel ist gleich wahrscheinlich:

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$$

d.h. $T(n) = O(n)$

- einfacher Algorithmus, aber nicht besonders effizient

Notizen

5

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche
- Binäre Suche**
- Binäre Suchbäume
- Balancierte Suchbäume

Notizen

6

Binäre Suche

2	3	5	7	9	11
---	---	---	---	---	----

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- falls häufiger gesucht wird: Array A **vorsortieren!** $O(n \log n)$
- Such-Algorithmus mittels **Divide & Conquer**
Algorithmen-Muster:
 - **Divide**: vergleiche mittleres Element mit gesuchtem
 - **Rekursion**: falls kleiner, Rekursion auf linker Hälfte
 - **Rekursion**: falls grösser, Rekursion auf rechter Hälfte
 - **Conquer**: falls gleich, liefere Ergebnis

7

Notizen

Binäre Suche: Algorithmus rekursiv

Input: Array A[1..n] sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
low, high: unterer/oberer Index von aktueller Array-Hälfte

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

binarySearch(A, k, low, high):

```
if (low > high) return 0; // nichts gefunden
middle = [(low + high) / 2];
if (A[middle] == k) return middle; // fündig geworden
if (A[middle] > k)
    return binarySearch(A, k, low, middle-1);
else
    return binarySearch(A, k, middle+1, high);
```

- **erster Aufruf** mit **binarySearch**(A, k, 1, n)

8

Notizen

Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array A[1..n] sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit A[i] = k (sonst 0)

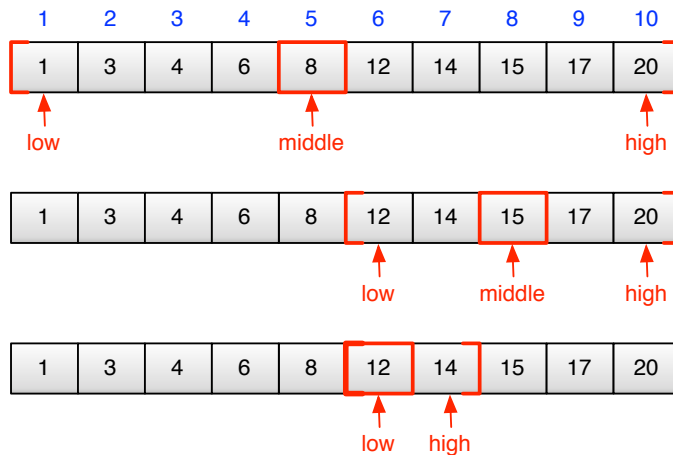
binarySearchIterative(A, k):

```
low = 1;
high = n;
while (low <= high) {
  middle = ⌊ (low + high) / 2 ⌋;
  if (A[middle] == k) return middle; // fündig geworden
  if (A[middle] > k)
    high = middle - 1;
  else
    low = middle + 1;
}
return 0; // nichts gefunden
```

Notizen

Binäre Suche: Beispiel

- Gesucht: Schlüssel 12



Notizen

Binäre Suche: Komplexität

- Komplexität: $O(\log n)$
 - errechnet z.B. via Rekursionsbaum wie bei MergeSort
- Beispiel-Laufzeiten:

Algorithmus	$n = 10$	$n = 1000$	$n = 10^6$
Lineare Suche ($n/2$)	≈ 5	≈ 500	≈ 500.000
Binäre Suche ($\log_2 n$)	≈ 3.3	≈ 9.9	≈ 19.9

- sehr effizienter Such-Algorithmus!
- falls sich Daten oft ändern, muss jeweils neu sortiert werden
 - besser: Suchbäume

Notizen

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche
- Binäre Suche
- Binäre Suchbäume**
- Balancierte Suchbäume

Notizen

Binärer Suchbaum

Definition binärer Suchbaum

Sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch \leq, \geq geordnet.

G heißt binärer Suchbaum, falls für alle inneren Knoten $v \in V$ gilt

- für alle Knoten x im linken Teilbaum $v.left$ gilt

$$key(x) \leq key(v)$$

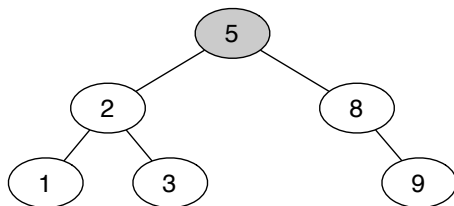
- für alle Knoten y im rechten Teilbaum $v.right$ gilt

$$key(y) \geq key(v)$$

Notizen

13

Binärer Suchbaum: Beispiel



- binärer Baum muss nicht vollständig sein!
- Repräsentation üblicherweise mit verketteter Liste (geht aber auch als sequentielle Liste)

Notizen

14

Binärer Suchbaum: Operationen

Operationen auf binärem Suchbaum:

- **Suchen:** finde Element mit Schlüssel k
- **Minimum/Maximum:** finde Element mit minimalem/
maximalem Schlüssel
- **Einfügen:** füge Element zum Suchbaum hinzu
- **Löschen:** entferne Element aus Suchbaum

Notizen

15

Binärer Suchbaum: Suchen (rekursiv)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

search(v , k):

```
if ( $v == \text{null}$ ) return null; // hier gibt es nichts!  
if ( $\text{key}(v) == k$ ) return  $v$ ; // fündig geworden!  
if ( $k < \text{key}(v)$ )  
    search( $v.\text{left}$ ,  $k$ );  
else  
    search( $v.\text{right}$ ,  $k$ );
```

- **erster Aufruf** mit **search**(w , k)
- falls v kein linkes/rechtes Kind hat, ist das durch null markiert

Notizen

16

Binärer Suchbaum: Suchen (iterativ)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

searchIterative(v, k):

```
while ( (v != null) && (key(v) != k) ) {  
  if (k < key(v))  
    v = v.left;  
  else  
    v = v.right;  
}  
return v;
```

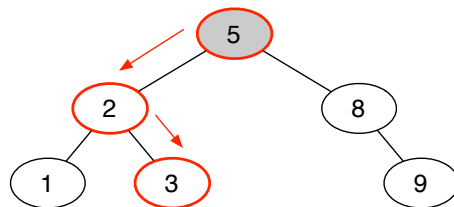
- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Notizen

17

Binärer Suchbaum: Suchen

- Beispiel: suche Schlüssel 3



Notizen

18

Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum

Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

Output: Knoten mit **minimalem** Schlüssel

```
minimum(v):  
  while (v.left != null)  
    v = v.left;  
  return v;
```

Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

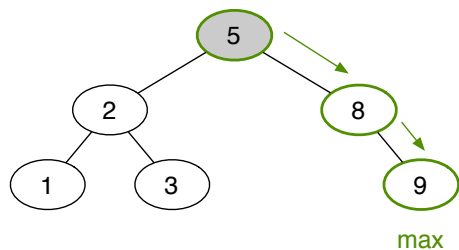
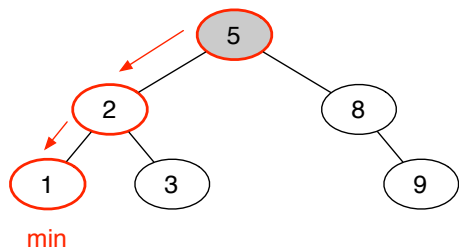
Output: Knoten mit **maximalem** Schlüssel

```
maximum(v):  
  while (v.right != null)  
    v = v.right;  
  return v;
```

Notizen

19

Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum



- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Notizen

20

Binärer Suchbaum: Einfügen

Input: Wurzel v des Baumes, x einzufügendes Element

insert(v, x):

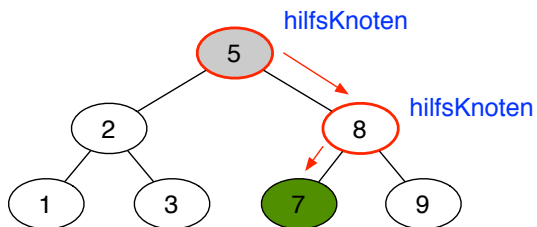
```
if ( $v == \text{null}$ ) { // Baum leer
   $v = x$ ; return;
}
while ( $v \neq \text{null}$ ) {
  hilfsKnoten =  $v$ ;
  if ( $\text{key}(x) < \text{key}(v)$ )
     $v = v.\text{left}$ ;
  else
     $v = v.\text{right}$ ;
}
 $x.\text{vater} = \text{hilfsKnoten}$ ;
if ( $\text{key}(x) < \text{key}(\text{hilfsKnoten})$ )
   $\text{hilfsKnoten}.\text{left} = x$ ;
else
   $\text{hilfsKnoten}.\text{right} = x$ ;
```

Notizen

21

Binärer Suchbaum: Einfügen

- Einfügen von Knoten mit Schlüssel 7:



- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Notizen

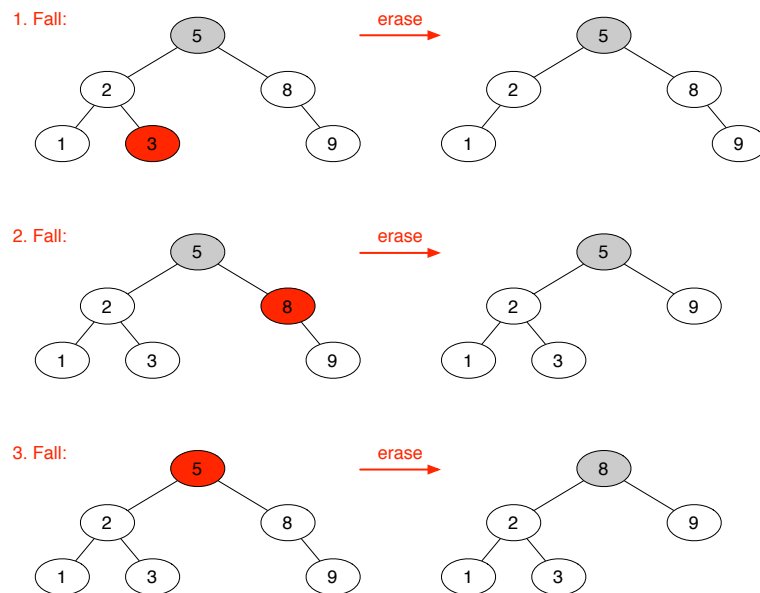
22

Binärer Suchbaum: Löschen

- Löschen von Knoten x in Suchbaum ist etwas komplizierter
- Drei Fälle:
 - ① x ist Blatt: einfach entfernen
 - ② x hat nur ein Kind: setze Kind an Stelle von x
 - ③ x hat zwei Kinder: setze **minimales** Element von **rechtem** Teilbaum an Stelle von x
(alternativ: maximales Element von linkem Teilbaum)
- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Notizen

Binärer Suchbaum: Löschen



Notizen

Binärer Suchbaum: Löschen

Input: Wurzel v des Baumes, x zu löschendes Element

erase(v, x):

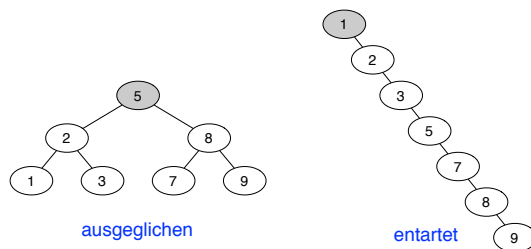
```
if (x ist Blatt) { // 1. Fall
  if (x ist linkes Kind) x.vater.left = null;
  else x.vater.right = null;
} else { // 2. Fall
  if (x.left == null) {
    if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.right;
    else x.vater.right = x.right;
  } else {
    if (x.right == null) {
      if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.left;
      else x.vater.right = x.left;
    } else { // 3. Fall
      kind = minimum(x.right);
      ersetze x durch kind;
    }
  }
}
```

Notizen

25

Binärer Suchbaum: Effizienz

- Suchbäume mit n Knoten sind sehr effizient
 - aber nur wenn sie ausgeglichen ("balanciert") sind!
- best-case Komplexität: $O(\log n)$
- worst-case Komplexität: $O(n)$



- Ausweg: automatisch balancierte Suchbäume (z.B. AVL Bäume, Rot-Schwarz Bäume, B-Bäume)

Notizen

26

Programm heute

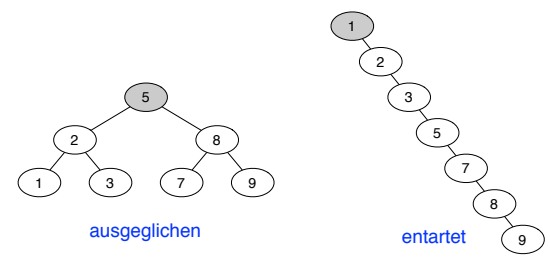
7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche
- Binäre Suche
- Binäre Suchbäume
- Balancierte Suchbäume

Notizen

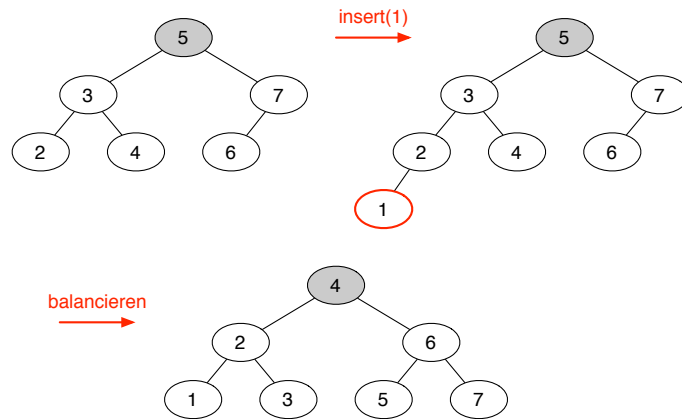
Entartete Suchbäume



- Wie können Suchbäume entarten?
 - Beispiel: einfügen aus sortierter Liste
- **Erwünscht:** Suchbäume, die immer **ausgeglichen** (balanciert) bleiben
 - **AVL-Bäume**, Rot-Schwarz-Bäume, B-Bäume etc.

Notizen

Beispiel: Balancieren von Suchbaum



- hier müssen zum Balancieren **alle** Knoten bewegt werden → Effizienz-Problem

Notizen

29

Ansätze für balancierte Suchbäume

- Binärbaum und gleichzeitig balanciert ist ineffizient
- **Idee:** Aufweichen eines der beiden Kriterien!
- **Abschwächung** des Kriteriums **balanciert**
 - Beispiel: AVL-Bäume
- **Abschwächung** des Kriteriums **Binärbaum**
 - Mehrweg-Bäume, Beispiel: B-Bäume
 - mehrere Verzweigungen kodiert als Binärbaum, Beispiel: Rot-Schwarz-Bäume

Notizen

30

Definition AVL-Baum

Definition AVL-Baum

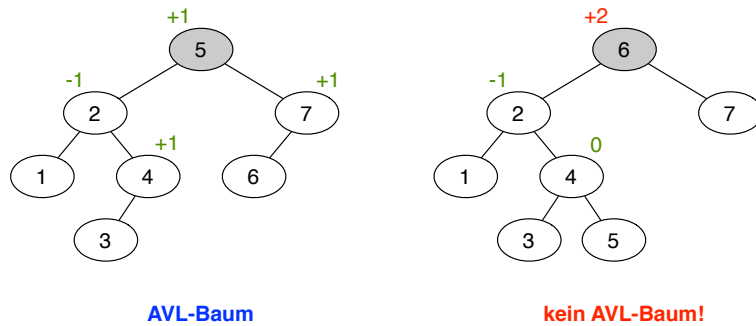
Ein binärer Suchbaum $G = (V, E)$ mit Wurzel $w \in V$ heißt **AVL-Baum**, falls er die **AVL-Bedingung** erfüllt:

- für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt: Höhe von linkem und rechtem Teilbaum von v unterscheidet sich maximal um 1.
- benannt nach G.M. Adelson-Velskii und E.M. Landis (russische Mathematiker)
- AVL-Bedingung nur für Wurzel w ist nicht ausreichend
 - beide Teilbäume der Wurzel können entartet sein

Notizen

31

AVL-Baum: Beispiel



- linkes Beispiel: AVL-Bedingung überall erfüllt
- rechtes Beispiel: AVL-Bedingung in Wurzel verletzt

Notizen

32

AVL Baum: Operationen

- Operationen `search`, `minimum`, `maximum` unverändert von binärem Suchbaum
- Operationen `insert`, `erase` müssen verändert werden, damit die AVL-Bedingung erhalten wird

Notizen

33

AVL-Baum: Einfügen

Einfüge-Operation bei AVL-Baum:

- `insert` wie in binärem Suchbaum
- nun kann AVL-Bedingung verletzt sein:
 - $balance = height(left) - height(right)$
 - AVL-Bedingung: $balance \in \{-1, 0, +1\}$
 - nach `insert`: $balance \in \{-2, -1, 0, 1, +2\}$
- reparieren der AVL-Bedingung mittels `Rotation` und `Doppelrotation`

Notizen

34

Einfügen / Verletzung AVL-Bedingung

Notizen

Fallunterscheidung Verletzung AVL-Bedingung bei Einfügen:

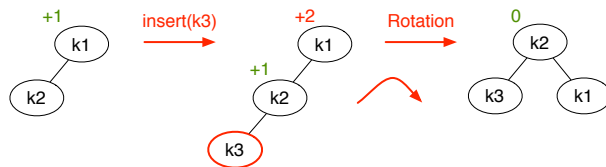
- 1 Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes
- 2 Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes
- 3 Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes
- 4 Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes

1 und 4 sind symmetrische Fälle, sowie 2 und 3

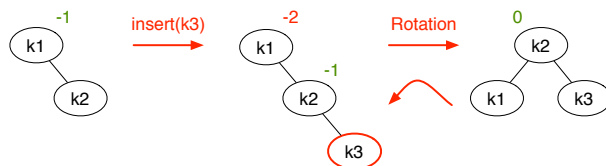
AVL-Baum: Rotation

Notizen

1 Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes:

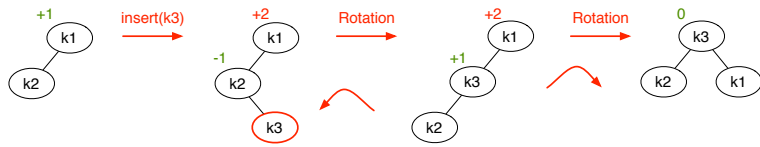


4 Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes:

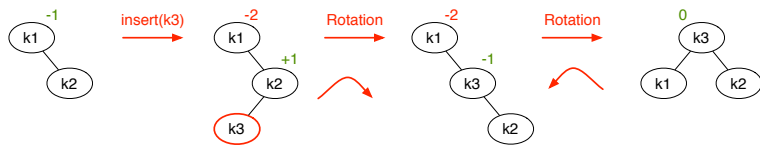


AVL-Baum: Doppelrotation

2 Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes:

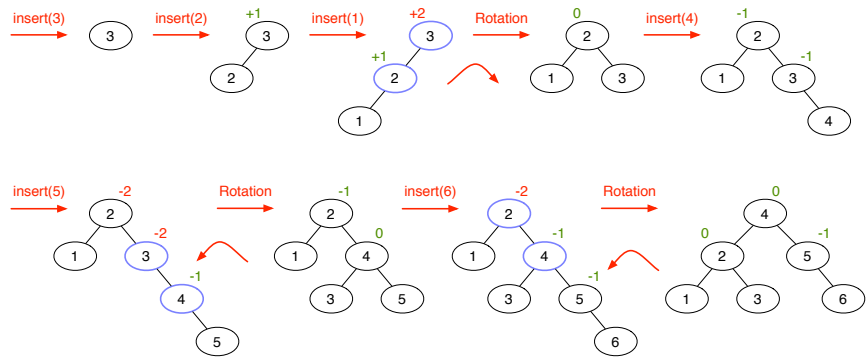


3 Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes:



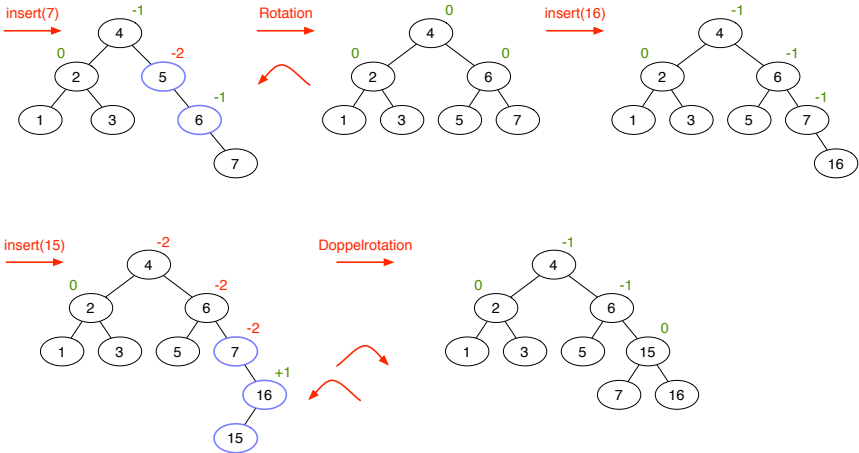
Notizen

AVL-Baum: Beispiel-Sequenz I



Notizen

AVL-Baum: Beispiel-Sequenz II



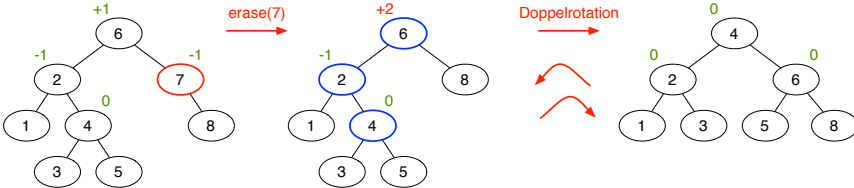
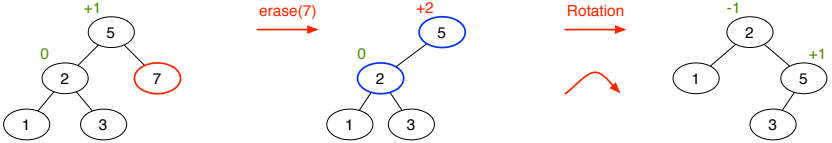
Notizen

AVL-Baum: Löschen

- Löschen-OpL-Baum:
- erase wie in binärem Suchbaum
 - Verletzung der AVL-Bedingung in Teilbäumen durch Rotationen reparieren
 - bei jedem Eltern-Knoten wieder AVL-Bedingungen reparieren, bis hin zur Wurzel

Notizen

AVL-Baum: Beispiel-Sequenz III



41

Notizen

Zusammenfassung

- ⑦ Fortgeschrittene Datenstrukturen
- ⑧ Such-Algorithmen
 - Lineare Suche
 - Binäre Suche
 - Binäre Suchbäume
 - Balancierte Suchbäume

Notizen

42