

Lösungsvorschläge zur Probeklausur zu Algorithmen und Datenstrukturen

**Aufgabe 1 Rechnen mit Landau-Symbolen**

**(5 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob folgende Behauptung wahr ist, und begründen Sie Ihre Aussage unter Angabe passender Konstanten.

$$-\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} + 5 = O(1)$$

Zu zeigen ist, dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $c \in \mathbb{R}$  existieren so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$-\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} + 5 \leq c$$

Wahl der Konstanten: wähle z.B.  $n_0 = 1$  und ein beliebiges  $c \geq 6$  (also z.B.  $c = 7$ ). Alternativ wähle ein  $n_0 > 1$  und wähle entsprechend ein passendes  $c \geq -\frac{4}{n_0^2} + \frac{5}{n_0} + 5$  (z.B.  $n_0 = 5$  und  $c = 6$ ).

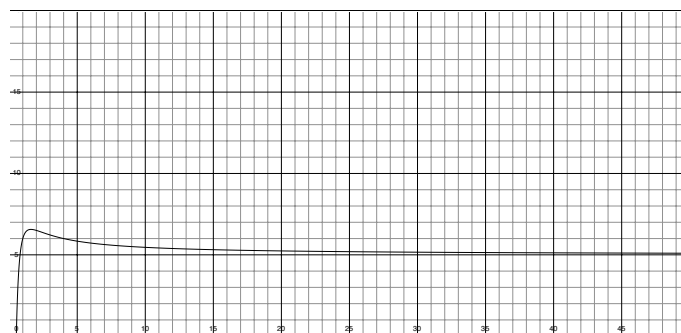
Mit diesen Konstanten gilt die Ungleichung, und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

Alternative Schlussfolgerung, dass Behauptung gilt: Die Folgen  $1/n^i$  konvergieren gegen 0, daher gilt die obige Ungleichung. (korrekte Konstanten sind trotzdem anzugeben!)

[[Optional: Bestimmung des Maximums der Funktion links durch Ableitung der linken Funktion auf Null setzen

$$\frac{8}{n} - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 1.6$$

ergibt ein Maximum der Funktion für  $n = 1.6$  mit einem Funktionswert von  $6\frac{9}{16} = 6.5625$ . Siehe auch Plot unten.]]



**Bewertung:**

- 1 Punkt für Ungleichung  $O(1)$ .
- 2 Punkte für korrekte Wahl  $n_0, c$ .
- 1 Punkt für korrekte Schlussfolgerung.

**Aufgabe 2 Boolesche Logik**

**(7 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion:

$$f : \begin{cases} \mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \mathbb{B} & \rightarrow & \mathbb{B} \\ (x_0, x_1, x_2) & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls Binärzahl } [x_2x_1x_0]_2 \text{ keine Primzahl ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels einer Wahrheitstabelle, wie in Vorlesung und Übung behandelt, dass der folgende logische Ausdruck gilt:

$$f(x_0, x_1, x_2) = (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2)$$

Geben Sie dabei für jeden durch Klammern umschlossenen Term eine eigene Spalte an!

*Hinweis:* Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ , die nur durch sich selbst und durch 1 ganzzahlig teilbar ist.

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$T_1$ $\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2$	$T_2$ $x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2$	$T_3$ $\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2$	$T_4$ $\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2$	$T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4$	$[x_2x_1x_0]_2$	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	1	0	0	0	1	0 <sub>10</sub>	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1 <sub>10</sub>	1
0	1	0	0	0	0	0	0	2 <sub>10</sub>	0
1	1	0	0	0	0	0	0	3 <sub>10</sub>	0
0	0	1	0	0	1	0	1	4 <sub>10</sub>	1
1	0	1	0	0	0	0	0	5 <sub>10</sub>	0
0	1	1	0	0	0	1	1	6 <sub>10</sub>	1
1	1	1	0	0	0	0	0	7 <sub>10</sub>	0

Die den beiden Seiten der Gleichung entsprechenden Spalten sind gleich, damit ist die Behauptung gezeigt. □

Alternativtabelle:

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$T_1$ $\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2$	$T_2$ $x_0 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2$	$T_3$ $\neg x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2$	$T_4$ $\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2$	$T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4$	$[x_2x_1x_0]_2$	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	1	0	0	0	1	0 <sub>10</sub>	1
0	0	1	0	0	1	0	1	4 <sub>10</sub>	1
0	1	0	0	0	0	0	0	2 <sub>10</sub>	0
0	1	1	0	0	0	1	1	6 <sub>10</sub>	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1 <sub>10</sub>	1
1	0	1	0	0	0	0	0	5 <sub>10</sub>	0
1	1	0	0	0	0	0	0	3 <sub>10</sub>	0
1	1	1	0	0	0	0	0	7 <sub>10</sub>	0

**Bewertung:**

- 1 Punkt für Aufstellung der Wahrheitstabelle mit  $x_0, x_1, x_2$ .
- 4 Punkte für Min-Term-Spalten  $T_i$  (jeweils 1 Punkt pro Spalte).
- 1 Punkt für Disjunktions-Spalte  $T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4$ .
- 1 Punkt für Spalte  $f(x_0, x_1, x_2)$ .
- Alle anderen Spalten dienen der Illustration und ergeben keine Punkte!

**Aufgabe 3 Zahldarstellung**

**(4 Punkte)**

Konvertieren Sie die Zahl  $7_{10}$  in eine 4-bit Binärzahl. Berechnen Sie dann das 2-Komplement dieser 4-bit Binärzahl. Warum lässt sich das entstandene Bitmuster in der 2-Komplement-Darstellung als negative Zahl interpretieren?

*Konversion in Binärzahl:*

$$7_{10} = 4_{10} + 2_{10} + 1_{10} = 0111_2$$

*Zweierkomplement ist bitweise Inversion und Addition von 1:*

$$\overline{0111}_2 + 1_2 = 1000_2 + 1_2 = 1001_2$$

*Das erste Bit stellt das Vorzeichen dar:  $1001_2$  kann interpretiert werden als*

- $0111_2$  ist positiv (wegen 0): also  $7_{10}$
- $1001_2$  ist negativ (wegen 1), also  $-7_{10}$

**Bewertung:** 1 Punkt für korrekte 4-bit Binärzahl, 1 Punkt für korrektes 2-Komplement, jeweils 1 Punkt für korrekte Interpretation des Bitmusters.

**Aufgabe 4** Sequentielle Liste

(2 Punkte)

Gegeben sei ein Feld  $A$  implementiert als sequentielle Liste (Array). Was ist die Komplexität der Einfüge-Operation `insert` und der Zugriffs-Operation `elementAt`?

*insert* : Man muss Elemente hinter der Einfügeposition nach hinten verschieben, diese Operation hat die Komplexität  $O(n)$ .

*elementAt* : In einer sequentiellen Liste hat man direkten Zugriff auf die einzelnen Elemente, daher ist die Komplexität  $O(1)$ .

**Bewertung:** Jeweils 1 Punkt für korrekte Komplexität.

**Aufgabe 5** Stack

(3 Punkte)

Nennen Sie kurz *eine* Methode, um den abstrakten Datentyp Stack mittels elementarer Datenstrukturen zu implementieren. Was sind dann jeweils die Komplexitäten der Operation `push` und `pop`?

**Möglichkeit 1:** Einfach verkettete Liste. Der Zeiger `start` zeigt hierbei auf das oberste Element des Stacks.

**Möglichkeit 2:** Sequentielle Liste mit Index-Variable.

Komplexität von `push` und `pop` bei beiden Möglichkeiten jeweils  $O(1)$ , da die Liste nie durchlaufen werden muss.

**Bewertung:** 1 Punkt für korrekte Implementierung von Stack mittels elementarer Datenstruktur, jeweils 1 Punkt für korrekte Komplexitäten.

**Aufgabe 6** Verifikation

(6 Punkte)

Gegeben sei ein Feld von reellen Zahlen  $X[0..n-1]$  der Länge  $n$ . Die Funktion **Mean**( $X$ ) soll den Mittelwert  $\bar{X}$  von  $X$  berechnen,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X[i]$$

Nachfolgend der Pseudocode der Funktion **Mean**( $X$ ). Hierbei sind die in geschweiften Klammern eingeschlossenen Bezeichner  $\{C_k\}$ , wie aus Vorlesung und Übung gewohnt, Platzhalter für logische Bedingungen, die zur Verifikation benötigt werden.

**Mean**( $X$ ):

$\{C_0\}$

`meanval = 0;`

`i = 0;`

$\{C_1\}$

**while**  $(i < n)$  {

$\{C_2\}$

`meanval = meanval +  $\frac{X[i]}{n}$ ;`

`i = i + 1;`

$\{C_3\} = \rho$

**return** `meanval;`

$\{C_4\}$

- a) Geben Sie jeweils eine geeignete Vor- und Nachbedingung  $C_0$  bzw.  $C_4$  der Funktion **Mean**( $X$ ) an!

$$C_0 = (n > 0 \wedge X[k] \in \mathbb{R} \forall k \in \{0 \dots n-1\})$$

$$C_4 = (\bar{X} = \text{meanval})$$

Bei  $C_0$  kommen  $\text{meanval}$ ,  $i$  nicht vor.

Bei  $C_4$  ist  $\text{mean}(X) = \text{meanval}$  sinnlos!

**Bewertung:** jeweils 1 Punkt für korrekte Vor- und Nachbedingung.

- b) Geben Sie eine geeignete Schleifeninvariante  $P$  für die Schleife **while** ( $i < n$ ) { ... } an!  
Was ist die Vorbedingung  $C_1$  dieser Schleife?

$$P = \left( \text{meanval} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n-1} X[j] = \bar{X} \right) \leftarrow$$

$$C_1 = C_0 \wedge (i = 0) \wedge (\text{meanval} = 0) \leftarrow$$

**Bewertung:** 1 Punkt für korrekte Schleifeninvariante, 1 Punkt für korrekte Vorbedingung.

- c) Welche drei Bedingungen müssen überprüft werden, damit die Korrektheit der **while** Schleife mittels der Invariante  $P$  gezeigt werden kann? Zeigen Sie, dass diese drei Bedingungen in diesem Fall erfüllt sind!

*Hinweis:* Sie können hierzu die Vorbedingungs-Platzhalter  $C_1, C_2, C_3, C_4$  verwenden.

Zu zeigen sind:

- Bedingung 1: Schleifeneintritt:  $C_1 \Rightarrow P$

Trivial, es gilt  $i = 0$  und  $\text{meanval} = 0$ , damit entspricht  $P$  der Definition des Mittelwerts.

- Bedingung 2: Schleifenkörper:  $\{C_2 = P \wedge (i < n)\} \dots \{C_3 = P\}$

Wir schreiben die neuen Werte mit Hilfsvariablen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{meanval}' = \text{meanval} + \frac{X[i]}{n} \\ i' = i + 1 \end{array} \right\}$$

Soll bei  $C_3$  die Invariante  $P$  gelten, so betrachten wir

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{meanval}' + \frac{1}{n} \sum_{j=i'}^{n-1} X[j] &= \text{meanval} + \frac{X[i]}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{n-1} X[j] \\ &= \text{meanval} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n-1} X[j] \\ &\stackrel{P}{=} \bar{X} \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Zeile, da zuvor die Invariante  $P$  ja erfüllt war, und insgesamt gilt  $P$  auch am Ende des Schleifenkörpers.

- Bedingung 3: Schleifenende:  $(P \wedge \neg(i < n)) \Rightarrow C_4$

Wir betrachten den ersten Fall mit  $\neg(i < n)$ , also  $i = n$ . Dann gilt:

$$P \wedge (i = n) \Rightarrow \text{meanval} = \bar{X}$$

Dies ist genau die Nachbedingung  $C_4$ !

**Bewertung:** jeweils 1 Punkt für Bedingungen, jeweils 1 Punkt für korrekte Anwendung, insgesamt 6 Punkte.

**Aufgabe 7 Sortieren**

**(7 Punkte)**

- a) Geben Sie einen Sortier-Algorithmus an, der im Mittel mit Komplexität  $O(n \log n)$  sortiert! Nach welchem Algorithmen-Muster wurde dieser Algorithmus entworfen?

*Divide and Conquer: Merge oder Quick Sort*

*Bewertung: 1 Punkt für Merge oder Quick Sort, 1 Punkt für Divide and Conquer.*

- b) Gegeben sei eine bereits sortierte Liste von natürlichen Zahlen der Länge  $n$ . In diese Liste soll nun ein weiteres Element einsortiert werden. Schlagen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus für diese Aufgabe vor und geben Sie dessen Komplexität an.

*Insertion Sort ohne die äußere Schleife, damit dann  $O(n)$ .*

*Bewertung: 1 Punkt für Insertion Sort, 1 Punkt für Komplexität.*

- c) Skizzieren Sie (durch Angabe des Zustandes nach jedem Durchlauf der Hauptschleife), wie der *Quick Sort* die folgende Zahlenreihe sortieren würde! Wählen Sie als Pivot-Element stets das erste Element.

5 , 7 , 1 , 9 , 3

*(Aktive Pivot-Elemente sind grün eingefärbt, während bearbeitete gelb eingefärbt wurden)*

5 , 7 , 1 , 9 , 3

3 , 7 , 1 , 9 , 5

3 , 1 , 5 , 9 , 7

3 , 1 , 5 , 9 , 7

1 , 3 , 5 , 7 , 9

1 , 3 , 5 , 7 , 9

1 , 3 , 5 , 7 , 9

*Bewertung: 0,5 Punkte pro Schritt, letzter Schritt kann entfallen (da trivial).*

*In einer echten Klausur sollten Sie von den erreichbaren Punkten mindestens die Hälfte erzielen, in diesem Beispiel also 17 Punkte.*

# Aufgabe 3

Note Title

5/23/2016

$$7_{10} \cong \begin{array}{r} \textcircled{0}111_2 \\ 1000 \\ + 0001 \\ \hline \textcircled{1}001_2 \end{array} \cong -7_{10}$$

# Aufgabe 6

Note Title

5/23/2016

$$C_1 \Rightarrow P$$

$$C_1 \Rightarrow i=0 \wedge \text{meanval} = 0$$

$$P \Rightarrow \text{meanval} + \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n-1} x[j] = 0 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x[j] \stackrel{\text{Def.}}{=} \bar{x} \quad \checkmark$$