

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2016

Dr. Tobias Lasser

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen

Bäume

Heaps

Priority Queues

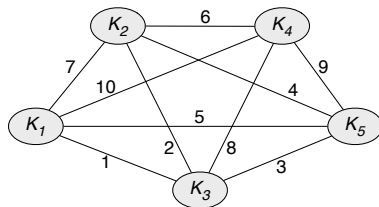
Übersicht: Graphen

Klassen von Graphen:

- ungerichteter Graph
- gerichteter Graph

Zusätzliche Eigenschaften:

- gewichteter Graph



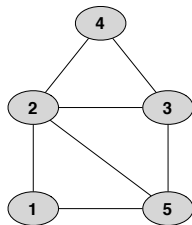
Definition: Ungerichteter Graph

Definition: Ungerichteter Graph

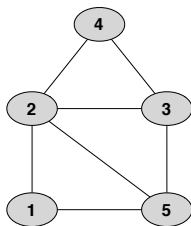
Ein ungerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

- V endliche Menge der Knoten
 - $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ Menge der Kanten
-
- auf Englisch:
 - Knoten = vertices
 - Kanten = edges
 - es ist $\{u, v\} = \{v, u\}$, d.h. Richtung der Kante spielt keine Rolle

Beispiel:



Ungerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_u = (V_u, E_u)$
- Knoten $V_u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten
 $E_u = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$

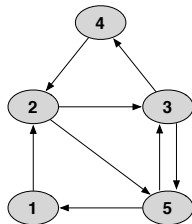
Definition: Gerichteter Graph

Definition: Gerichteter Graph

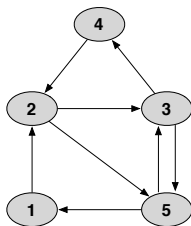
Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

- V endliche Menge der Knoten
 - $E \subseteq V \times V$ Menge der Kanten
-
- $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} = V \times V$
 - es ist $(u, v) \neq (v, u)$, d.h. Richtung der Kante spielt eine Rolle
 - hier sind Schleifen möglich, d.h. Kanten der Form (u, u) für $u \in V$

Beispiel:



Gerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_g = (V_g, E_g)$
- Knoten $V_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten
 $E_g = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$

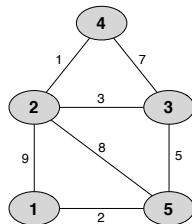
Definition: Gewichteter Graph

Definition: Gewichteter Graph

Ein **gewichteter Graph** ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- der Graph G kann gerichtet oder ungerichtet sein
- je nach Anwendung kann ein verschiedener Wertebereich für die Funktion w gewählt werden
 - z.B. \mathbb{R} oder \mathbb{N}_0

Beispiel:



Eigenschaften von Graphen I

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Ist $(u, v) \in E$ bzw. $\{u, v\} \in E$ für $u, v \in V$, so heißt v **adjazent** zu u .
- Sei G gerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
 - die Anzahl der **eintretenden** Kanten in v heißt **Eingangsgrad** (englisch: indegree) von v ,

$$\text{indeg}(v) = |\{v' : (v', v) \in E\}|$$

- die Anzahl der **austretenden** Kanten von v heißt **Ausgangsgrad** (englisch: outdegree) von v ,

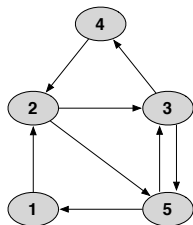
$$\text{outdeg}(v) = |\{v' : (v, v') \in E\}|$$

- Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
 - die Anzahl der eintretenden bzw. austretenden Kanten von v heißt **Grad** (englisch: degree) von v oder kurz $\text{deg}(v)$.

Eigenschaften von Graphen: Beispiel

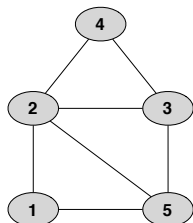
Beispiel gerichteter Graph:

- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 1
- Knoten 1 ist adjazent zu Knoten 5
- $outdeg(2) = 2$, $indeg(2) = 2$
- $indeg(1) = 1$, $outdeg(1) = 1$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Knoten 4 ist adjazent zu Knoten 2
- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 4
- $deg(2) = 4$
- $deg(1) = 2$



Eigenschaften von Graphen II

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Seien $v, v' \in V$. Ein **Pfad** von v nach v' ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \dots, v_k) \subset V$ mit
 - $v_0 = v, v_k = v'$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ bzw. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, k - 1$

k heißt **Länge** des Pfades.

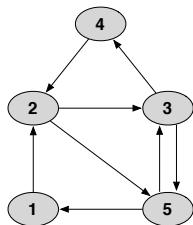
- Ein Pfad heißt **einfach**, falls alle Knoten des Pfades paarweise verschieden sind.

Gibt es einen Pfad von u nach v , so heißt v **erreichbar** von u .

Eigenschaften von Graphen II: Beispiel

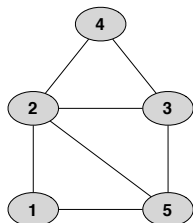
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 2
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Pfad der Länge 3, aber nicht einfach
- 5 ist erreichbar von 1



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(5, 2, 4, 3, 2)$ ist ein Pfad der Länge 4, aber nicht einfach
- $(1, 2, 3, 4)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 3
- 3 ist erreichbar von 1



Eigenschaften von Graphen III

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- Ein Pfad (v_0, \dots, v_k) heißt **Zyklus**, falls
 - $v_0 = v_k$ und
 - der Pfad mindestens eine Kante enthält
- Ein Zyklus (v_0, \dots, v_k) heißt **einfach**, falls v_1, \dots, v_k paarweise verschieden sind.

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

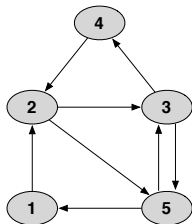
- Ein Pfad (v_0, \dots, v_k) heißt **Zyklus**, falls
 - $v_0 = v_k$
 - $k \geq 3$
 - v_1, \dots, v_k paarweise verschieden

Ein Graph ohne Zyklen heißt **azyklisch**.

Eigenschaften von Graphen III: Beispiel

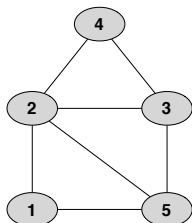
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 3, 5, 1)$ ist ein Zyklus, aber nicht einfach
- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein einfacher Zyklus



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein Zyklus
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Zyklus



Eigenschaften von Graphen IV

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- G heißt **stark zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine **starke Zusammenhangskomponente** von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G .
 - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "gegenseitig erreichbar"

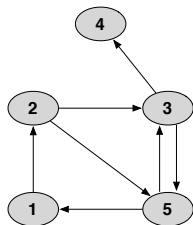
Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

- G heißt **zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine **Zusammenhangskomponente** von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G .
 - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "erreichbar von"

Eigenschaften von Graphen IV: Beispiel

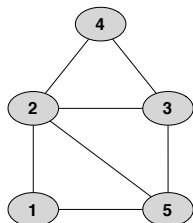
Beispiel gerichteter Graph:

- Graph ist **nicht** stark zusammenhängend (z.B. 3 nicht erreichbar von 4)
- starke Zusammenhangskomponenten: $\{1, 2, 3, 5\}$ und $\{4\}$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Graph ist zusammenhängend
- nur eine Zusammenhangskomponente: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



Darstellung von Graphen: Adjazenzmatrizen

Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die Adjazenzmatrix von G speichert die vorhandenen Kanten in einer $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

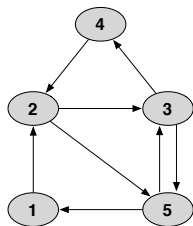
- $A(i, j) = 1$ falls Kante von Knoten v_i zu v_j existiert
- $A(i, j) = 0$ falls keine Kante von Knoten v_i zu v_j existiert

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Adjazenzmatrizen: Beispiele

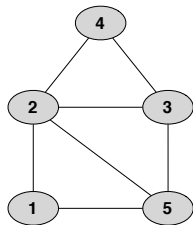
Beispiel gerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel ungerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Adjazenzmatrizen: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll wenn der Graph nahezu **vollständig** ist (d.h. fast alle möglichen Kanten tatsächlich in E liegen)
- Speicherkomplexität: $O(|V|^2)$
- bei **ungerichteten** Graphen ist die Adjazenzmatrix **symmetrisch**
- bei **gewichteten** Graphen kann man statt der 1 in der Matrix das Gewicht der Kante eintragen

Darstellung von Graphen: Adjazenzlisten

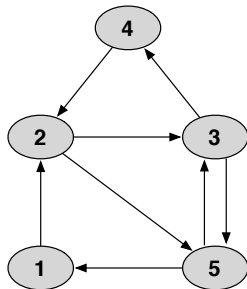
Adjazenzliste

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph. Eine **Adjazenzliste** von G sind $|V| + 1$ verkettete Listen, so daß

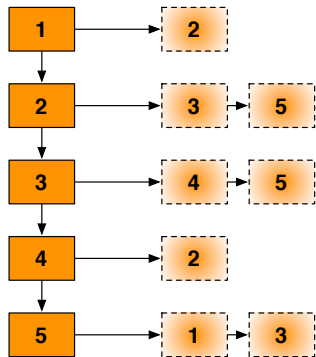
- die erste Liste alle Knoten enthält
- für jeden Knoten v eine Liste angelegt wird mit allen Knoten, die durch eine von v austretende Kante zu erreichen sind

Adjazenzliste: Beispiel

Graph:



Adjazenzliste:



Adjazenzliste: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzlisten zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll bei dünn besetzten Graphen mit wenigen Kanten
- Speicherkomplexität: $O(|V| + |E|)$
- bei ungerichteten Graphen gleiches Verfahren
 - allerdings muß jede Kante zweimal gespeichert werden
- bei gewichteten Graphen kann man die Gewichte mit in den verketteten Listen der jeweiligen Knoten speichern

Komplexität der Darstellungen

Sei $G = (V, E)$ Graph.

Operation	Adjazenzmatrix	Adjazenzliste
Kante einfügen	$O(1)$	$O(V)$
Kante löschen	$O(1)$	$O(V)$
Knoten einfügen	$O(V ^2)$	$O(1)$
Knoten löschen	$O(V ^2)$	$O(V + E)$

- falls Größe im Vorhinein bekannt, kann Knoten löschen/einfügen bei Adjazenzmatrix effizienter implementiert werden
- auch die Adjazenzlisten lassen sich effizienter implementieren, z.B. auf Kosten von Speicher (sequentielle Liste statt verkettete Liste)
- Löschen von Knoten ist immer aufwendig, da auch alle Kanten von/zu diesem Knoten gelöscht werden müssen

Algorithmen auf Graphen

Ausblick auf Algorithmen auf Graphen:

- Traversierung (Durchlaufen) von allen Knoten
 - Depth-First Search (DFS)
 - Breadth-First Search (BFS)
- kürzester Pfad zwischen Knoten in Graphen
- minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST)

→ siehe Kapitel 9!



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen

Bäume

Heaps

Priority Queues

Bäume

Bäume sind alltägliches Mittel zur Strukturierung:

- Stammbaum
- Hierarchie in Unternehmen
- Systematik in der Biologie
- etc.



In Informatik:

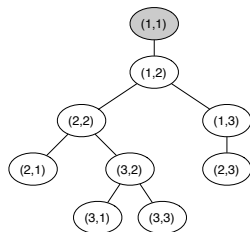
- Bäume sind spezielle Graphen
- Wurzel oben!



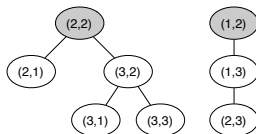
Definition Wald/Baum

Definition: Wald und Baum

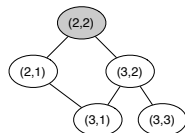
- Ein azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Wald**.
- Ein zusammenhängender, azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Baum**.



Baum



Wald



kein Baum!

Eigenschaften von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein Baum.

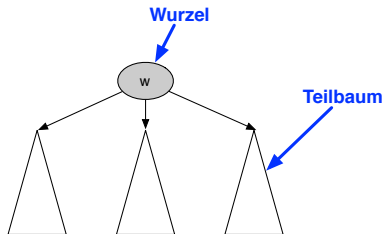
- jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ ist durch einen **einzigsten Pfad** verbunden
- G ist **zusammenhängend**, aber wenn eine Kante aus E **entfernt** wird, ist G nicht mehr zusammenhängend
- G ist **azyklisch**, aber wenn eine Kante zu E **hinzugefügt** wird, ist G nicht mehr azyklisch
- es ist $|E| = |V| - 1$



Wurzel von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein Baum.

- genau ein Knoten $w \in V$ wird als **Wurzel** ausgezeichnet
- entfernt man w erhält man einen Wald von **Teilbäumen**

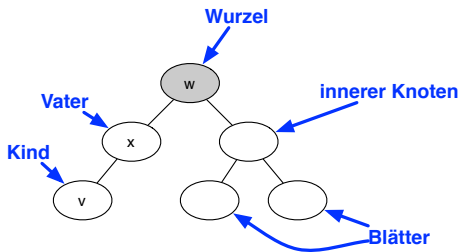


Hinweis: manchmal wird zwischen “freiem” und “gewurzeltem” Baum unterschieden!

Weitere Begriffe bei Bäumen I

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

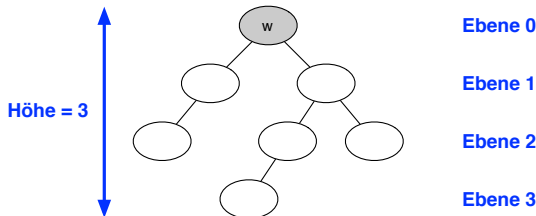
- jeder Knoten $v \in V$ mit $v \neq w$ ist mit genau einer Kante mit seinem **Vaterknoten** $x \in V$ (oder: Vorgänger) verbunden
- v wird dann als **Kind** (oder: Sohn, Nachfolger) von $x \in V$ bezeichnet
- ein Knoten ohne Kinder heißt **Blatt**, alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**



Weitere Begriffe bei Bäumen II

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

- Anzahl der Kinder von Knoten $x \in V$ heißt auch **Grad** von x
 - Achtung: der Grad in dem ungerichteten Graph G ist anders definiert!
- Länge des Pfades von Wurzel w zu Knoten $x \in V$ heißt **Tiefe** von x
- alle Knoten gleicher Tiefe bilden eine **Ebene** des Baumes G
- die **Höhe** des Baumes G ist die maximale Tiefe der Knoten von G
 - Achtung: manchmal ist Höhe auch als Anzahl der Ebenen definiert

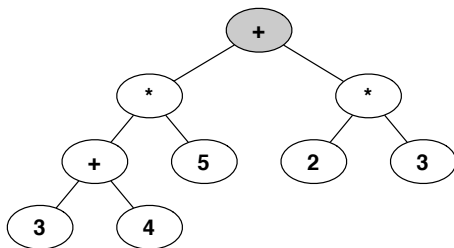


Bäume: Beispiele

- arithmetischer Ausdruck

$$(3 + 4) * 5 + 2 * 3$$

repräsentiert als Baum:



- hierarchisches Dateisystem
 - Windows z.B. "C:\"
 - Unix "/"
- Suchbaum → Kapitel 8

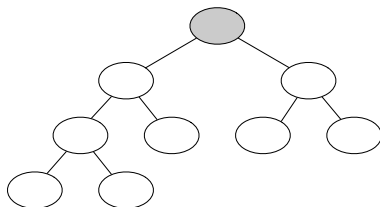
Besondere Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

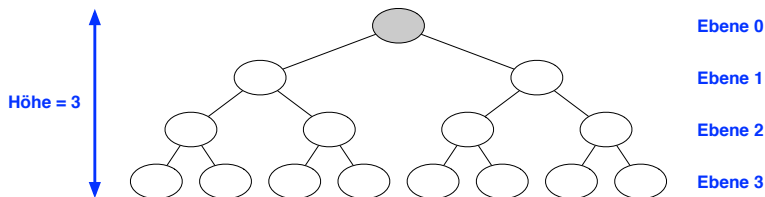
- sind die Kinder jedes Knotens in bestimmter Reihenfolge angeordnet, heißt G **geordneter Baum**
- ist die Anzahl n der Kinder jedes Knotens vorgegeben, heißt G **n -ärer Baum**

Wichtiger Spezialfall:

- ist G geordnet und hat jeder Knoten maximal zwei Kinder, heißt G **Binärbaum**



Beispiel: Binärbaum



Binärbaum mit Höhe 3, 8 Blättern und 7 inneren Knoten.

- Binärbaum heißt **vollständig**, wenn jede Ebene die maximale Anzahl an Knoten enthält
- ein vollständiger Binärbaum der Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten, davon 2^k Blätter

Darstellung von Bäumen: als Graph

Bäume sind Graphen → Darstellung als

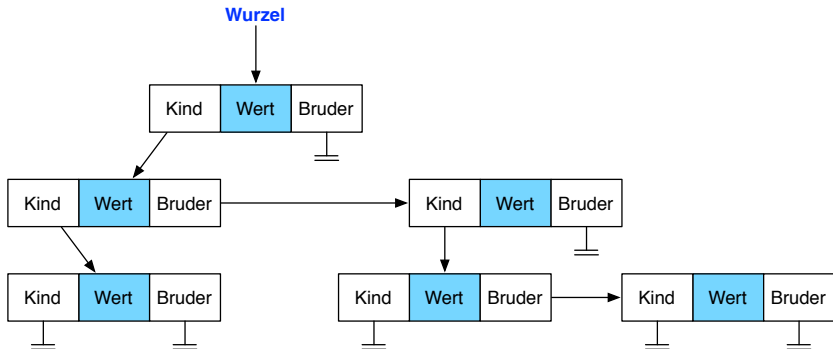
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzliste

→ leider meist **nicht effizient** (sowohl Laufzeit als auch Speicher)



Darstellung von Bäumen: verkettete Liste

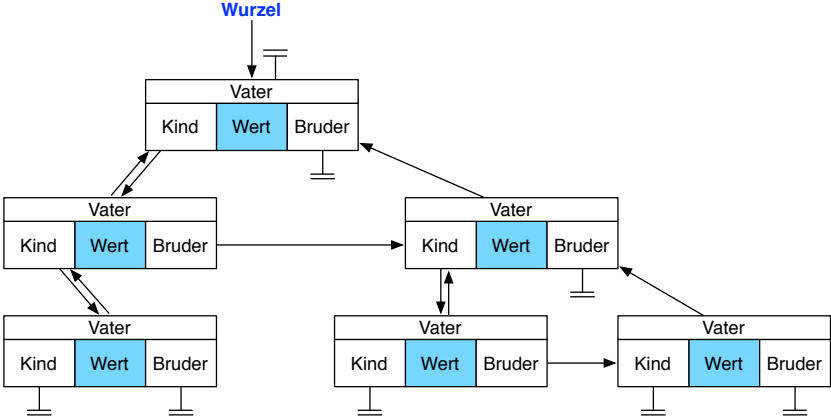
Darstellung mit angepassten verketteten Listen:



Nachteil: nur Navigation "nach unten" möglich

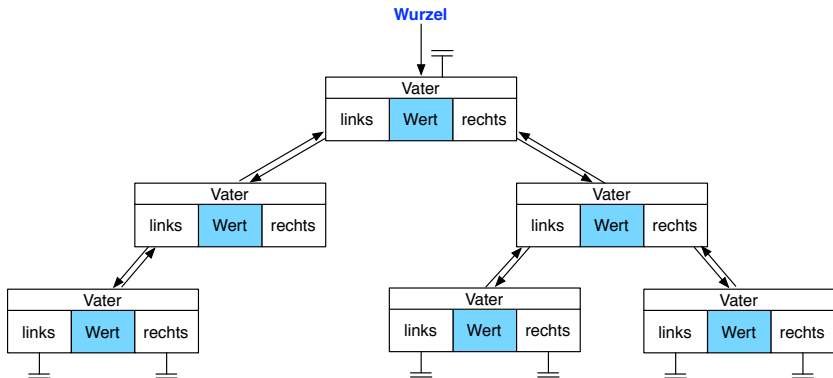
Darstellung von Bäumen: doppelt verkettete Liste

Darstellung mit angepassten doppelt verketteten Listen:



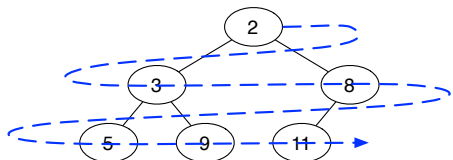
Darstellung von Binärbäumen

Darstellung direkt mit linkem/rechtem Kind (doppelt verkettet):



Binärbaum als sequentielle Liste I

- vollständiger Binärbaum Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten
 - speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in sequentieller Liste (Array)
 - maximale Grösse von Array: $2^{k+1} - 1$
- Beispiel fast vollständiger Binärbaum:



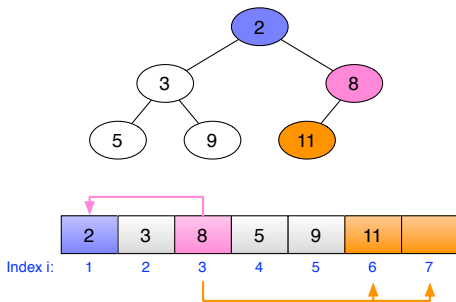
2	3	8	5	9	11	
---	---	---	---	---	----	--

Binärbaum als sequentielle Liste II

- **Wurzel:** an Position 1
- **Knoten an Position i :**
 - **Vater-Knoten** an Position $\lfloor i/2 \rfloor$
 - **linkes Kind** an Position $2i$;
 - **rechtes Kind** an Position $2i + 1$

Pseudocode:

- **vater(i):** return $\lfloor i/2 \rfloor$;
- **links(i):** return $2i$;
- **rechts(i):** return $2i + 1$;

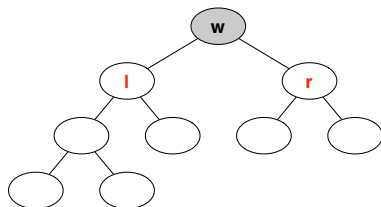


Traversierung von Binärbäumen

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

In welcher Reihenfolge durchläuft man G ?

- Wurzel zuerst
- danach linker oder rechter Kind-Knoten l bzw. r ?
- falls l : danach Kind-Knoten von l oder zuerst r ?
- falls r : danach Kind-Knoten von r oder zuerst l ?



→ falls zuerst in die Tiefe: **Depth-first search** (DFS)

→ falls zuerst in die Breite: **Breadth-first search** (BFS)

DFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Tiefensuche (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

① Pre-order Reihenfolge

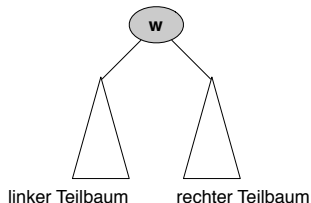
- besuche Wurzel
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum

② In-order Reihenfolge

- durchlaufe linken Teilbaum
- besuche Wurzel
- durchlaufe rechten Teilbaum

③ Post-order Reihenfolge

- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum
- besuche Wurzel



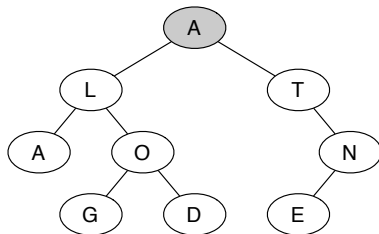
Pre-order Traversierung

Pre-order Reihenfolge:

- besuche Wurzel
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, A, O, G, D, T, N, E



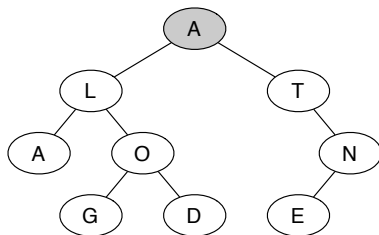
In-order Traversierung

In-order Reihenfolge:

- durchlaufe linken Teilbaum
- besuche Wurzel
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, G, O, D, A, T, E, N



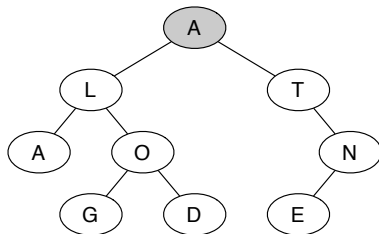
Post-order Traversierung

Post-order Reihenfolge:

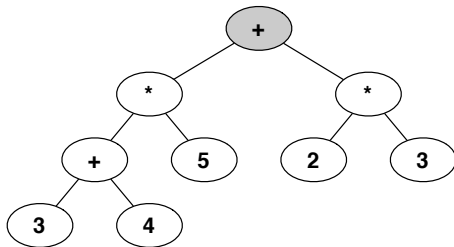
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum
- besuche Wurzel

Beispiel:

A, G, D, O, L, E, N, T, A



Beispiel: Arithmetischer Term



Traversierung:

- Pre-order: + * + 3 4 5 * 2 3
- In-order: 3 + 4 * 5 + 2 * 3
- Post-order: 3 4 + 5 * 2 3 * +

Implementierung DFS Traversierung

Datenstruktur:



- Algorithmus **preorder**:

preorder(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
besuche(knoten);  
preorder(knoten.links);  
preorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus **inorder**:

inorder(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
inorder(knoten.links);  
besuche(knoten);  
inorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus **postorder**:

postorder(knoten):

```
if (knoten == null) return;  
postorder(knoten.links);  
postorder(knoten.rechts);  
besuche(knoten);
```

- rekursive Algorithmen

- auf Call-Stack basiert

Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

- Datenstruktur:



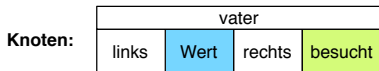
- **Hilfsmittel:** Stack von Knoten "knotenStack"

postorderIterativ(wurzelKnoten):

```
knotenStack.push(wurzelKnoten);
while ( !knotenStack.isEmpty() ) {
    knoten = knotenStack.top();
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
        knotenStack.push(knoten.links);
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
        knotenStack.push(knoten.rechts);
    else {
        besuche(knoten);
        knoten.besucht = true;
        knotenStack.pop();
    }
}
```


Implementierung ohne Rekursion und ohne Stack

- Datenstruktur:



postorderIterativeOhneStack(wurzelKnoten):

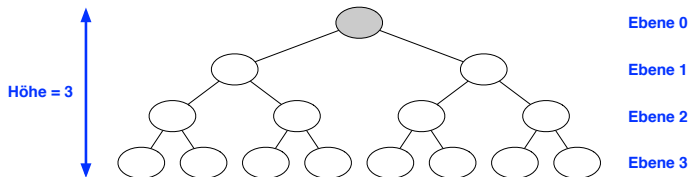
```
knoten = wurzelKnoten;  
while (true) {  
  if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )  
    knoten = knoten.links;  
  else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )  
    knoten = knoten.rechts;  
  else {  
    besuche(knoten);  
    knoten.besucht = true;  
    if (knoten.vater == null) break;  
    else knoten = knoten.vater;  
  }  
}
```

BFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Breitensuche (Breadth-first search, BFS):

- besuche Wurzel
- für alle Ebenen von 1 bis Höhe
 - besuche alle Knoten aktueller Ebene



Implementierung BFS Traversierung

- Datenstruktur:



- **Hilfsmittel:** Queue von Knoten "knotenQueue"

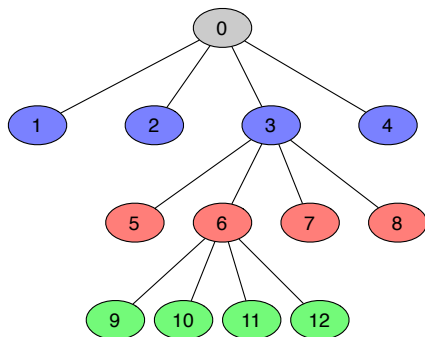
breitensuche(wurzelKnoten):

```
knotenQueue = leer;  
knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);  
while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {  
    knoten = knotenQueue.dequeue();  
    besuche(knoten);  
    if (knoten.links != null)  
        knotenQueue.enqueue(knoten.links);  
    if (knoten.rechts != null)  
        knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);  
}
```

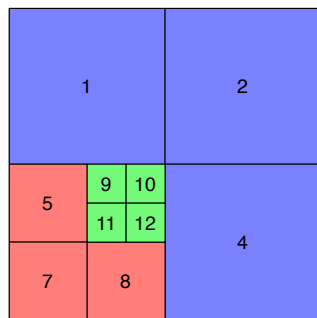
Anwendung: Quadtree I

- 4-närer Baum heißt **Quadtree**

Quadtree

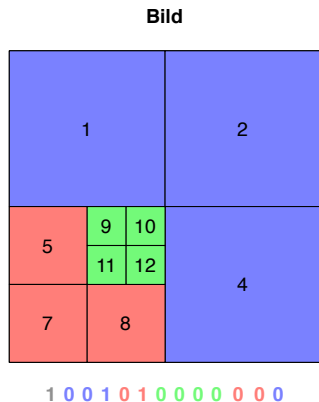
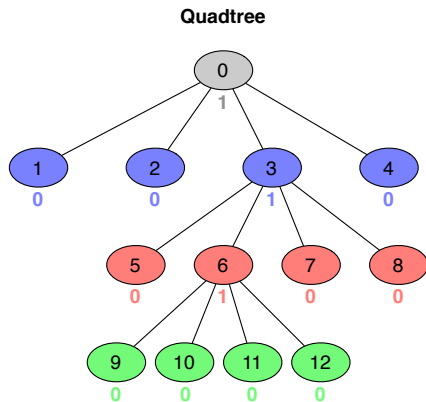


Bild



Anwendung: Quadtree II

- Codierung des Baumes mit Binärziffern



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen

Bäume

Heaps

Priority Queues

Definition Heap

Definition Heap

Sei $G = (V, E)$ ein **Binärbaum** mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch \leq, \geq geordnet.

G heißt **Heap**, falls er folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- G ist **fast vollständig**, d.h. alle Ebenen sind vollständig gefüllt, ausser auf der untersten Ebene, die von links her nur bis zu einem bestimmten Punkt gefüllt sein muss.
- G erfüllt die **Min-Heap-Eigenschaft** bzw. die **Max-Heap-Eigenschaft**, d.h. für alle Knoten $v \in V$, $v \neq w$ gilt
 - Min-Heap: $key(v.vater) \leq key(v)$
 - Max-Heap: $key(v.vater) \geq key(v)$

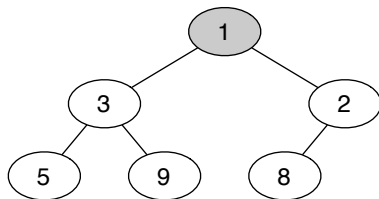
Entsprechend der Heap-Eigenschaft heißt G **Min-Heap** bzw. **Max-Heap**.

Bemerkungen zur Heap Definition

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap.

- wir beschränken uns hier auf **Min-Heaps**, alle Aussagen gelten mit entsprechenden trivialen Änderungen auch für Max-Heaps
- typische **Keys** von Knoten sind Zahlen, z.B. $key : V \rightarrow \mathbb{R}$
 - weiteres Beispiel: Strings als Keys, lexikographisch geordnet
- ein Heap ist **kein** abstrakter Datentyp!

Min-Heap: Beispiel



- Keys sind hier natürliche Zahlen
- Baum ist fast vollständiger Binärbaum
- Baum erfüllt Min-Heap-Eigenschaft:
 - für alle Knoten v (ausser Wurzel) gilt

$$\text{key}(v.\text{vater}) \leq \text{key}(v)$$

Heap Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Heap mit Wurzel $w \in V$.

- G als **Min-Heap** bzw. **Max-Heap** hat immer Element mit **kleinstem** bzw. **größtem Key** in Wurzel w
- G ist aber **nicht vollständig sortiert** (d.h. Traversierung liefert nicht notwendigerweise vollständig sortierte Folge)
- Ist $|V| = n$, so hat G Höhe von $\Theta(\log n)$
- typische Operation: extrahiere kleinsten (bzw. größten) Key (d.h. Wurzel), kurz: **extractMin** (bzw. **extractMax**)
 - anschließendes Problem: Heap-Eigenschaft wiederherstellen, als Operation: **minHeapify** (bzw. **maxHeapify**)

Heap: extractMin

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$.

- Operation **extractMin**:
 - entferne Wurzel w aus Heap G und liefere $key(w)$ zurück
 - tausche letzten Knoten von G an Stelle von Wurzel
 - stelle Heap-Eigenschaft wieder her mit **minHeapify**

Output: minimaler Key in G

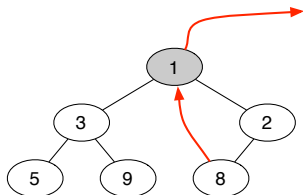
extractMin(G):

$min = key(w)$;

tausche Inhalt von w mit letztem
Knoten in G ;

minHeapify(G, w);

return min ;



Heap: minHeapify

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$ und $|V| = n$.

- Operation **minHeapify** auf Knoten $v \in V$ zur Wiederherstellung der Min-Heap-Eigenschaft
- **Voraussetzung:** nur Knoten v verletzt Min-Heap-Eigenschaft
- lasse v durch Heap absinken, bis Min-Heap-Eigenschaft wiederhergestellt

Input: Knoten v

minHeapify(G, v):

if (v ist Blatt) **return**;

$knoten =$ Minimum (bzgl. key) von $v.links$ und $v.rechts$;

if ($key(knoten) < key(v)$) {

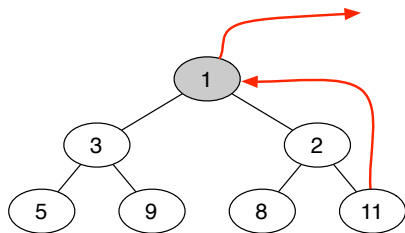
 tausche Inhalt von $knoten$ und v ;

minHeapify($G, knoten$);

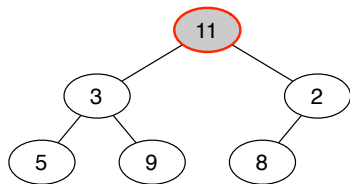
}

- Komplexität: $O(\log n)$

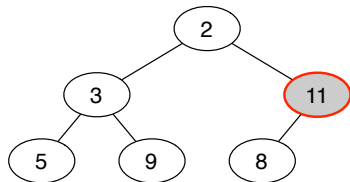
Beispiel extractMin / minHeapify



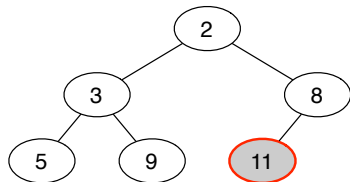
extractMin



minHeapify



minHeapify



minHeapify

Heap erzeugen: buildMinHeap

Gegeben sei Knoten-Liste V mit $|V| = n$ und Keys $key(v)$ für $v \in V$.

- wie erzeugt man aus V einen Min-Heap $G = (V, E)$?
 - erzeuge irgendwie fast vollständigen Binärbaum aus V
 - wende **minHeapify** auf alle Knoten $v \in V$ an, von unten nach oben (nicht nötig für unterste Ebene des Baumes!)

Input: Knoten-Liste V

Output: Min-Heap G

buildMinHeap(V):

G = erzeuge beliebigen fast vollständigen Binärbaum aus V ;

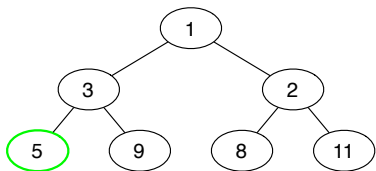
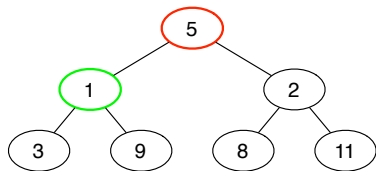
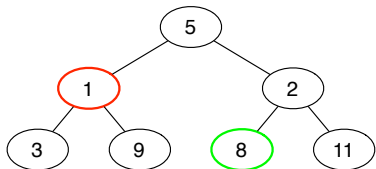
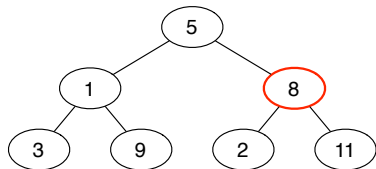
for each Knoten v in G von unten nach oben {

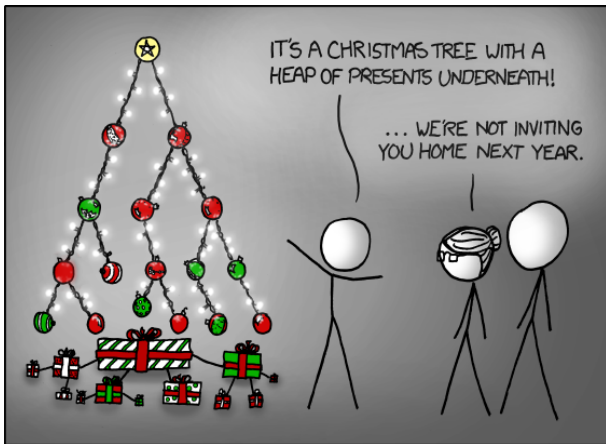
minHeapify(G, v);

}

- Komplexität: $O(n)$ (nicht nur $O(n \log n)$!)

Beispiel buildMinHeap

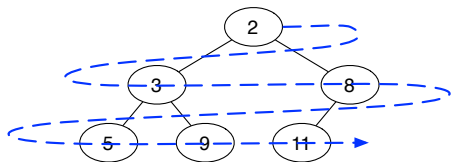




<http://xkcd.com/835/>

Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste I

- vollständiger Binärbaum Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten
 - speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in sequentieller Liste (Array)
 - maximale Grösse von Array: $2^{k+1} - 1$
- Beispiel fast vollständiger Binärbaum:



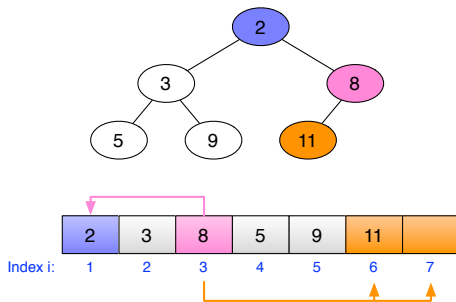
2	3	8	5	9	11	
---	---	---	---	---	----	--

Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste II

- **Wurzel:** an Position 1
- **Knoten an Position i :**
 - **Vater-Knoten** an Position $\lfloor i/2 \rfloor$
 - **linkes Kind** an Position $2i$;
 - **rechtes Kind** an Position $2i + 1$

Pseudocode:

- **vater(i):** return $\lfloor i/2 \rfloor$;
- **links(i):** return $2i$;
- **rechts(i):** return $2i + 1$;



HeapSort

- Sortieren mit Heap
- Idee:
 - Heap erstellen mit **buildMinHeap**
 - wiederhole **extractMin** bis Heap leer
- mit Heap direkt im Eingabefeld:

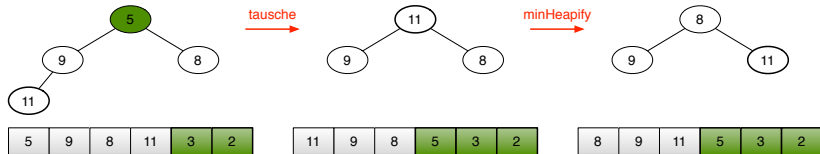
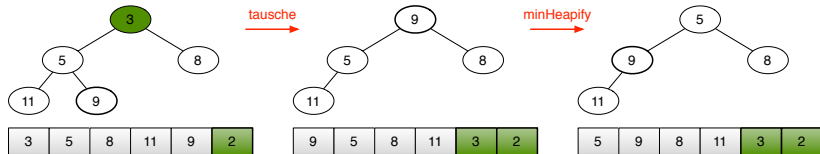
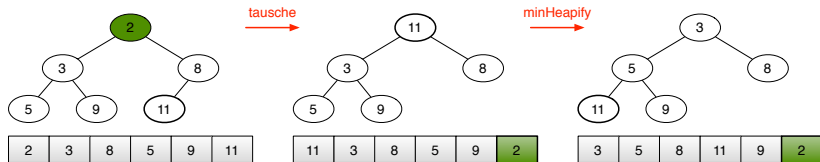
Input: Feld $A[1..n]$ der Länge n

HeapSort(A):

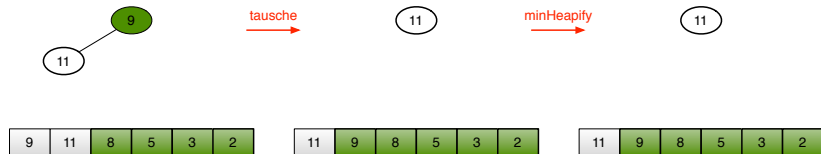
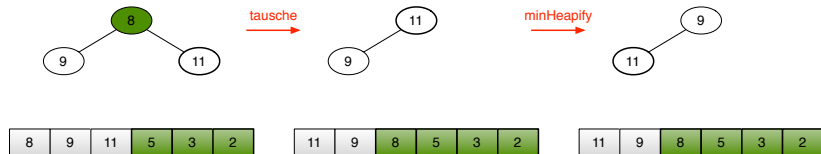
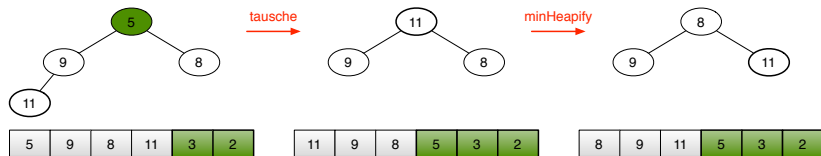
```
buildMinHeap(A);  
for  $i=n$  downto 2 {  
    tausche  $A[1]$  mit  $A[i]$ ;  
     $A.length = A.length - 1$ ;  
    minHeapify(A, 1);  
}
```

- **min-Heap** sortiert in **absteigender** Reihenfolge
- **max-Heap** sortiert in **aufsteigender** Reihenfolge

HeapSort: Beispiel 1



HeapSort: Beispiel II



HeapSort Eigenschaften

- sortiert in-place
- Komplexität $O(n \log n)$
 - besser als QuickSort im worst case!
 - in Praxis aber erst bei grossem n
- nicht stabil

Stabilität von Sortierverfahren

Stabilität

Ein Sortierverfahren heißt **stabil**, wenn es die Reihenfolge von gleichrangigen Elementen bewahrt.

Beispiel:

- unsortierte Liste:

5 2 3 4 3 (blau vor rot)

- sortierte Liste (**stabil**):


2 3 3 4 5 (blau vor rot)

- sortiere Liste (**nicht stabil**):

2 3 3 4 5 (rot vor blau)

Sortier-Algorithmen illustriert

Animationen der Sortier-Algorithmen:

 <http://www.sorting-algorithms.com>

Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
 - in-place, stabil
 - Komplexität $O(n^2)$, best case: $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität $O(n^2)$
- MergeSort
 - benötigt zusätzlichen Speicher, stabil
 - Komplexität $O(n \log n)$
- QuickSort
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität im Mittel $O(n \log n)$, worst case: $O(n^2)$
- HeapSort
 - in-place, nicht stabil
 - Komplexität $O(n \log n)$

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

Graphen

Bäume

Heaps

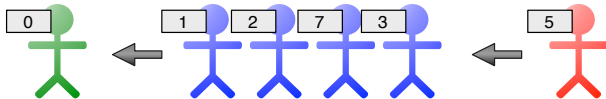
Priority Queues

Definition Priority Queue

Definition Priority Queue

Eine **Priority Queue** ist ein **abstrakter Datentyp**. Sie beschreibt einen **Queue-artigen** Datentyp für eine Menge von Elementen mit **zugeordnetem Schlüssel** und unterstützt die Operationen

- **Einfügen** von Element mit Schlüssel in die Queue,
- **Entfernen** von Element mit **minimalem Schlüssel** aus der Queue,
- **Ansehen** des Elementes mit **minimalem Schlüssel** in der Queue.



- entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Element mit **maximalem Schlüssel**

Definition Priority Queue (abstrakter)

Priority Queue P ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- `insert(P, x)` wobei x ein Element
- `extractMin(P)` liefert ein Element
- `minimum(P)` liefert ein Element
- `isEmpty(P)` liefert `true` or `false`
- `initialize` liefert eine Priority Queue Instanz

und mit Bedingungen

- `isEmpty(initialize()) == true`
- `isEmpty(insert(P, x)) == false`
- `minimum(initialize())` ist nicht erlaubt (Fehler)
- `extractMin(initialize())` ist nicht erlaubt (Fehler)

(Fortsetzung nächste Folie)

Definition Priority Queue (abstrakter)

Fortsetzung Bedingungen Priority Queue P:

- `minimum(insert(P, x))` liefert zurück
 - falls `P == initialize()`, dann `x`
 - sonst: `min(x, minimum(P))`
- `extractMin(insert(P, x))`
 - falls `x == minimum(insert(P, x))`, dann liefert es `x` zurück und hinterlässt `P` im Originalzustand
 - sonst liefert es `extractMin(P)` zurück und hinterlässt `P` im Zustand `insert(extractMin(P), x)`

(entsprechend für die Priority Queue mit maximalem Schlüssel)

Priority Queue: Implementationen I

- mit sortierten Feldern (als sequentielle oder verkettete Liste)
 - `insert` legt Element an richtiger Stelle in sortierter Liste ab mit $O(n)$ Komplexität
 - `minimum`, `extractMin` als $O(1)$ Operation
- mit unsortierten Feldern (als sequentielle oder verkettete Liste)
 - `insert` hängt Element einfach an Ende an mit $O(1)$
 - `minimum`, `extractMin` suchen nach Element mit kleinstem Schlüssel mit $O(n)$

→ beides **nicht sonderlich effizient** (je nach Abfolge der Operationen aber ok)

Priority Queue: Implementationen II

Priority Queue P als **min-Heap** $G = (V, E)$ mit Wurzel w :

- **minimum** von P liefert **Wurzel** w zurück
 - Komplexität $O(1)$
- **extractMin** von P entspricht **extractMin** von G
 - Komplexität $O(\log n)$
- **insert** von P erfordert ein klein wenig Extra-Aufwand:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element x

insert(A, x):

füge Element x an Ende von Heap A ein;

i = Index von letztem Element;

while (($i \neq 1$) && ($A[\mathbf{vater}(i)] > A[i]$)) {

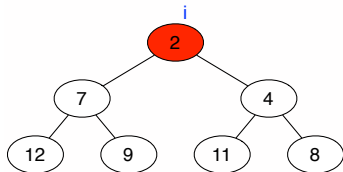
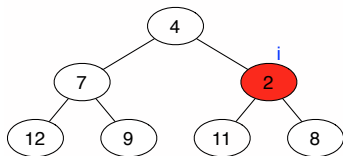
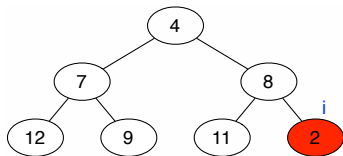
 tausche $A[i]$ mit $A[\mathbf{vater}(i)]$;

$i = \mathbf{vater}(i)$;

}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: insert Beispiel



Priority Queue: dynamisches Anpassen von Keys

- manchmal ändert sich der “Priorität” von Schlüsseln
 - Beispiel Algorithmen dafür in Kapitel 9!
- Operation `decreaseKey` verringert Schlüssel von bestimmten Element

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element mit Index i , neuer Schlüsselwert $wert$

decreaseKey(A , i , $wert$):

if ($wert > A[i]$) **error** “neuer Schlüssel größer als alter!”

$A[i] = wert$;

while (($i \neq 1$) && ($A[vater(i)] > A[i]$)) {

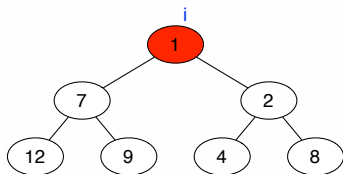
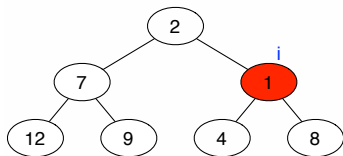
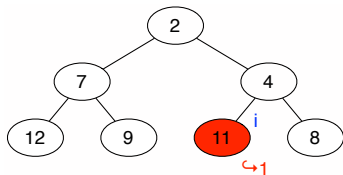
 tausche $A[i]$ mit $A[vater(i)]$;

$i = vater(i)$;

}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: decreaseKey Beispiel



Priority Queue: decreaseKey / insert

- mit Operation `decreaseKey` läßt sich `insert` anders formulieren:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element x

insert(A, x):

A.length = A.length + 1;

A[A.length] = ∞ ;

decreaseKey(A, A.length, x);

Priority Queue: Ausblick

- Priority Queue mit **Heap**: insert und decreaseKey sind $O(\log n)$
- dies läßt sich mit **Fibonacci-Heap** bzw. **Radix-Heap** verbessern auf (amortisiert) $O(1)$
 - Effiziente Algorithmen in Informatik

Priority Queues und Sortieren

- mit **Priority Queues** lassen sich **Sortier-Algorithmen** implementieren
- **Schema:**
 - alle Elemente in Priority Queue **einfügen**
 - der Reihe nach alle Elemente mit **extractMin** / **extractMax** entfernen
- **Beispiele:**
 - Priority Queue mit Heap: **HeapSort**
 - Priority Queue mit sortierter sequentieller Liste: **Insertion Sort**
 - Priority Queue mit unsortierter sequentieller Liste: **Selection Sort**

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

- Graphen

- Bäume

- Heaps

- Priority Queues