

Lösungsvorschläge zur Musterklausur zu Algorithmen und Datenstrukturen

**Aufgabe 1 Sortieren mit Heap Sort**

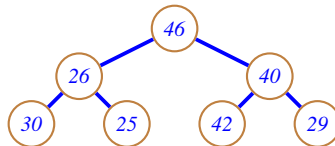
**(11 Punkte)**

Die sequentielle Liste

46, 26, 40, 30, 25, 42, 29

soll mit (*Min-*)Heap Sort sortiert werden!

Geben Sie den Zustand der sequentiellen Liste während der **buildMinHeap** Operation nach jedem Aufruf von **minHeapify** an, sowie während der Sortierung nach jedem **extractMin**!

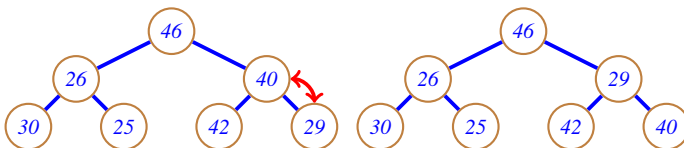


- *minHeapify*(30), *minHeapify*(25), *minHeapify*(42), *minHeapify*(29):

↪ Blätter, nichts zu tun

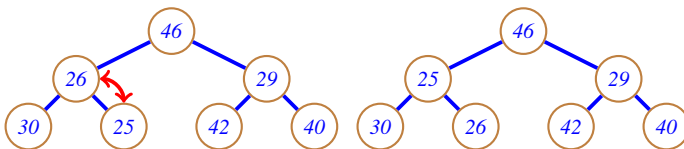
⇒ Liste: (46, 26, 40, 30, 25, 42, 29).

- *minHeapify*(40):



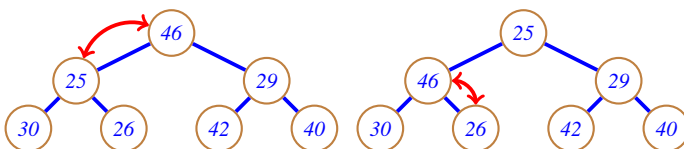
⇒ Liste: (46, 26, 29, 30, 25, 42, 40).

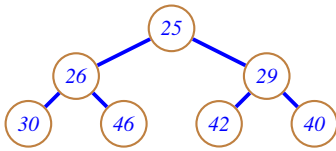
- *minHeapify*(26):



⇒ Liste: (46, 25, 29, 30, 26, 42, 40).

- *minHeapify*(46):





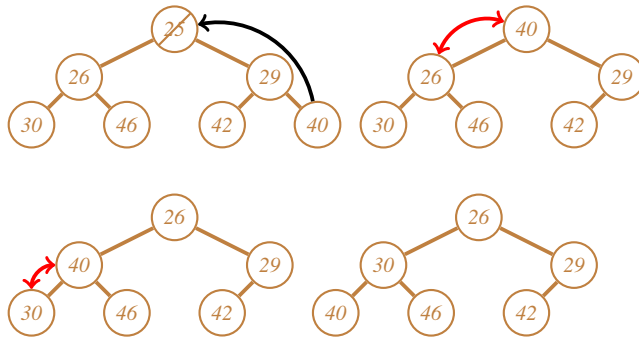
⇒ Liste: (25, 26, 29, 30, 46, 42, 40).

• **1. Sortierschritt:**

⇒ Liste nach 1. Schritt: (26, 30, 29, 40, 46, 42 | 25)

Details:

\* **extractMin** = 25, dadurch 40 neue Wurzel und **minHeapify**(40):

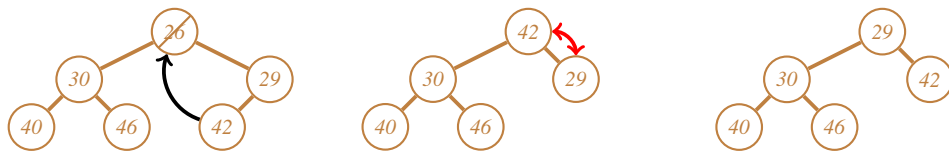


• **2. Sortierschritt:**

⇒ Liste nach **extractMin**: (29, 30, 42, 40, 46 | 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 26, dadurch 42 neue Wurzel und **minHeapify**(42):



• **3. Sortierschritt:**

⇒ Liste nach **extractMin**: (30, 40, 42, 46 | 29, 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 29, dadurch 46 neue Wurzel und **minHeapify**(46):

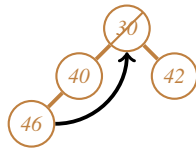


• **4. Sortierschritt:**

⇒ Liste nach **extractMin**: (40, 46, 42 | 30, 29, 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 30, dadurch 46 neue Wurzel und **minHeapify**(46):

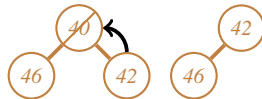


• 5. Sortierschritt:

⇒ Liste nach **extractMin**: (42, 46 | 40, 30, 29, 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 40, dadurch 42 neue Wurzel und **minHeapify**(42):



• 6. Sortierschritt:

⇒ Liste nach **extractMin**: (46 | 42, 40, 30, 29, 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 42, dadurch 46 neue Wurzel.

• 7. Sortierschritt:

⇒ Liste nach **extractMin**: (46, 42, 40, 30, 29, 26, 25)

Details:

\* **extractMin** = 46 und fertig.

**Bewertung:** Je 1 Punkt für korrekte Angabe der Liste nach jedem Schritt.

**Aufgabe 2 KMP-Präfixtabelle**

(7 Punkte)

Geben Sie die jeweiligen Präfixtabellen aus dem Knuth-Morris-Pratt Algorithmus zu folgenden Suchmustern an!

a)

B	A	D	B	A	B	A	D	B	C
-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4

**Bewertung:** 5 Punkte für korrekte Lösung. Jeder falsche Eintrag: -0.5 Punkte, minimal 0 Punkte.

b)

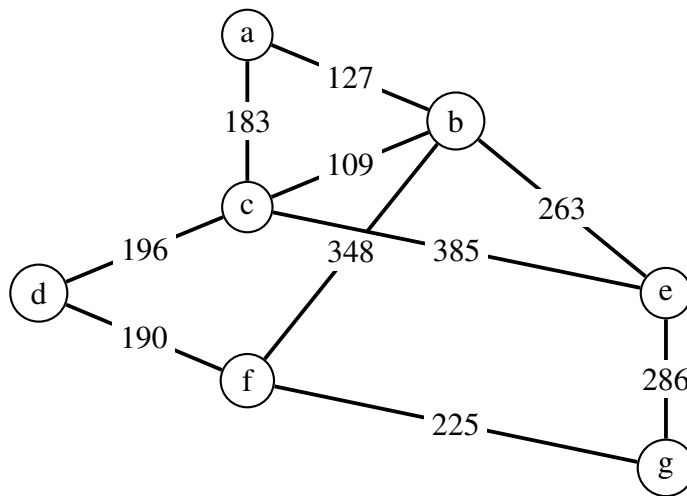
A	B		A	C	B
-1	0	0	0	1	0

**Bewertung:** 2 Punkte für korrekte Lösung. Jeder falsche Eintrag: -0.5 Punkte, minimal 0 Punkte.

**Aufgabe 3 Graphen**

**(12 Punkte)**

Gegeben sei der nebenstehende Graph:



a) Geben Sie die Adjazenzmatrix an! Lassen Sie dabei Felder, die nicht existierenden Kanten entsprechen, **frei!**

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>		<i>127</i>	<i>183</i>				
<i>b</i>	<i>127</i>		<i>109</i>		<i>263</i>	<i>348</i>	
<i>c</i>	<i>183</i>	<i>109</i>		<i>196</i>	<i>385</i>		
<i>d</i>			<i>196</i>			<i>190</i>	
<i>e</i>		<i>263</i>	<i>385</i>				<i>286</i>
<i>f</i>		<i>348</i>		<i>190</i>			<i>225</i>
<i>g</i>					<i>286</i>	<i>225</i>	

**Bewertung:**

- 5 Punkte falls alles richtig (0.5 Punkte pro richtiger Kante).
- 0.25 Punkte Abzug pro falscher Kante.
- Endergebnis wird auf halbe oder ganze Punkte aufgerundet (Beispiel: aus 2.25 wird 2.5, aus 2.75 wird 3).  
Minimum ist 0 Punkte.
- Adjazenzmatrix mit nur 1 als Einträgen (statt Distanzen) ist falsch!

b) Geben Sie mindestens drei Eigenschaften dieses Graphen an!

*Als Eigenschaften sind denkbar: Ungerichtet, gewichtet, nicht zyklensfrei, zusammenhängend, ...*

*Bewertung: 3 Punkte insgesamt, jeweils 1 Punkt für eine korrekte Eigenschaft.*

c) Sie sollen nun die kostengünstigste Vernetzung aller Knoten ermitteln.

- Nennen Sie zunächst einen geeigneten Algorithmus aus der Vorlesung.
- Führen Sie dann diesen Algorithmus auf  $G$  aus. Wählen Sie hierbei  $g$  als Startknoten, und geben Sie den jeweiligen Zustand des Algorithmus nach jedem Schritt in Form der Prioritätswarteschlange  $Q$  an.

Zur Verdeutlichung hier der Anfangszustand (Initialisierung des Algorithmus) in der gewünschten Form:

$$Q = \{(g, 0), (a, \infty), (b, \infty), (c, \infty), (d, \infty), (e, \infty), (f, \infty)\}$$

- Skizzieren Sie am Ende das berechnete optimale Netzwerk als Graph.
- **Algorithmus: Prim-Algorithmus zur Berechnung eines minimalen Spannbaums (MST).**
- **Ausführung:**

*Schritt 1: (Entferne Knoten  $g$  mit Gewicht 0. Nicht finalisierte Nachbarn:  $e, f$ )*

$$Q = \{(f, 225), (e, 286), (a, \infty), (b, \infty), (c, \infty), (d, \infty)\}$$

*Schritt 2: (Entferne Knoten  $f$  und füge die Kante  $\{g, f\}$  dem MST hinzu. Nicht finalisierte Nachbarn:  $b, d$ )*

$$Q = \{(d, 190), (e, 286), (b, 348), (a, \infty), (c, \infty)\}$$

*Schritt 3: (Entferne Knoten  $d$  und füge die Kante  $\{f, d\}$  dem MST hinzu. Nicht finalisierte Nachbarn:  $c$ )*

$$Q = \{(c, 196), (e, 286), (b, 348), (a, \infty)\}$$

*Schritt 4: (Entferne Knoten  $c$  und füge die Kante  $\{d, c\}$  dem MST hinzu. Nicht finalisierte Nachbarn:  $a, b, e$ )*

$$Q = \{(b, \min(348, 109) = 109), (a, 183), (e, \min(286, 385) = 286)\}$$

*Schritt 5: (Entferne Knoten  $b$  und füge die Kante  $\{c, b\}$  dem MST hinzu. Nicht finalisierte Nachbarn:  $a, e$ )*

$$Q = \{(a, \min(183, 127) = 127), (e, \min(286, 263) = 263)\}$$

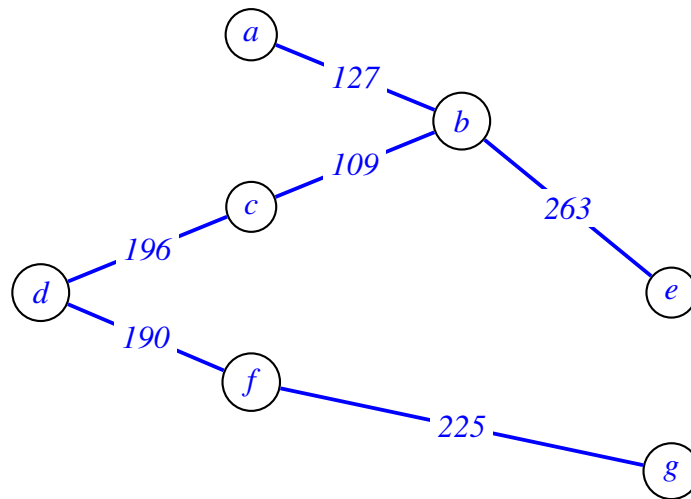
*Schritt 6: (Entferne Knoten  $a$  und füge die Kante  $\{b, a\}$  dem MST hinzu.)*

$$Q = \{(e, 263)\}$$

*Schritt 7: (Entferne Knoten  $e$  und füge die Kante  $\{b, e\}$  dem MST hinzu.)*

$$Q = \{\}$$

- **Skizze von MST:**



**Bewertung:**

- *Algorithmus Prim: 0.5 Punkte*
- *Ausführung: 3.5 Punkte (0.5 pro richtigem Schritt)*
- *Skizze: 1 Punkt*
- *falls  $Q$  unsortiert angegeben wurde, sonst aber alles korrekt: global 1 Punkt Abzug.*

**Aufgabe 4 AVL-Bäume**

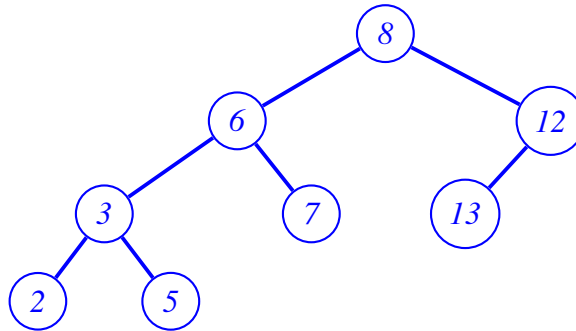
**(8 Punkte)**

a) Repräsentiert das folgende Array einen AVL-Baum?

8, 6, 12, 3, 7, 13, [], 2, 5

Begründen Sie Ihre Antwort und zeichnen Sie die Baumstruktur! Durch welche konkreten Operationen wäre ggf. die AVL-Eigenschaft herzustellen?

*Nein, es ist fast ein AVL-Baum, lediglich  $13 > 12$  verletzt am letzten Blatt die Ordnung!*



*Zur Korrektur vertauschen von Knoten 12 und 13*

**Bewertung:** 6 Punkte insgesamt, davon 4 Punkte für korrekten Baum (jeweils 1 Punkt pro Ebene), 1 Punkt für AVL-Eigenschaft verletzt, 1 Punkt für Korrekturangabe.

b) Kann mittels binärer Suche der **dritt-größte** Wert in einem AVL-Baum gefunden werden (begründen Sie Ihre Antwort!)? Wenn ja, welche Komplexität hat der entsprechende Algorithmus?

*Ja, ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum, wie er für binäre Suche erforderlich ist.*

*Im Suchbaum ist die geforderte Eigenschaft, dass bei jedem Knoten  $v$  der größte Wert im linken Teilbaum kleiner/gleich (bzw. der kleinste Wert im rechten Teilbaum größer/gleich) dem Wert bei  $v$  selbst ist.*

*Die binäre Suche läuft in  $O(\log n)$ .*

**Bewertung:** 2 Punkte insgesamt, 1 Punkt für binärer Suchbaum, 1 Punkt für  $O(\log n)$ .

**Aufgabe 5 Matrix-Zerlegung**

**(7 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Definieren die folgenden Matrizen  $U, S, V$  eine gültige SVD-Zerlegung von  $A$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Ja, es handelt sich um eine gültige Zerlegung, da:  $V^T V = I_2$  und orthogonal,  $U^T U = I_2$  und  $A = USV^T$*

*Ausserdem gilt für die Singulärwerte  $4 > 2$ .*

**Bewertung:** 3 Punkte für korrekte Antwort und Begründungen.

*Abzug für:*

- falsche Schlussfolgerung (es ist keine gültige SVD): -0.5 Punkte
- nicht gezeigt dass  $V$  orthogonal und dass  $U^T U = I_2$ : -0.5 Punkte
- nicht gezeigt dass  $A = USV^T$ : -0.5 Punkte.
- nicht gezeigt dass  $4 > 2$ : -0.5 Punkte.

b) Betrachten Sie nun die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie auf  $B$  die ersten **zwei** Iterationen des *LUP-Algorithmus* aus der Vorlesung in-place durch, und geben Sie dabei zu jeder Iteration jeweils separat die Ergebnisse des Pivottisierungsschrittes und des Teilerlegungsschrittes an.

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Pivottisierung} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Teilerlegung} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|ccc|c} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0.5 \{ -2 / -4 \} & 0 \{ 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \} & 1 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) \} & -1.5 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 \} \\ 1 & -0.5 \{ 2 / -4 \} & -1 \{ -2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2 \} & 0 \{ 1 - (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) \} & 4.5 \{ 3 - (-\frac{1}{2}) \cdot 3 \} \\ 4 & 0.5 \{ -2 / -4 \} & -2 \{ -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \} & 1 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) \} & 8.5 \{ 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \} \end{array} \right) \\
 \text{Pivottisierung} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0.5 & -2 & 1 & 8.5 \\ 1 & -0.5 & -1 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Teilerlegung} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|cc|cc|c} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0.5 & -2 & 1 & 8.5 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \{ (-1) / (-2) \} & -0.5 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \} & 0.25 \{ 4.5 - \frac{1}{2} \cdot 8.5 \} \\ 2 & 0.5 & 0 \{ 0 / (-2) \} & 1 \{ 1 - 0 \cdot 1 \} & -1.5 \{ -1.5 - 0 \cdot 8.5 \} \end{array} \right)
 \end{array}$$

In geschweiften Klammern  $\{ \dots \}$  ist dabei stets die Berechnungsvorschrift angegeben zur leichteren Nachvollziehbarkeit. Dies wird in der Fragestellung nicht erwartet!

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, jeweils 1 Punkt für korrekte Teilerlegung und Pivottisierung.

### Aufgabe 6 Least-Squares

(8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Datenpunkte:

$$\{(-2/5), (0/1), (1/2)\}$$



- a) Berechnen Sie unter Angabe der Rechenschritte die quadratische Least-Squares-Ausgleichskurve  $F(x)$ ! Wie lautet der Fachausdruck für die Ausgangs-Matrix?

*Berechnung via Vandermonde-Matrix  $V$ :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: V} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{y}}$$

*Lösung via Gauss-Elimination des erweiterten Systems  $(V|\mathbf{y})$ :*

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I, III-I} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+2 \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II/6, II \leftrightarrow III} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow F(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

*Man hätte die Elimination natürlich auch vorher, also bei Dreiecksform, abrechnen können, und ab dort mittels eines Substitutionsverfahrens fortfahren.*

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, 1 Punkt für korrektes Aufstellen der Matrix-Gleichung, 1 Punkt für Name Vandermonde-Matrix, 1 Punkt für korrektes Lösen, 1 Punkt für korrekte Schlussfolgerung  $F(x) = x^2 + 1$ .

- b) Zusätzlich zu den gegebenen Datenpunkten sollen nun weitere (potentiell verrauschte) Datenpunkte hinzukommen. Was für eine Art von Lösung würde man nun berechnen, und geben Sie dafür auch eine Formel an. Wie würde man diese Art von Lösung dann tatsächlich berechnen? Geben Sie auch hierfür eine Formel sowie ihren Namen an.

*Bei mehr Punkten wird das System  $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$  überbestimmt. Daher berechnet man nun eine Least squares Lösung:*

$$\min_{\mathbf{a}} \|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|^2$$

*Die Lösung berechnet sich dann durch die Normalengleichung:*

$$V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{y}$$

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, 1 Punkt für Least-Squares Lösung, 1 Punkt für korrekt Formel dazu, 1 Punkt für Normalengleichung, 1 Punkt für korrekte Formel

**In einer echten Klausur sollten Sie von den erreichbaren Punkten mindestens die Hälfte erzielen, in diesem Beispiel also 27 Punkte.**