

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Wörterbücher

Wörterbuch

Ein **Wörterbuch** (auch genannt Dictionary oder Assoziatives Array) speichert eine **Menge von Elementen** M . Jedes Element $e \in M$ wird durch einen **Schlüssel** $key(e)$ eindeutig identifiziert.

Unterstützte Operationen sind:

- **search(key k)**: finde $e \in M$ mit $key(e) = k$
- **insert(Element e)**: erweitere M um e
- **erase(key k)**: entferne e aus M , wobei $key(e) = k$

Wörterbücher

Wörterbuch

Ein **Wörterbuch** (auch genannt Dictionary oder Assoziatives Array) speichert eine **Menge von Elementen** M . Jedes Element $e \in M$ wird durch einen **Schlüssel** $key(e)$ eindeutig identifiziert.

Unterstützte Operationen sind:

- **search(key k):** finde $e \in M$ mit $key(e) = k$
- **insert(Element e):** erweitere M um e
- **erase(key k):** entferne e aus M , wobei $key(e) = k$

Beispiele:

- **Telefonbuch**
 - **Element:** Name, Adresse und Telefonnummer
 - **Schlüssel:** Name
- **Compiler-Symboltabelle**
 - **Element:** Bezeichner und Typ-/Speicher-Informationen
 - **Schlüssel:** Bezeichner

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit linearer Suche

- search $O(n)$, insert $O(1)$, erase $O(n)$ → search: $O(n)$ + aus verk. Liste raus $O(1)$

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit **linearer Suche**
 - **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$
- M als sortierte verkettete Liste mit **binärer Suche**
 - **search** $O(\log n)$, **insert** $O(n)$, **erase** $O(\log n)$

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit **linearer Suche**

- **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$

search + falschl. löschen

$O(n) + O(1)$

- M als sortierte verkettete Liste mit **binärer Suche**

- **search** $O(\log n)$, **insert** $O(n)$, **erase** $O(\log n)$

$O(\log n) + O(1)$

- M als **AVL-Suchbaum**

- **search** $O(\log n)$, **insert** $O(\log n)$, **erase** $O(\log n)$

$O(\log n) + O(\log n)$

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit **linearer Suche**
 - search $O(n)$, insert $O(1)$, erase $O(n)$
- M als sortierte verkettete Liste mit **binärer Suche**
 - search $O(\log n)$, insert $O(n)$, erase $O(\log n)$
- M als **AVL-Suchbaum**
 - search $O(\log n)$, insert $O(\log n)$, erase $O(\log n)$
- M als **Hashtabelle**
 - search $O(1)$, insert $O(1)$, erase $O(1)$

Worst =
best case

im Mittel!

Worst case ist evtl.
schlechter!

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit **linearer Suche**
 - **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$
- M als sortierte verkettete Liste mit **binärer Suche**
 - **search** $O(\log n)$, **insert** $O(n)$, **erase** $O(\log n)$
- M als **AVL-Suchbaum**
 - **search** $O(\log n)$, **insert** $O(\log n)$, **erase** $O(\log n)$
- M als **Hashtabelle**
 - **search** $O(1)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(1)$ **im Mittel!**
 - **Worst case:** **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$

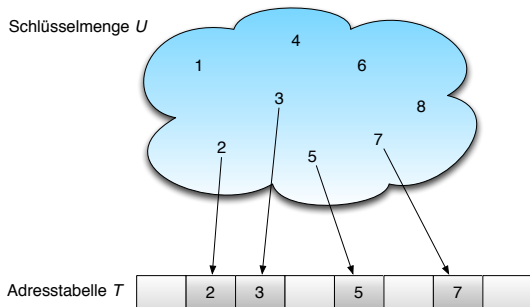
Adresstabellen

Sei M Wörterbuch.

- Setze $U := \{key(e) : e \in M\}$ die Menge aller Schlüssel
- Annahme: $key(e_1) \neq key(e_2)$ für alle $e_1 \neq e_2, e_1, e_2 \in M$

Wörterbuch mit Adresstabelle:

- sequentielle Liste T der Länge $|U|$



Operationen auf Adresstabellen

Adresstabelle T mit Länge $|U|$.

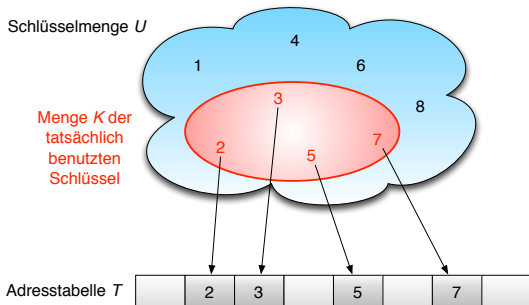
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
Output: Element mit Schlüssel k
search(T, k):
 return $T[k]$;
- **Input:** Tabelle T , Element e
insert(T, e):
 $T[\text{key}(e)] = e$;
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
erase(T, k):
 $T[k] = \text{null}$;

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$

Speicherkomplexität: $O(|U|)$ → Problem falls U groß!

Reduktion von Adresstabellen mittels Hashfunktion

- **Beobachtung:** Menge K der tatsächlich benutzten Schlüssel aus U oft klein

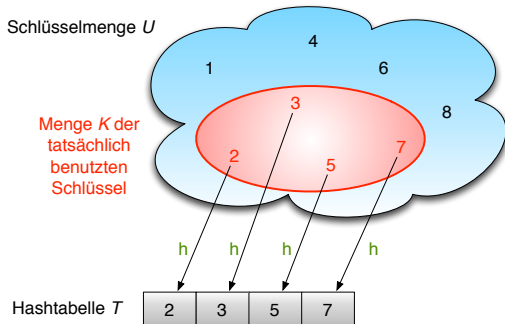


- **Idee:** wende **Hashfunktion** h auf $key(e)$ an, um Adresstabelle auf $|K|$ Elemente zu reduzieren \rightarrow **Hashtabelle**

Hashtabellen

Wörterbuch mit Hashtabelle:

- sequentielle Liste T mit Länge $m := |K|$
- Hashfunktion $h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$



Operationen auf Hashtabellen

Hashtabelle T mit Länge m und Hashfunktion h .

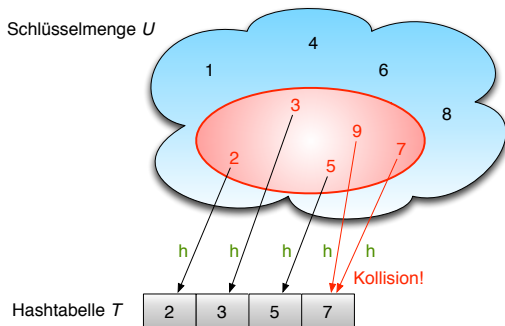
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
Output: Element mit Schlüssel k
search(T, k):
 return $T[h(k)];$
- **Input:** Tabelle T , Element e
insert(T, e):
 $T[h(\text{key}(e))] = e;$
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
erase(T, k):
 $T[h(k)] = \text{null};$

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$ (sofern h auch $O(1)$)

Speicherkomplexität: $O(m)$

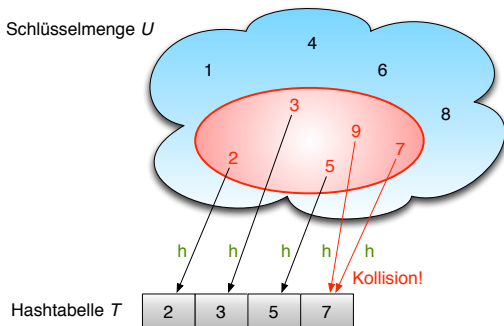
Kollisionen bei Hashtabellen

- **Problem:** falls h nicht injektiv \rightarrow **Kollision!**
 - h ist nie injektiv da $|K| < |U|$



Kollisionen bei Hashtabellen

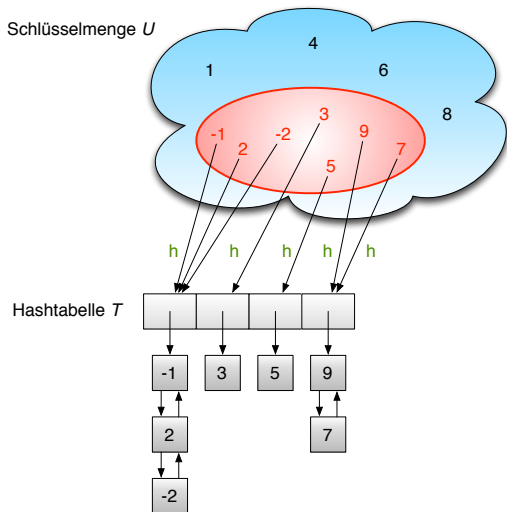
- **Problem:** falls h nicht injektiv \rightarrow **Kollision!**
 - h ist nie injektiv da $|K| < |U|$



- **Offene Fragen:**
 - Strategie zur Kollisionsauflösung
 - Wahl von h

Verkettung zur Kollisionauflösung

- jeder Slot in T enthält statt Element Referenz auf verkettete Liste
- bei **Kollision**: füge Element am Anfang der Liste ein $\rightarrow O(1)$
- **search** und **erase** müssen nun die Liste durchlaufen $\rightarrow O(1)$ gefährdet!



Analyse von Hashing mit Verkettung

Sei T Hashtabelle mit m Slots und n gespeicherten Elementen.

- Belegungsfaktor $\alpha = n/m$
 - mittlere Anzahl von Elementen in verketteten Listen
- es kann gezeigt werden:
Anzahl der Listendurchläufe ist $O(1+\alpha)$

Analyse von Hashing mit Verkettung

Sei T Hashtabelle mit m Slots und n gespeicherten Elementen.

- Belegungsfaktor $\alpha = n/m$
 - mittlere Anzahl von Elementen in verketteten Listen
- es kann gezeigt werden:
Anzahl der Listendurchläufe ist $O(1+\alpha)$
- Annahme: es ist $n = cm$ mit c Konstante, dann
 $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$

Analyse von Hashing mit Verkettung

Sei T Hashtabelle mit m Slots und n gespeicherten Elementen.

- **Belegungsfaktor** $\alpha = n/m$
 - mittlere Anzahl von Elementen in verketteten Listen
- es kann gezeigt werden:
Anzahl der Listendurchläufe ist $O(1+\alpha)$
- Annahme: es ist $n = cm$ mit c Konstante, dann
 $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$
- Komplexität von **search** und **erase**:
 - im Mittel: $O(1)$
 - worst case: $O(n)$

Hashfunktionen

Sei U Menge aller Schlüssel, T Hashtabelle mit m Einträgen.

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

- Anforderungen an Hashfunktion:
 - einfache Auswertung $O(1)$
 - möglichst wenige Kollisionen
- viele Ansätze, zum Beispiel:
 - Divisionsmethode
 - Multiplikationsmethode
 - universelles Hashing

konkrete Beispiele
abstrakter Ansatz
- Vereinbarung: $U = \mathbb{N}_0$ zur Vereinfachung
 - Strings z.B. via ASCII Code auf Zahlen abbilden

Divisionsmethode

Divisionsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die **Divisionsmethode** wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}, \quad h(k) = k \bmod m.$$

- **Beispiel:** $m = 12$, $k = 100$, dann ist $h(k) = 4$.
- **Problem:** geschickte Wahl von m
 - eher schlecht ist $m = 2^p$ (wertet nur die untersten p Bits von k aus)
 - eher gut ist oft eine Primzahl, nicht nahe an Zweierpotenz
 - Beispiel: erwartete Anzahl von Einträgen in Hashtabelle: 2000, gewünschter Belegungsfaktor 3 $\rightarrow m = 701$ geeignete Primzahl

Multiplikationsmethode

Multiplikationsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die **Multiplikationsmethode** wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}, \quad h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor,$$

wobei $A \in (0, 1)$ Konstante.

- Vorschlag von Knuth: $A \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$
- typische Wahl: $m = 2^p$
- **Beispiel:** $m = 2^{14} = 16384$, $A = 2654435769/2^{32}$, und $k = 123456$, dann ist $h(k) = 67$.

Universelles Hashing

- **Problem:** für jede feste Hashfunktion gibt es Eingabesequenzen, die worst-case Laufzeit $O(n)$ verursachen
- **Lösung:**

Universelles Hashing

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Sei \mathcal{H} eine endliche Menge von Hashfunktionen:

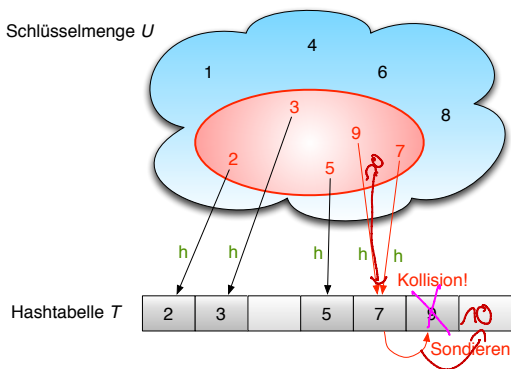
$$\mathcal{H} = \{h : U \rightarrow \{0, \dots, m-1\} \mid h \text{ Hashfunktion}\}.$$

\mathcal{H} heißt **universell**, falls für jedes Schlüsselpaar $k, l \in U$, $k \neq l$, die Anzahl der Hashfunktionen h mit $h(k) = h(l)$ durch $|\mathcal{H}|/m$ nach oben beschränkt ist.

- **Idee:** wähle zufällig ein $h \in \mathcal{H}$
- **Resultat:** Hashing mit Verkettung liefert im Mittel $O(1)$ Laufzeit der Wörterbuch-Operationen

Kollisionsauflösung mit offener Adressierung

- Idee: statt Verkettung bei Kollision, suche systematisch nächsten freien Platz in Hashtabelle → Sondieren



- Probleme:
 - Löschen von Elementen (*erase*) sehr problematisch
 - Falls Hashtabelle T voll, kein *insert* mehr möglich

Offene Adressierung

Sei U Schlüsselmenge, T Hashtabelle mit m Einträgen.

- erweitere Hashfunktion zu

$$h : U \times \{0, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

- fordere, daß **Sondierungssequenz**

$$(h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m - 1))$$

eine Permutation von $(0, \dots, m - 1)$ ist

→ jeder Slot in T ist mögliches Ziel für Schlüssel k

- viele mögliche Sondierungssequenzen, zum Beispiel:
 - lineares Sondieren
 - quadratisches Sondieren
 - doppeltes Hashing

Hashing: Ausblick

- nachträgliche **Änderung der Tabellengröße** aufwendig
 - erfordert neue Tabelle und neue Hashfunktion
 - übertragen aller Elemente (und Berechnung neuer Hashfunktion) nötig
- ist U statisch, so ist **perfektes Hashing** möglich
 - auch im worst-case sind alle Operationen $O(1)$
 - umgesetzt durch zwei Ebenen von universellem Hashing
 - Zeitgewinn erkauft durch zusätzlichen Speicherbedarf von $O(n)$

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

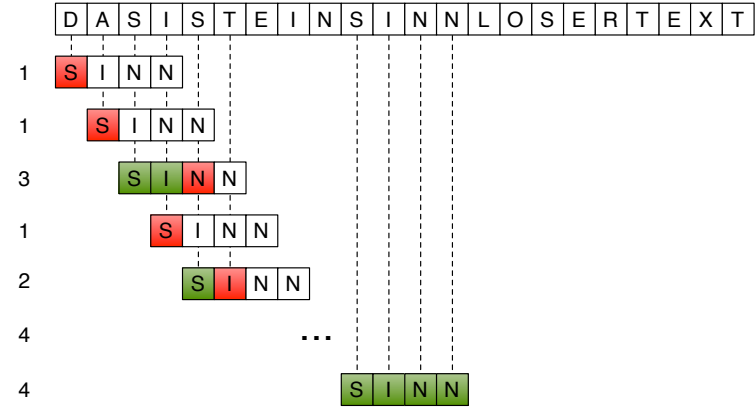
Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Suchen in Zeichenketten

- **Problem:** find Teilwort in (langem) anderen Wort
- auch genannt: **String-Matching**
- Beispiele:
 - Suche Text in Textverarbeitung / Web-Browser
 - Suche Text in Dateien auf Festplatte (z.B. Spotlight, Windows Search)
 - Suche Text im Internet (z.B. Google)
- **Maß der Effizienz:** Anzahl der Vergleiche zwischen Buchstaben der Worte

Brute-Force Suche



16 Vergleiche

Notationen

- Zu durchsuchender Text:
 - $text[0..n - 1]$
 - Länge n
- gesuchtes Muster = Pattern:
 - $pat[0..m - 1]$
 - Länge m
- **Problem:** finde Position i , so daß $pat == text[i..i + m - 1]$

Brute-Force Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge *n*,
gesuchtes Muster *pat* Länge *m*

Output: Index *i* von Match (oder -1 falls nicht gefunden)

bruteForceSearch(*text*, *pat*):

```
for i = 0 to n - m {  
    j = 0;  
    while ( (j < m) && (pat[j] == text[i + j] ) )  
        j = j + 1;  
    if (j ≥ m) return i; // fündig geworden  
}  
return -1; // nichts gefunden
```

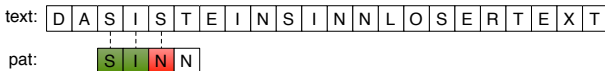
- Komplexität: $O((n - m)m) = O(nm)$

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus (kurz: KMP)

- **Idee:** verbessere Brute-Force Algorithmus durch Ausnutzung der bereits gelesenen Information bei einem Mismatch
- Mismatch an Stelle j von pat impliziert

$$pat[0..j - 1] == text[i..i + j - 1]$$



- **Vorverarbeitungsschritt:** analysiere vor Suche das Muster pat , speichere mögliche Überspringungen in **Feld *shift***

Alphabet und Wörter

Wörter

Ein **Alphabet** Σ ist eine endliche Menge von Symbolen. Ein **Wort** w der Länge n über Σ ist eine endliche Folge von Symbolen

$$w = w_1 \cdots w_n, \quad w_i \in \Sigma, \quad i = 1, \dots, n.$$

Beispiel:

- Alphabet $\Sigma = \{ a, \dots, z, A, \dots, Z \}$
 - Wörter: Daten, Algorithmen, aabb
 - keine Wörter: über, t35t
- Alphabet $\Sigma = \{ 0, \dots, 9, A, B, C, D, E, F \}$
 - Wörter: 09FF, ABC, A3E
 - keine Wörter: 1f, 1gH

Das **leere Wort** wird mit ε bezeichnet.

Präfix und Suffix von einem Wort

Präfix, Suffix

Sei $w = w_1 \cdots w_n$ Wort der Länge n über einem Alphabet Σ .

- Das Wort w' heißt **Präfix** von w , falls $w' = w_1 \cdots w_l$ für $0 \leq l \leq n$.
- Das Wort w' heißt **Suffix** von w , falls $w' = w_l \cdots w_n$ für $1 \leq l \leq n + 1$.

Beispiele für Wort $w = \text{Algorithmen}$:

- Präfixe von w sind: A, Alg, Algorit, Algorithmen
- Suffixe von w sind: n, men, gorithmen, Algorithmen

Rand von einem Wort

Rand

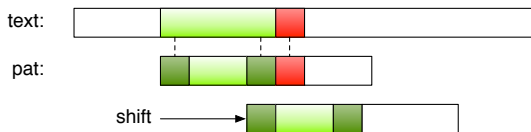
Sei w Wort über einem Alphabet Σ . Ein Wort r heißt **Rand** von w , falls r sowohl Präfix als auch Suffix von w ist.

Ein Rand r von w heißt **eigentlicher Rand**, wenn $r \neq w$ und wenn es außer w selbst keinen längeren Rand gibt. Der eigentliche Rand von w wird mit $\partial(w)$ bezeichnet.

Beispiel: Wort $w = \text{aabaabaa}$ hat folgende Ränder:

- ε
- a
- aa
- aabaa ← **eigentlicher Rand**
- aabaabaa = w

Überspringen beim Suchen



- **Idee:** verschiebe Pattern so, daß im bereits geprüften Bereich wieder Übereinstimmung herrscht
 - dazu müssen Präfix und Suffix dieses Bereichs übereinstimmen
→ **eigentlicher Rand**

Shift-Tabelle

Shift-Tabelle

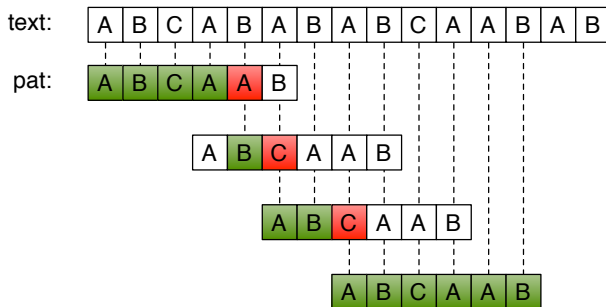
Sei $pat = s_0 \cdots s_{m-1}$ Wort der Länge m . Die **Shift-Tabelle von pat** gibt die Länge des eigentlichen Randes des Präfixes der Länge j von pat an. Sie hat folgende Gestalt:

$$shift[j] = \begin{cases} -1 & \text{für } j = 0 \\ |\partial(s_0 \cdots s_{j-1})| & \text{für } j \geq 1 \end{cases}$$

wobei $j = 0, \dots, m - 1$.

- Ist das Präfix der Länge j gematcht, und an Stelle j ein Mismatch, so ist der Shift $j - shift[j] > 0$ korrekt

KMP Algorithmus: Beispiel I



j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

A
AB
ABC
ABCA
ABCAA

KMP Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge *n*,
gesuchtes Muster *pat* Länge *m*

Output: Index *i* von Match (oder -1 falls nicht gefunden)

KMPSearch(*text*, *pat*):

```
  initShift(pat); // Initialisierung shift Tabelle, siehe später
```

```
  i = 0; j = 0;
```

```
  while (i ≤ n - m) {
```

```
    while (text[i + j] == pat[j]) {
```

```
      j = j + 1;
```

```
      if (j == m)
```

```
        return i; // fündig geworden
```

```
    }
```

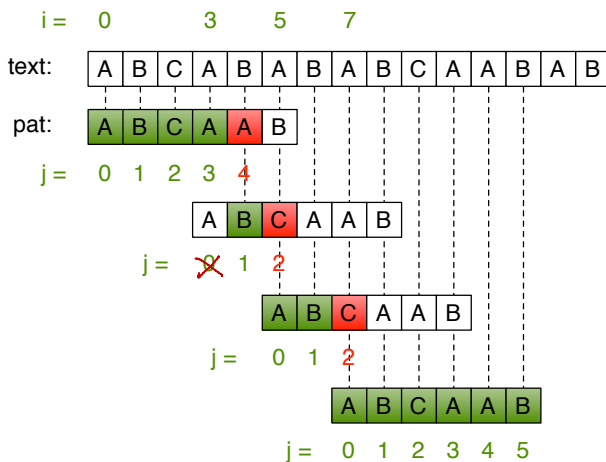
```
    i = i + (j - shift[j]); // j - shift[j] ist immer > 0
```

```
    j = max(0, shift[j]);
```

```
  }
```

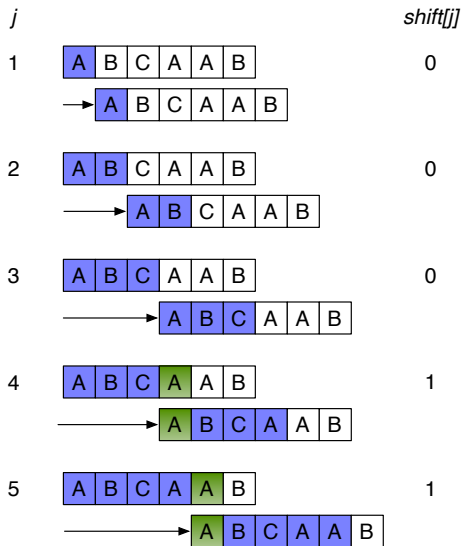
```
  return -1; // war wohl nix
```


KMP Algorithmus: Beispiel II



j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

Shift Tabelle Beispiel I



KMP Algorithmus: Shift Tabelle

Input: Muster pat der Länge m

initShift(pat):

$shift[0] = -1;$

$shift[1] = 0;$

$i = 0;$

for $j = 2$ **to** m {

 // hier ist: $i == shift[j - 1]$

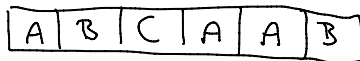
while ($i \geq 0$ && $pat[i] \neq pat[j - 1]$)

$i = shift[i];$

$i = i + 1;$

$shift[j] = i;$

}



KMP Algorithmus: Komplexität

Komplexität von KMP Algorithmus:

- KMPSearch:
 - erfolglose Vergleiche (äußere while-Schleife): maximal $n - m + 1$ Vergleiche
 - erfolgreiche Vergleiche (innere while-Schleife): insgesamt maximal n Vergleiche
 - insgesamt: maximal $2n - m + 1$ Vergleiche
- initShift:
 - erfolgreiche Vergleiche (for-Schleife): maximal $m - 1$ Vergleiche
 - erfolglose Vergleiche (while-Schleife): maximal m Vergleiche
 - insgesamt: maximal $2m - 1$ Vergleiche
- insgesamt: maximal $2n + m$ Vergleiche, also $O(n + m)$
- Platzbedarf: $O(m)$

Ausblick: Suchen in Zeichenketten

- Brute-Force Algorithmus
 - Komplexität: $O(mn)$
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
 - Komplexität: $O(m + n)$
- Rabin-Karp Algorithmus: Suchen mit Hash-Funktion
 - Komplexität im Mittel: $O(m + n)$
 - Komplexität worst-case: $O(mn)$
- Boyer-Moore Algorithmus: Suchen rückwärts
 - Komplexität: $O(n)$
 - Komplexität best-case: $O(n/m)$
- Reguläre Ausdrücke mit endlichen Automaten
- Suche nach ähnlichen Zeichenketten

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

- Lineare Suche

- Binäre Suche

- Binäre Suchbäume

- Balancierte Suchbäume

- Suchen mit Hashtabellen

- Suchen in Zeichenketten