

# Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures  
Technische Universität München



## Programm heute

- ① Einführung
- ② Grundlagen von Algorithmen
- ③ Grundlagen von Datenstrukturen
- ④ Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- ⑤ Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

3

## Wozu Effizienz?

“Wenn das Programm zu langsam läuft, kaufen wir einfach einen schnelleren Rechner!”

- der schnellere Rechner ist eventuell trotzdem nicht schnell genug
- auch wenn es schnell genug läuft, Energie sparen (z.B. wegen Akkulaufzeit!)

## Komplexität von Algorithmen

Interessante Fragen bei **Algorithmus A**:

- wie viel **Speicherplatz** benötigt Algorithmus?
- wie viel **Rechenzeit** benötigt Algorithmus?

→ **Komplexitätsanalyse**

Wesentlicher Faktor bei Komplexität: **Größe der Eingabe n**

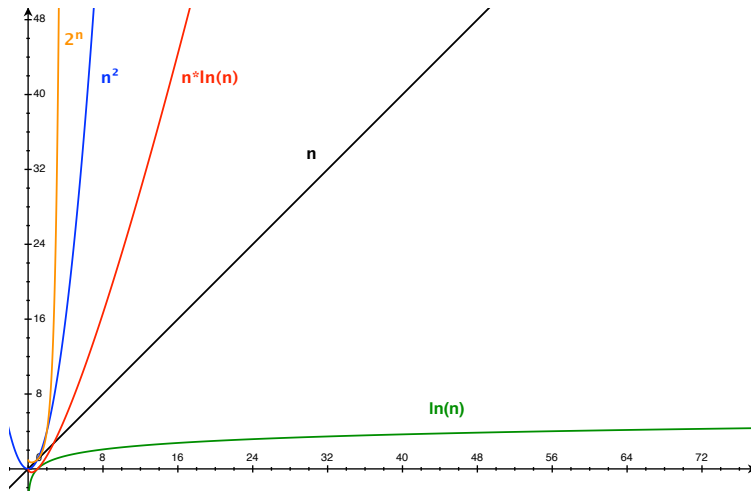
- benötigter Speicher abhängig von n
- benötigte Rechenzeit abhängig von n

→ Funktion T zur Beschreibung des **Wachstumsverhaltens** von A

4

5

## Typische Wachstumsraten



## Wachstumsraten illustriert

Annahme: Rechner mit 1GHz Taktfrequenz

- eine Operation benötigt 1ns (nano-Sekunde)
- $n$  bezeichne Anzahl Operationen

$n$	$T(n) = \ln(n)$	$T(n) = n$	$T(n) = n \ln(n)$	$T(n) = n^2$	$T(n) = 2^n$	$T(n) = n!$
10	0.003 $\mu$ s	0.01 $\mu$ s	0.033 $\mu$ s	0.1 $\mu$ s	1 $\mu$ s	3.63ms
20	0.004 $\mu$ s	0.02 $\mu$ s	0.086 $\mu$ s	0.4 $\mu$ s	1ms	77.1 years
30	0.005 $\mu$ s	0.03 $\mu$ s	0.147 $\mu$ s	0.9 $\mu$ s	1s	$8.4 \cdot 10^{15}$ years
40	0.005 $\mu$ s	0.04 $\mu$ s	0.213 $\mu$ s	1.6 $\mu$ s	18.3min	
50	0.006 $\mu$ s	0.05 $\mu$ s	0.282 $\mu$ s	2.5 $\mu$ s	13 days	
100	0.007 $\mu$ s	0.1 $\mu$ s	0.644 $\mu$ s	10 $\mu$ s	$4 \cdot 10^{13}$ years	
1000	0.010 $\mu$ s	1.0 $\mu$ s	9.966 $\mu$ s	1ms		
10000	0.013 $\mu$ s	10 $\mu$ s	130 $\mu$ s	100ms		
100000	0.017 $\mu$ s	0.1ms	1.67ms	10s		
$1 \cdot 10^6$	0.020 $\mu$ s	1ms	19.93ms	16.7min		
$1 \cdot 10^7$	0.023 $\mu$ s	0.01s	0.23s	1.16 days		
$1 \cdot 10^8$	0.027 $\mu$ s	0.1s	2.66s	115.7 days		
$1 \cdot 10^9$	0.030 $\mu$ s	1s	29.9s	31.7 years		

Tabelle adaptiert von "The Algorithm Design Manual", S. Skiena, Springer

6

7

## Wiederholung: Insertion Sort

**Input:** Feld  $A[0..n-1]$  von  $n$  natürlichen Zahlen

**Output:** Feld  $A$  aufsteigend sortiert

**InsertionSort(A):**

```

1  for j=1 to länge(A)-1 {
2    key = A[j];
3    // füge A[j] in sortierte Liste A[0..j-1] ein
4    i = j-1;
5    while (i >= 0 && A[i] > key) {
6      A[i+1] = A[i];
7      i = i-1;
8    }
9    A[i+1] = key;
10 }
```

## Komplexität von Insertion Sort

Speicher:

- Feld  $A$  (Länge  $n$ ), eine extra Variable (key), 2 Hilfsvariablen ( $i, j$ )

Zeit:

- Annahme: jeder elementare Verarbeitungsschritt in Zeile  $i$  benötigt konstante Zeit  $c_i \in \mathbb{R}$

- Beschreibe Laufzeit mittels

Laufzeitfunktion  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T : n \mapsto T(n)$

- $T(n)$  beschreibt Wachstumsverhalten in Abhängigkeit von Eingabegröße  $n$

8

9

## Laufzeit Insertion Sort I

### Kostenübersicht:

Zeile	Kosten	wie oft?
1	$c_1$	
2	$c_2$	
3	0	Kommentar
4	$c_4$	
5	$c_5$	
6	$c_6$	
7	$c_7$	
8	0	Blockabschluß
9	$c_9$	
10	0	Blockabschluß

### InsertionSort(A):

```

1 for j=1 to länge(A)-1 {
2   key = A[j];
3   // füge A[j] in sortierte
   // Liste A[0..j-1] ein
4   i = j-1;
5   while (i >= 0 && A[i] > key) {
6     A[i+1] = A[i];
7     i = i-1;
8   }
9   A[i+1] = key;
10 }
```

$t_j$  bezeichnet Anzahl der Abfragen der while-Bedingung in Zeile 5 für Durchlauf  $j$

10

## Laufzeit Insertion Sort II

### Berechnung der Laufzeit $T(n)$ :

- $T(n)$  ist Summe aller Laufzeiten der ausgeführten elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel: Schritt 1 (Zeile 1) kostet  $c_1$  und wird  $n$  mal ausgeführt

$$\begin{aligned}
 T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) \\
 &+ c_5 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_6 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) \\
 &+ c_7 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_9(n-1)
 \end{aligned}$$

- Beobachtung:  $T(n)$  hängt stark von tatsächlichen Eingabe ab!

11

## Laufzeit Insertion Sort III

Laufzeit  $T(n)$  im **besten Fall** (best case)?

- best case: Feld A ist **bereits sortiert** bevor Algorithmus aufgerufen wird
- in while-Schleife (Zeile 5) wird Bedingung nur **einmal** abgefragt
  - es ist nämlich  $A[i] \leq \text{key}$
  - also  $t_j = 1$  für  $j = 1, \dots, n-1$
- Also:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) \\
 &+ c_5(n-1) + c_6 \cdot 0 \\
 &+ c_7 \cdot 0 + c_9(n-1) \\
 &= \underbrace{(c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_9)}_{=:a} n - \underbrace{(c_2 + c_4 + c_5 + c_9)}_{=:b} \\
 &= an - b \quad (a, b \text{ Konstanten})
 \end{aligned}$$

12

## Laufzeit Insertion Sort IV

Laufzeit  $T(n)$  im **schlechtesten Fall** (worst case)?

- worst case: Feld A ist **bereits absteigend sortiert** bevor Algorithmus aufgerufen wird
- in while-Schleife (Zeile 5) muß mit **allen** Elementen  $A[0..j-1]$  verglichen werden
  - es ist nämlich  $A[i] > \text{key}$
  - also  $t_j = j + 1$  für  $j = 1, \dots, n-1$
- Also:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) \\
 &+ c_5 \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) + c_6 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) \\
 &+ c_7 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) + c_9(n-1)
 \end{aligned}$$

da Gauss'sche Summenformel:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (j+1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

13

## Laufzeit Insertion Sort V

Fortsetzung worst case  $T(n)$ :

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \left( \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &\quad + c_6 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) + c_7 \left( \frac{n(n-1)}{2} \right) + c_9(n-1) \\ &= \underbrace{\left( \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} \right)}_{=:a} n^2 + \underbrace{\left( c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_9 \right)}_{=:b} n \\ &\quad - \underbrace{(c_2 + c_4 + c_5 + c_9)}_{=:c} \\ &= an^2 + bn - c \end{aligned}$$

14

## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen

Motivation

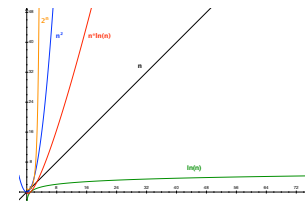
Das RAM-Modell

Landau-Symbole

16

## Zusammenfassung Insertion Sort

- tatsächliche Kosten wurden abstrahiert in **Konstanten  $c_i$** 
  - der tatsächliche Wert der Konstanten ist abhängig von Compiler und Rechner
  - einfaches Modell hierfür: RAM-Modell (später mehr hierzu)
- detaillierte Laufzeitanalyse ist aufwendig, schon im sehr einfachen Beispiel
- die wesentliche Information steckt im **Grad des Wachstums** bzw. im **asymptotischen Verhalten** der Laufzeit bei wachsendem  $n$ 
  - im Beispiel hier: linear im best case, quadratisch im worst case



15

## RAM-Modell

- einfaches Rechnermodell für Laufzeitanalyse
- Ziel: **Abschätzung** der erforderlichen Ressourcen zur Ausführung eines Algorithmus
  - exakte Zeit der Ausführung ist nicht relevant
- Modell: **Random Access Machine**, kurz **RAM**

17

## Annahmen im RAM-Modell

- nur **sequentielle Ausführungen**
  - das heißt nur 1 Prozessor, keine Parallelität
- alle Daten liegen **direkt zugreifbar** im Speicher (→ RAM)
- jeder Speicherzugriff **dauert gleich lang**
  - das ist in Wahrheit nicht der Fall! (Speicher-Hierarchie)
- alle elementaren Verarbeitungsschritte benötigen **eine Zeiteinheit**
  - Wertzuweisung
  - Arithmetische Operationen: +, -, \*, /, %, ceil, floor
  - Vergleichsoperationen: <, >, !=
  - Kontrollflußoperationen: **if, else**

18

## Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus	Umwandlung
$X = X+1;$	
<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { $X = X+1;$ }	$i = 1;$ <b>while</b> (i < n+1) { $X = X+1;$ $i += 1;$ }

19

## Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus (umgewandelt)	Anzahl Schritte
$X = X+1;$	
$i = 1;$ <b>while</b> (i < n+1) { $X = X+1;$ $i += 1;$ }	

20

## Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus	Umwandlung
<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { <b>for</b> j=1 <b>to</b> n { $X = X+1;$ } }	$i=1;$ <b>while</b> (i < n+1) { $j=1;$ <b>while</b> (j < n+1) { $X = X+1;$ $j += 1;$ } $i += 1;$ }

21

## Beispiel: Laufzeit mit RAM-Modell

- Laufzeit von Algorithmus ermittelt über Anzahl der elementaren Verarbeitungsschritte
- Beispiel:

Algorithmus (umgewandelt)      Anzahl Schritte

```

i = 1;
while (i < n+1) {
  j = 1;
  while (j < n+1) {
    X = X+1;
    j += 1;
  }
  i += 1;
}

```

22

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

Komplexeres Beispiel:

Algorithmus A bestehend aus drei Teilen A1, A2, A3:

A = A1; A2; A3

mit

A1	A2	A3
X = X+1; Y = Y+1; Z = Z+1;	<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { X = X+Y; Y = Y*Z; }	<b>for</b> i=1 <b>to</b> n { <b>for</b> j=1 <b>to</b> n { X = X+1; Y = Y+2; Z = Z+3; } }

Zunächst Umwandlung der **for**-Schleifen!

23

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

Komplexeres Beispiel:

Algorithmus A bestehend aus drei Teilen A1, A2, A3:

A = A1; A2; A3

mit

A1	A2	A3
X = X+1; Y = Y+1; Z = Z+1;	i = 1; <b>while</b> (i < n+1) { X = X+Y; Y = Y*Z; i += 1; }	i = 1; <b>while</b> (i < n+1) { j = 1; <b>while</b> (j < n+1) { X = X+1; Y = Y+2; Z = Z+3; j += 1; } i += 1; }

24

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

Komplexeres Beispiel:

Algorithmus A bestehend aus drei Teilen A1, A2, A3:

A = A1; A2; A3

mit

Laufzeit für A1:  $T_{A1}(n) = 3$   
 Laufzeit für A2:  $T_{A2}(n) = 4n + 2$   
 Laufzeit für A3:  $T_{A3}(n) = 5n^2 + 4n + 2$

Und damit gesamt für A:  $T(n) = 7 + 8n + 5n^2$

25

## Beispiel 2: Laufzeit mit RAM-Modell

$$T(n) = 7 + 8n + 5n^2$$

- wie ist das **Wachstum** von  $T(n)$ ?
- Beispiel-Werte für  $n$ :

$$n = 2 \quad T(2) = 7 + 16 + 20$$

$$n = 10 \quad T(10) = 7 + 80 + 500$$

$$n = 100 \quad T(100) = 7 + 800 + 50000$$

$$n = 1000 \quad T(1000) = 7 + 8000 + 5000000$$

→ quadratischer Term dominiert

26

## Komplexität

Beispiele zeigen: Term mit höchstem Exponent dominiert  
Wachstumsrate

Präzise Notation → Landau-Symbole

28

## Programm heute

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

27

## Landau-Symbol $\Theta$

### Landau-Symbol $\Theta$

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Landau-Symbol  $\Theta(g)$  ist definiert als die Menge

$$\Theta(g) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass} \right. \\ \left. \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \right\}$$

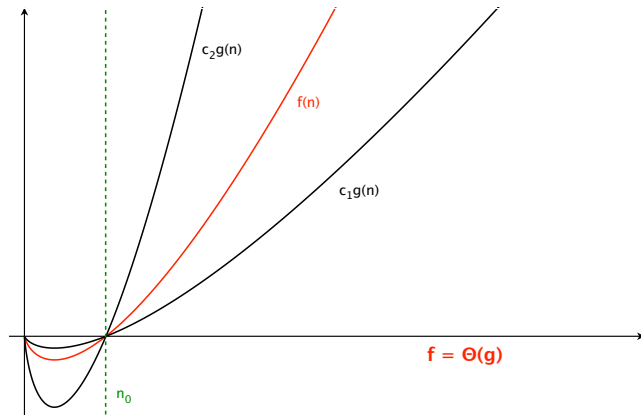
Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in \Theta(g)$  schreiben wir kurz:  $f = \Theta(g)$ .

- $f$  ist also bis auf konstanten Faktor im wesentlichen “gleich” der Funktion  $g$  für  $n \geq n_0$
- man sagt auch:  $g$  ist **asymptotisch scharfe Schranke** von  $f$  (von oben und unten)
- Kurznotation:  $f = \Theta(g)$  oder  $f(n) = \Theta(g(n))$

29

## Landau-Symbol $\Theta$

$\Theta(g) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass}$   
 für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$



30

## Beispiel: Laufzeit Insertion Sort I

- Laufzeit für worst case von Insertion Sort:

$$T(n) = an^2 + bn - c,$$

wobei  $a = \frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}$ ,  $b = c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_9$   
 und  $c = c_2 + c_4 + c_5 + c_9$

- weitere Annahme: alle Konstanten  $c_i = 1$  für  $i = 1, \dots, 9$

$$\rightarrow T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

31

## Beispiel: Laufzeit Insertion Sort II

$$T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

**Behauptung:**  $T(n) = \Theta(n^2)$

- Zu zeigen: finde  $c_1, c_2 > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$0 \leq c_1 n^2 \leq T(n) \leq c_2 n^2 \quad \text{für } n \geq n_0$$

- linke Seite:

$$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4 \quad \left| \frac{1}{n^2} \right.$$

$$0 \leq c_1 \leq \frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2}$$

Wähle z.B.  $n_0 = 1$ , dann  $c_1 = 1$ .

- rechte Seite:  $n_0 = 1$  und  $\frac{3}{2} + \frac{7}{2n} - \frac{4}{n^2} \leq 5 = c_2$  ✓

32

## Beispiel: Polynom 2. Grades

Allgemeiner:

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

**Behauptung:**  $f(n) = \Theta(n^2)$

- wähle  $c_1 = \frac{a}{4}$ ,  $c_2 = \frac{7a}{4}$  sowie  $n_0 = 2 \cdot \max\left(\frac{|b|}{a}, \sqrt{\frac{|c|}{a}}\right)$

- es folgt:  $0 \leq c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n^2$  für  $n \geq n_0$  ✓

33



## Beispiel: Polynome vom Grad $d$

Noch allgemeiner:

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $a_d > 0$  (Polynom vom Grad  $d$ ).

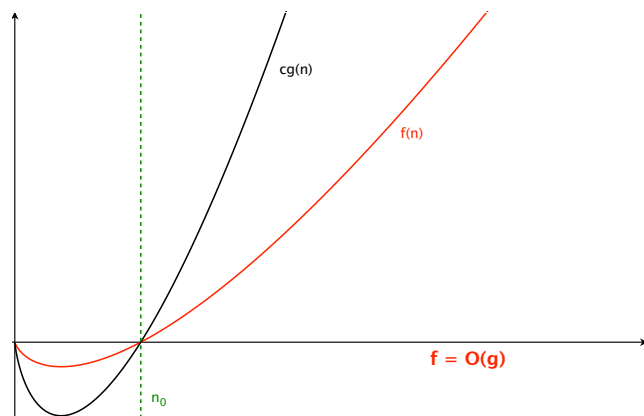
Dann gilt:

$$p(n) = \Theta(n^d)$$

34

## Landau-Symbol $O$

$O(g) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass}$   
für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$



36

## Landau-Symbol $O$

### Landau-Symbol $O$

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das Landau-Symbol  $O(g)$  ist definiert als die Menge

$$O(g) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \text{es existieren } c > 0 \text{ und } n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass}$$
  
für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $0 \leq f(n) \leq cg(n)\}$

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in O(g)$  schreiben wir kurz:  $f = O(g)$ .

- man sagt auch:  $g$  ist **asymptotisch obere Schranke** von  $f$
- auch genannt: "**gross-O-Notation**"
- aus  $f = \Theta(g)$  folgt automatisch  $f = O(g)$

35

## Beispiel: lineare Funktion

$$f(n) = 60n + 12$$

- **Behauptung:**  $f(n) = O(n)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn \quad \left| \frac{1}{n} \right.$$
$$0 \leq 60 + \frac{12}{n} \leq c$$

also z.B.  $n_0 = 12$  und  $c = 61$  ✓

- **Behauptung:**  $f(n) = O(n^2)$

- tatsächlich:

$$0 \leq 60n + 12 \leq cn^2 \quad \iff \quad 0 \leq \frac{60}{n} + \frac{12}{n^2} \leq c$$

also z.B.  $n_0 = 1$  und  $c = 73$  ✓

37

## Landau-Symbole $\Theta$ und $O$

- Landau-Symbole beschreiben **Wachstumsverhalten** von Funktionen
- $f = \Theta(g)$  bedeutet:  $g$  ist asymptotisch **scharfe** Schranke von  $f$
- $f = O(g)$  bedeutet:  $g$  ist asymptotisch **obere** Schranke von  $f$
- Landau-Symbol  $\Theta$  ist “exakt”
- Landau-Symbol  $O$  kann zu “grosszügig” sein (siehe vorige Folie)
- Landau-Symbol  $O$  beschreibt Laufzeit im schlechtesten Fall (worst case)

38

## Effizienz von Algorithmen I

$O$ -Notation erlaubt **Kategorisierung** der Effizienz von Algorithmen

- $O(1)$ : **konstante Laufzeit**
  - unabhängig von Problemgröße
  - *Beispiel*: Löschen von erstem Element in verketteter Liste
- $O(\log n)$ : **logarithmische Laufzeit**
  - Laufzeit wächst langsamer als Problemgröße
  - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
  - *Beispiel*: Suchen in sortierter Liste (Binäre Suche, s. Kapitel 8)
- $O(n)$ : **lineare Laufzeit**
  - Laufzeit wächst vergleichbar zur Problemgröße
  - jedes Eingabe-Element erfordert  $O(1)$  Arbeit
  - *Beispiele*: Suchen in unsortierter Liste, Löschen von Element in sequentieller Liste

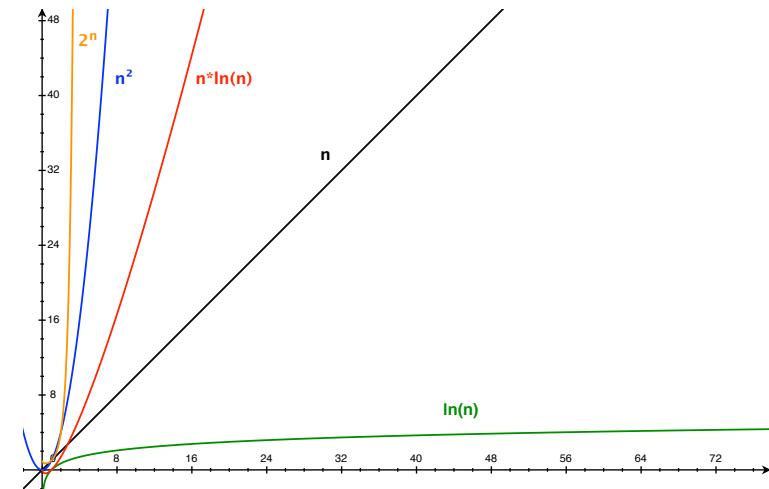
39

## Effizienz von Algorithmen II

- $O(n \log n)$ : “loglinear” Laufzeit
  - Laufzeit wächst schneller als Problemgröße
  - typisch für Divide & Conquer Algorithmen (s. Kapitel 6)
  - *Beispiele*: Quicksort (s. Kapitel 6), FFT (s. Kapitel 10)
- $O(n^2)$ : **quadratische Laufzeit**
  - typisch für Algorithmen, die Element paarweise kombinieren
  - *Beispiele*: Insertion Sort, Matrix-Vektor Multiplikation (s. Kapitel 10)
- $O(n^3)$ : **kubische Laufzeit**
  - *Beispiel*: Matrix-Matrix Multiplikation
- $O(2^n)$ : **exponentielle Laufzeit**
  - auch als “unlösbar” bezeichnet (intractable)
  - *Beispiel*: Traveling Salesman (kürzeste Route, so dass alle Städte exakt einmal besucht)

40

## Wiederholung: Wachstumsraten



41

## Konstanten in Landau-Symbolen

- Landau-Symbole  $\Theta$ ,  $O$  enthalten Konstanten  $c_1, c_2$  bzw.  $c$   
→ für **asymptotisches Verhalten** ( $n \rightarrow \infty$ ) vernachlässigbar
- Aber: ist  $n$  klein, spielen die Konstanten sehr wohl eine Rolle!
  - es kann angebracht sein einen eigentlich komplexeren Algorithmus einzusetzen, da bei kleinem  $n$  die Konstanten mehr zählen
  - Beispiel: Insertion Sort

42

## Rechenregel für $O$ -Notation II

Zu zeigen:

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

- da  $T_1(n) = O(f(n))$ , gibt es  $c_1 > 0$  und  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit

$$T_1(n) \leq c_1 f(n) \quad \text{für } n \geq n_1$$

- da  $T_2(n) = O(g(n))$ , gibt es  $c_2 > 0$  und  $n_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$T_2(n) \leq c_2 g(n) \quad \text{für } n \geq n_2$$

- Setze  $n_0 := \max(n_1, n_2)$ , dann ist für  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} T_1(n) + T_2(n) &\leq c_1 f(n) + c_2 g(n) \\ &\leq (c_1 + c_2) \max(f(n), g(n)) \end{aligned}$$

- das bedeutet  $T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$  ✓

44

## Rechenregel für $O$ -Notation I

### Addition in $O$ -Notation

Seien  $A_1, A_2$  zwei Algorithmen mit Laufzeiten

$$T_1(n) = O(f(n)), \quad T_2(n) = O(g(n))$$

für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann hat der Algorithmus  $A = A_1; A_2$  (sequentielle Ausführung von  $A_1, A_2$ ) die Komplexität

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(\max(f(n), g(n)))$$

**Beispiel:** Sei  $A_1 = O(\log n)$ ,  $A_2 = O(n^2)$ . Dann ist für  $A = A_1; A_2$

$$A = O(\max(\log n, n^2)) = O(n^2)$$

43

## Komplexität der elementaren Bausteine

- Elementarer Verarbeitungsschritt:
  - $O(1)$
- Sequenz:
  - Addition in  $O$ -Notation
- Bedingter Verarbeitungsschritt:
  - Maximum von Komplexität von if und else Block, sowie
  - $O(1)$  für Auswertung der Bedingung
- Wiederholung:
  - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit Komplexität Schleifenkörper, sowie
  - Anzahl Wiederholungen multipliziert mit  $O(1)$  für Auswertung der Schleifenbedingung

45

## Komplexität eines Algorithmus

Algorithmus besteht aus elementaren Bausteinen

→ Komplexität eines ganzen Algorithmus ergibt sich aus

- Komplexität der elementaren Bausteine
- und der Addition in  $O$ -Notation

## Komplexität Operationen elementarer Datenstrukturen

- sequentielle Liste:
  - elementAt  $O(1)$ , insert  $O(n)$ , erase  $O(n)$
- verkettete Liste:
  - elementAt  $O(n)$ , insert  $O(n)$ , erase  $O(n)$
- Stack als sequentielle Liste:
  - push, pop, top alle  $O(1)$
- Stack als verkettete Liste:
  - push, pop, top alle  $O(1)$
- Queue als verkettete Liste:
  - enqueue, dequeue beide  $O(1)$

46

47

## Zusammenfassung

- 1 Einführung
- 2 Grundlagen von Algorithmen
- 3 Grundlagen von Datenstrukturen
- 4 Grundlagen der Korrektheit von Algorithmen
- 5 Grundlagen der Effizienz von Algorithmen
  - Motivation
  - Das RAM-Modell
  - Landau-Symbole

48