Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen
   - Lineare Suche
   - Binäre Suche
   - Binäre Suchbäume
   - Balancierte Suchbäume
   - Suchen mit Hashtabellen
   - Suchen in Zeichenketten

Wörterbücher

Wörterbuch

Ein Wörterbuch (auch genannt Dictionary oder Assoziatives Array) speichert eine Menge von Elementen M. Jedes Element $e \in M$ wird durch einen Schlüssel $key(e)$ eindeutig identifiziert.

Unterstützte Operationen sind:

- search(key k): finde $e \in M$ mit $key(e) = k$
- insert(Element e): erweitere M um e
- erase(key k): entferne e aus M, wobei $key(e) = k$

Beispiele:

- Telefonbuch
  - Element: Name, Adresse und Telefonnummer
  - Schlüssel: Name
- Compiler-Symboltabelle
  - Element: Bezeichner und Typ-/Speicher-Informationen
  - Schlüssel: Bezeichner

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit linearer Suche
  - search O(n), insert O(1), erase O(n)
- M als sortierte verkettete Liste mit binärer Suche
  - search O(log n), insert O(n), erase O(log n)
- M als AVL-Suchbaum
  - search O(log n), insert O(log n), erase O(log n)
- M als Hashtabelle
  - search O(1), insert O(1), erase O(1) im Mittel!
  - Worst case: search O(n), insert O(1), erase O(n)

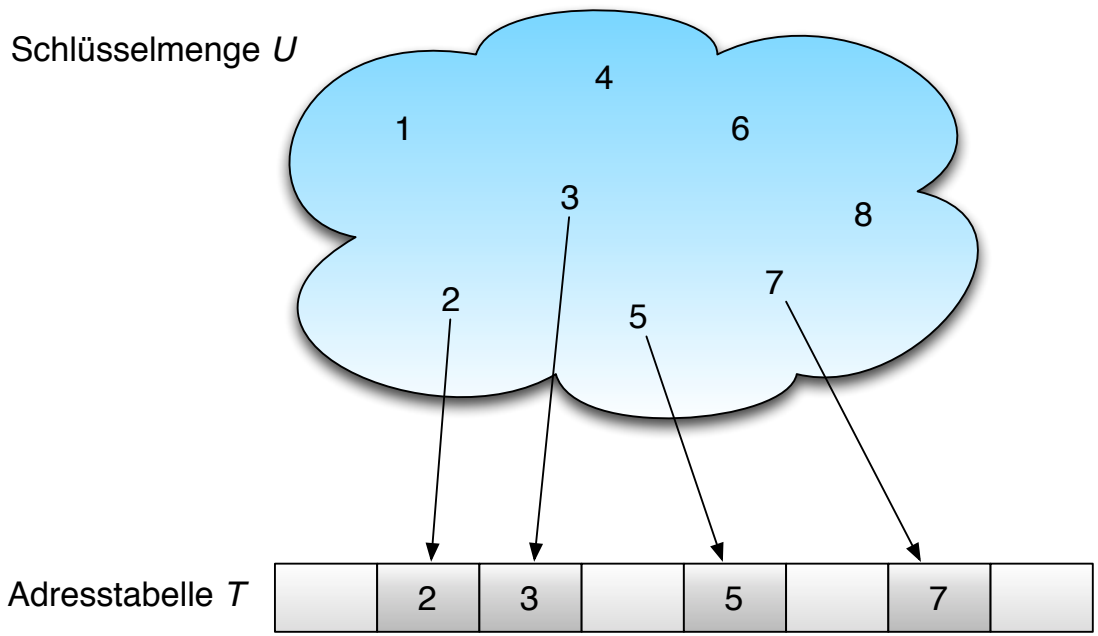
Adresstabellen

Sei M Wörterbuch.

- Setze $U := \{key(e) : \ e \in M\}$ als Menge aller Schlüssel
- Annahme: $key(e_1) \neq key(e_2)$ für alle $e_1 \neq e_2$, $e_1, e_2 \in M$

Wörterbuch mit Adresstabelle:

- sequentielle Liste T der Länge $|U|$



Operationen auf Adresstabellen

Adresstabelle T mit Länge $|U|$.

- **Input:** Tabelle T, Schlüssel k
  Output: Element mit Schlüssel k
  search(T, k):
  return $T[k]$;

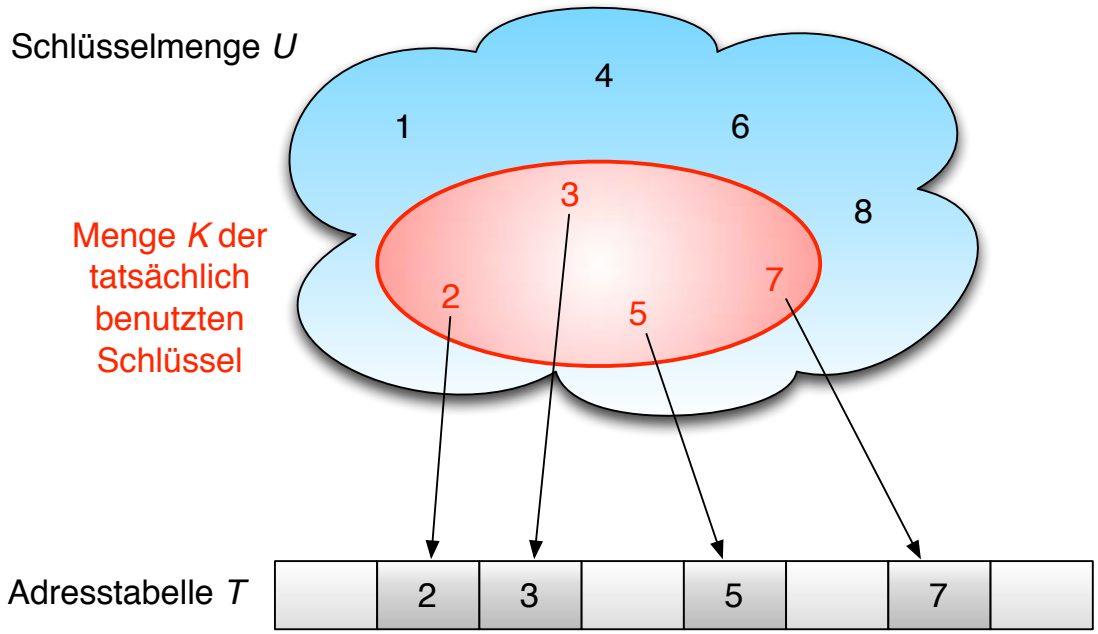
- **Input:** Tabelle T, Element e
  insert(T, e):
  $T[key(e)] = e$;

- **Input:** Tabelle T, Schlüssel k
  erase(T, k):
  $T[k] = \text{null}$;

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$
Speicherkomplexität: $O(|U|)$ $\rightarrow$ Problem falls U groß!

Reduktion von Adresstabellen mittels Hashfunktion

- Beobachtung: Menge K der tatsächlich benutzten Schlüssel aus U oft klein

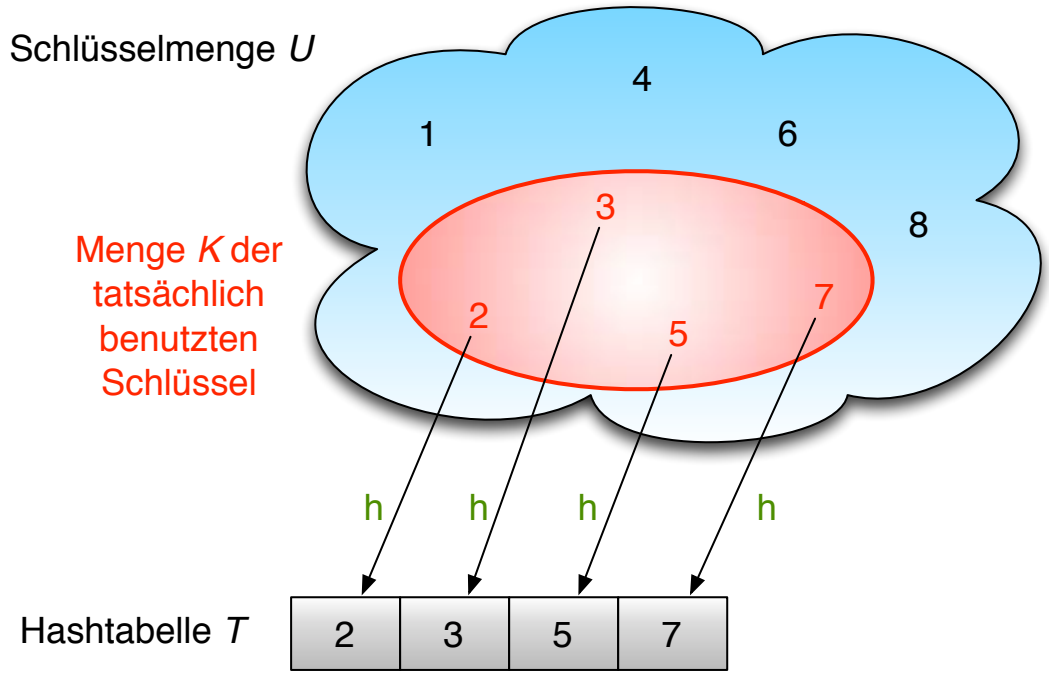


- Idee: wende Hashfunktion h auf $key(e)$ an, um Adresstabelle auf $|K|$ Elemente zu reduzieren $\rightarrow$ Hashtabelle

Hashtabellen

Wörterbuch mit Hashtabelle:

- sequentielle Liste T mit Länge $m := |K|$
- Hashfunktion $h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$



Operationen auf Hashtabellen

Hashtabelle T mit Länge m und Hashfunktion h.

- **Input:** Tabelle T, Schlüssel k
  Output: Element mit Schlüssel k
  search(T, k):
  return $T[h(k)]$;

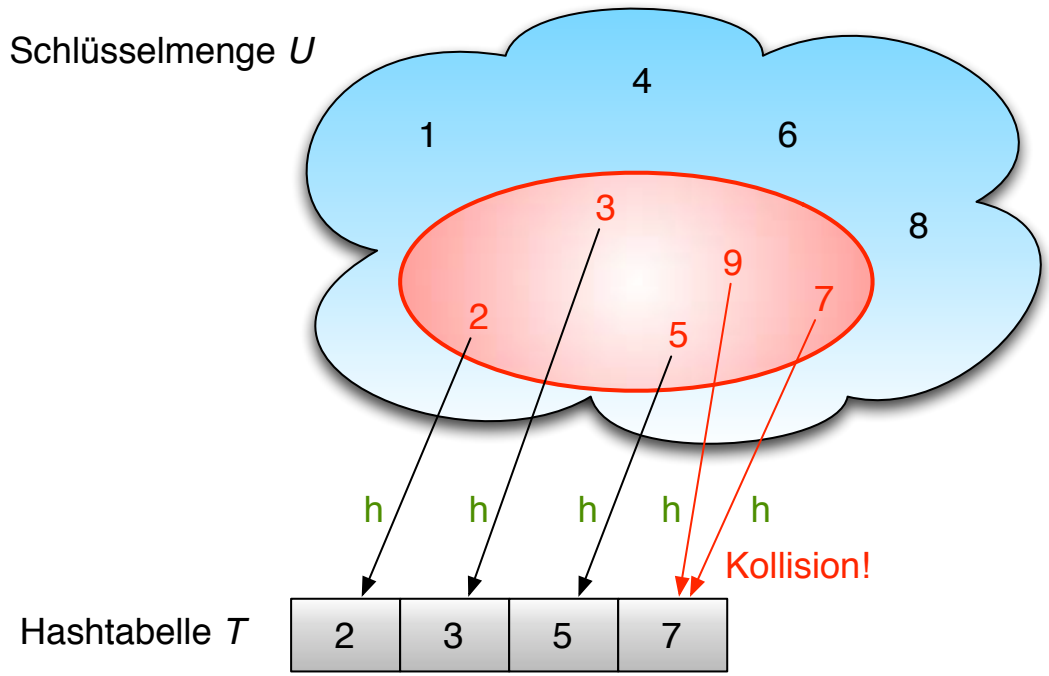
- **Input:** Tabelle T, Element e
  insert(T, e):
  $T[h(key(e))] = e$;

- **Input:** Tabelle T, Schlüssel k
  erase(T, k):
  $T[h(k)] = \text{null}$;

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$ (sofern h auch $O(1)$)
Speicherkomplexität: $O(m)$

Kollisionen bei Hashtabellen

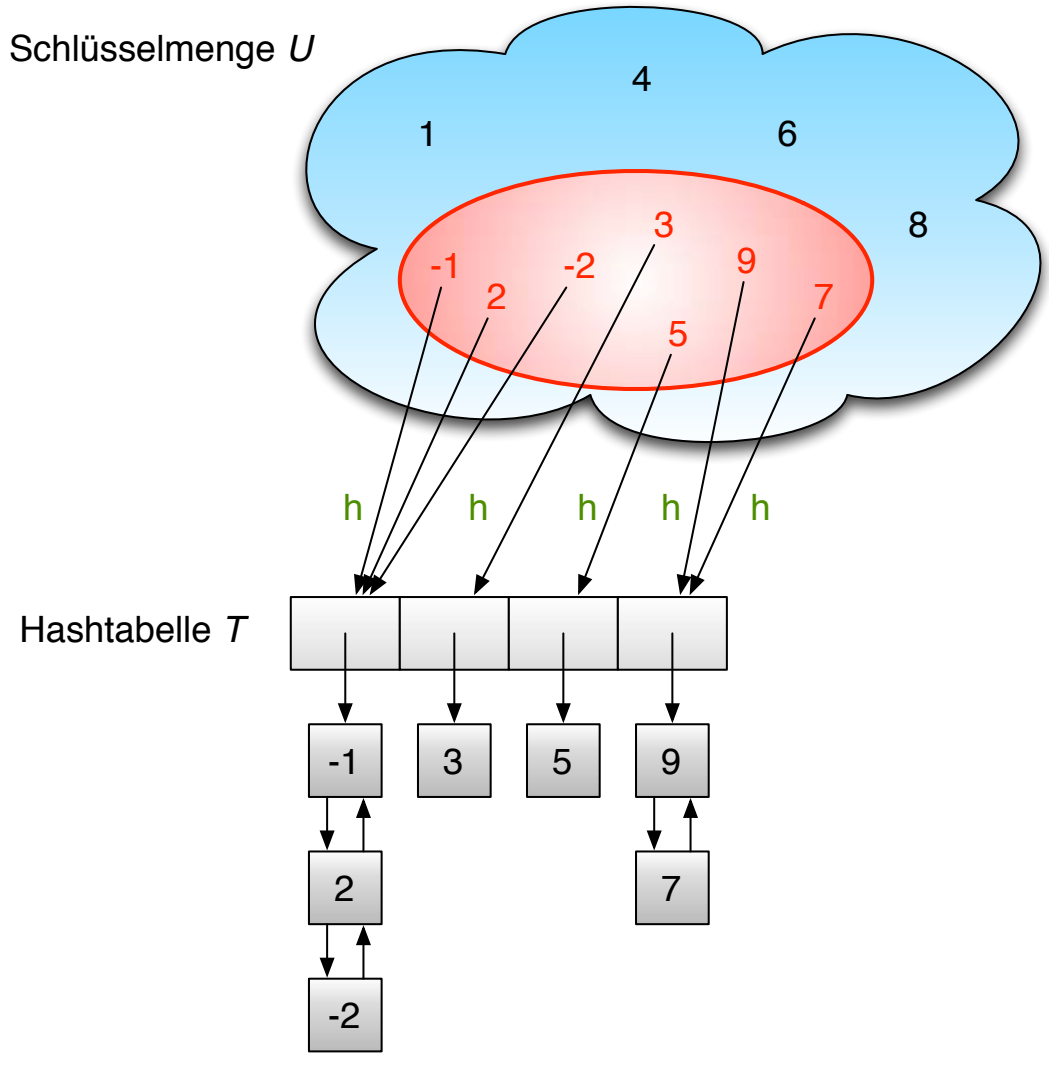
- Problem: falls h nicht injektiv $\rightarrow$ Kollision!
  - h ist nie injektiv da $|K| < |U|$



- Offene Fragen:
  - Strategie zur Kollisionsauflösung
  - Wahl von h

Verkettung zur Kollisionsauflösung

- jeder Slot in T enthält anstelle des Elements, die Referenz auf verkettete Liste
- bei Kollision: füge Element am Anfang der Liste ein $\rightarrow$ O(1)
- search und erase müssen nun die Liste durchlaufen $\rightarrow$ O(1) gefährdet!



Analyse von Hashing mit Verkettung

Sei T Hashtabelle mit m Slots und n gespeicherten Elementen.

- Belegungsfaktor $\alpha = n/m$
  - mittlere Anzahl von Elementen in verketteten Listen
- es kann gezeigt werden:
  Anzahl der Listendurchläufe ist $O(1+\alpha)$
- Annahme: es ist $n = cm$ mit c Konstante, dann
  $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$
- Komplexität von search und erase:
  - im Mittel: $O(1)$
  - worst case: $O(n)$

Hashfunktionen

Sei U Menge aller Schlüssel, T Hashtabelle mit m Einträgen.

$$h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$$

- Anforderungen an Hashfunktion:
  - einfache Auswertung $O(1)$
  - möglichst wenige Kollisionen
- viele Ansätze, zum Beispiel:
  - Divisionsmethode
  - Multiplikationsmethode
  - universelles Hashing
- Vereinbarung: $U = \mathbb{N}_0$ zur Vereinfachung
  - Strings z.B. via ASCII Code auf Zahlen abbilden

Divisionsmethode

Divisionsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die Divisionsmethode wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \to \{0, \ldots, m-1\}, \quad h(k) = k \bmod m.$$

- Beispiel: $m = 12$, $k = 100$, dann ist $h(k) = 4$.
- Problem: geschickte Wahl von m
  - eher schlecht ist $m = 2^p$ (wertet nur die unteresten p Bits von k aus)
  - eher gut ist oft eine Primzahl, nicht nahe an Zweierpotenz
    - Beispiel: erwartete Anzahl von Einträgen in Hashtabelle: 2000, gewünschter Belegungsfaktor 3 $\to$ $m = 701$ geeignete Primzahl

Multiplikationsmethode

Multiplikationsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die Multiplikationsmethode wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \to \{0, \ldots, m-1\}, \quad h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor,$$

wobei $A \in (0, 1)$ Konstante.

- Vorschlag von Knuth: $A \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$
- typische Wahl: $m = 2^p$
- Beispiel: $m = 2^{14} = 16384$, $A = 2654435769/2^{32}$, und $k = 123456$, dann ist $h(k) = 67$.

Universelles Hashing

- Problem: für jede feste Hashfunktion gibt es Eingabesequenzen, die worst-case Laufzeit O(n) verursachen
- Lösung:

Universelles Hashing

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Sei $\mathcal{H}$ eine endliche Menge von Hashfunktionen:

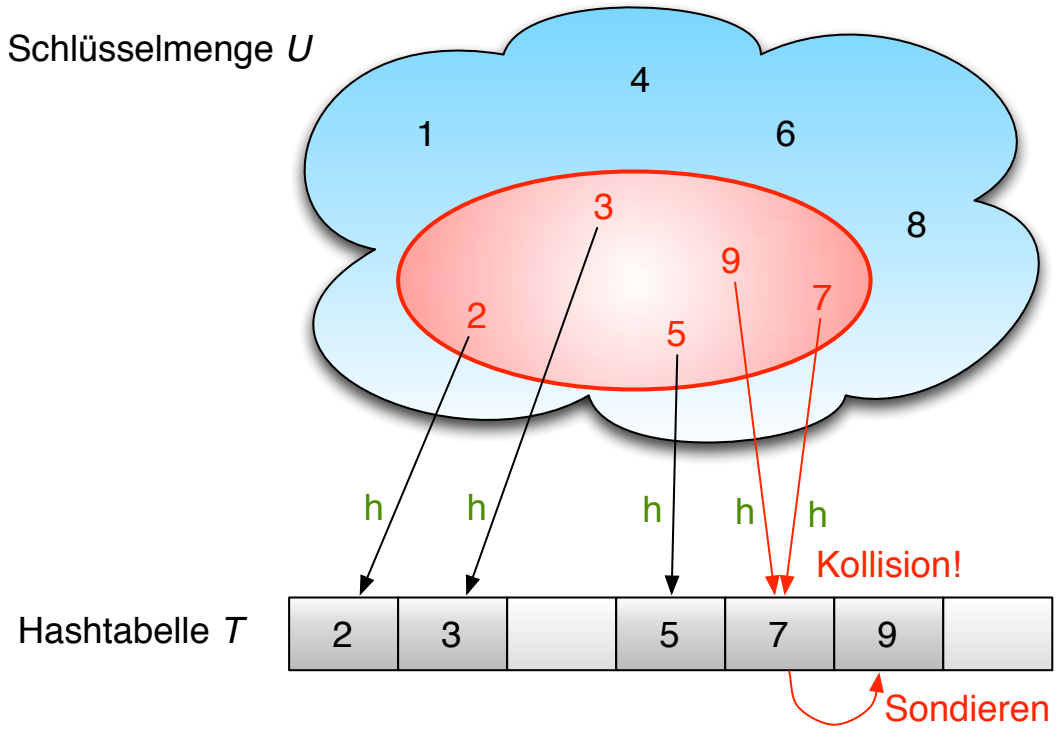
$$\mathcal{H} = \big\{h : U \to \{0, \ldots, m-1\} \mid h \text{ Hashfunktion}\big\}.$$

$\mathcal{H}$ heißt universell, falls für jedes Schlüsselpaar $k, l \in U$, $k \neq l$, die Anzahl der Hashfunktionen h mit $h(k) = h(l)$ durch $|\mathcal{H}|/m$ nach oben beschränkt ist.

- Idee: wähle zufällig ein $h \in \mathcal{H}$
- Resultat: Hashing mit Verkettung liefert im Mittel O(1) Laufzeit der Wörterbuch-Operationen

Kollisionsauflösung mit offener Adressierung

- Idee: statt Verkettung bei Kollision, suche systematisch nächsten freien Platz in Hashtabelle $\rightarrow$ Sondieren



- Probleme:
  - Löschen von Elementen (erase) sehr problematisch
  - Falls Hashtabelle T voll, kein insert mehr möglich

Offene Adressierung

Sei U Schlüsselmenge, T Hashtabelle mit m Einträgen.

- erweitere Hashfunktion zu

$$h : U \times \{0, \ldots, m-1\} \to \{0, \ldots, m-1\}$$

- fordere, daß Sondierungssequenz

$$\big(h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1)\big)$$

eine Permutation von $(0, \ldots, m-1)$ ist

$\to$ jeder Slot in T ist mögliches Ziel für Schlüssel k

- viele mögliche Sondierungssequenzen, zum Beispiel:
  - lineares Sondieren
  - quadratisches Sondieren
  - doppeltes Hashing

Hashing: Ausblick

- nachträgliche Änderung der Tabellengröße aufwendig
  - erfordert neue Tabelle und neue Hashfunktion
  - Übertragen aller Elemente (und Berechnung neuer Hashfunktion) nötig

- ist U statisch, so ist perfektes Hashing möglich
  - auch im worst-case sind alle Operationen O(1)
  - umgesetzt durch zwei Ebenen von universellem Hashing
  - Zeitgewinn erkauft durch zusätzlichen Speicherbedarf von O(n)

Programm heute

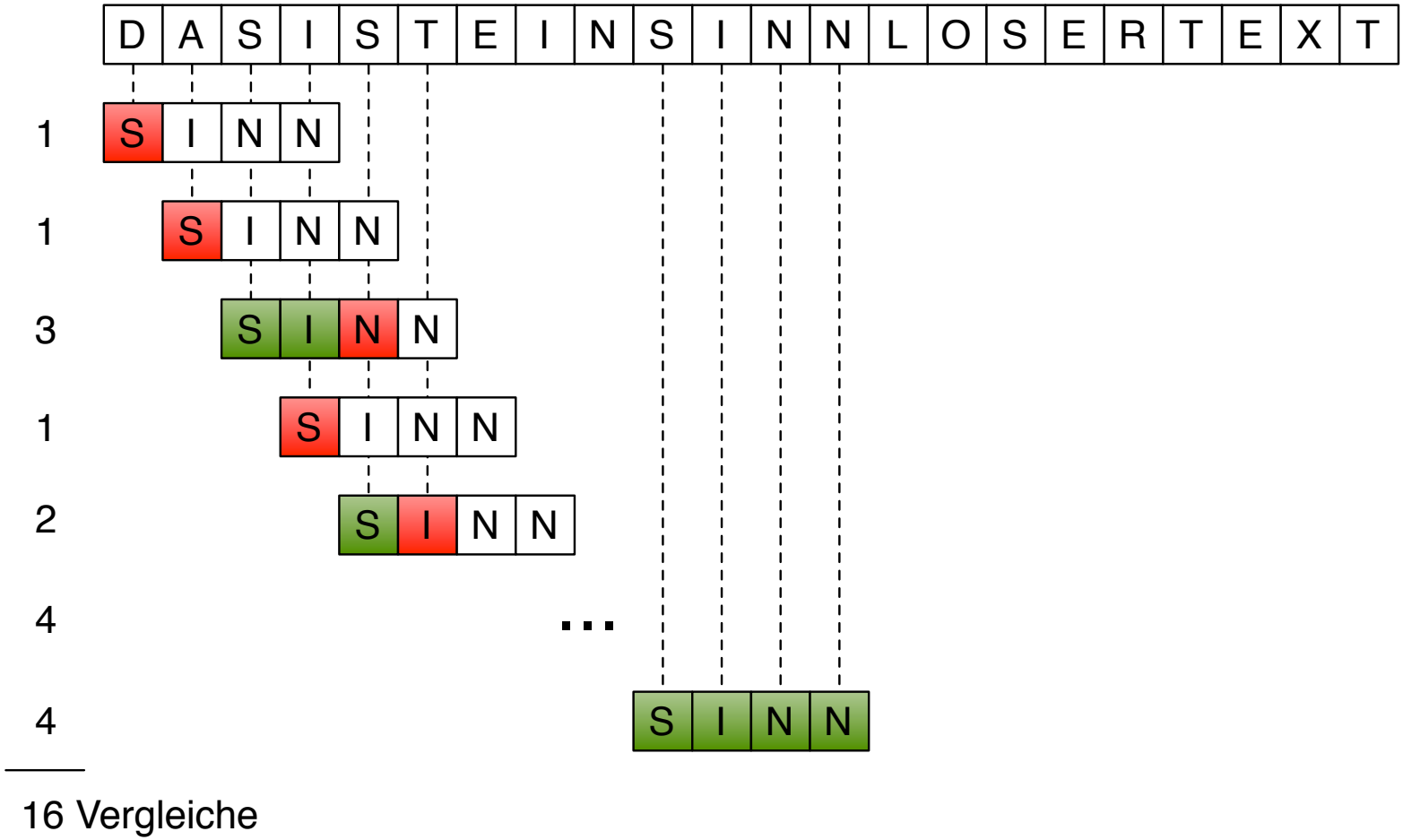
7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen
   - Lineare Suche
   - Binäre Suche
   - Binäre Suchbäume
   - Balancierte Suchbäume
   - Suchen mit Hashtabellen
   - Suchen in Zeichenketten

Suchen in Zeichenketten

- Problem: finde Teilwort in (langem) anderen Wort
- auch genannt: String-Matching
- Beispiele:
  - Suche Text in Textverarbeitung / Web-Browser
  - Suche Text in Dateien auf Festplatte (z.B. Spotlight, Windows Search)
  - Suche Text im Internet (z.B. Google)
- Maß der Effizienz: Anzahl der Vergleiche zwischen Buchstaben der Worte

Brute-Force Suche



Notationen

- Zu durchsuchender Text:
  - $text[0..n-1]$
  - Länge n
- gesuchtes Muster = Pattern:
  - $pat[0..m-1]$
  - Länge m

- Problem: finde Position i, so daß $pat == text[i..i+m-1]$

Brute-Force Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge n,
gesuchtes Muster *pat* Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
bruteForceSearch(*text*, *pat*):

```
for i = 0 to n − m {
    j = 0;
    while ( (j < m) && (pat[j] == text[i + j]) )
        j = j + 1;
    if (j ≥ m) return i; // fündig geworden
}
return -1; // nichts gefunden
```

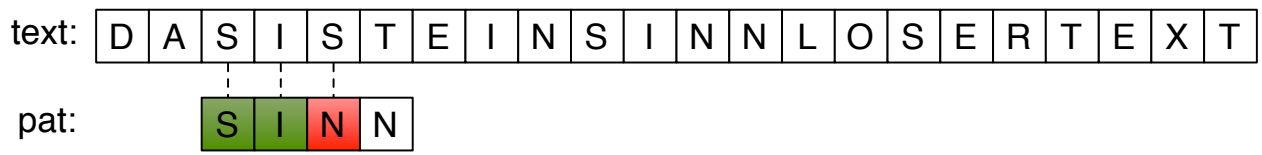
- Komplexität: $O((n-m)m) = O(nm)$

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus (kurz: KMP)

- Idee: verbessere Brute-Force Algorithmus durch Ausnutzung der bereits gelesenen Information bei einem Mismatch
- Mismatch an Stelle j von *pat* impliziert

$$pat[0..j-1] == text[i..i+j-1]$$



- Vorverarbeitungsschritt: analysiere vor Suche das Muster *pat*, speichere mögliche Überspringungen in Feld *shift*

Alphabet und Wörter

Wörter

Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Symbolen. Ein Wort w der Länge n über Σ ist eine endliche Folge von Symbolen

$$w = w_1 \cdots w_n, \quad w_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n.$$

Beispiel:

- Alphabet $\Sigma = \{$ `a,...,z, A,...,Z` $\}$
  - Wörter: `Daten`, `Algorithmen`, `aabb`
  - keine Wörter: `über`, `t35t`
- Alphabet $\Sigma = \{$ `0,...,9,A,B,C,D,E,F` $\}$
  - Wörter: `09FF`, `ABC`, `A3E`
  - keine Wörter: `1f`, `1gH`

Das leere Wort wird mit ε bezeichnet.

Präfix und Suffix von einem Wort

Präfix, Suffix

Sei $w = w_1 \cdots w_n$ Wort der Länge n über einem Alphabet Σ.

- Das Wort w' heißt Präfix von w, falls $w' = w_1 \cdots w_l$ für $0 \leq l \leq n$.
- Das Wort w' heißt Suffix von w, falls $w' = w_l \cdots w_n$ für $1 \leq l \leq n + 1$.

Beispiele für Wort $w =$ `Algorithmen`:

- Präfixe von w sind: `A`, `Alg`, `Algorit`, `Algorithmen`
- Suffixe von w sind: `n`, `men`, `gorithmen`, `Algorithmen`

Rand von einem Wort

Rand

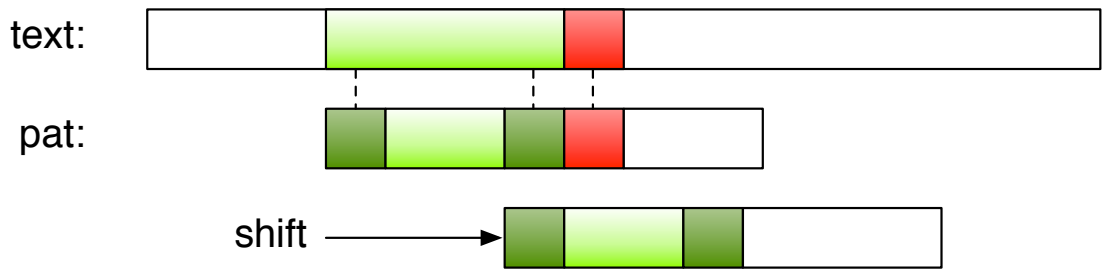
Sei w ein Wort über einem Alphabet Σ. Ein Wort r heißt Rand von w, falls r sowohl Präfix als auch Suffix von w ist.

Ein Rand r von w heißt eigentlicher Rand, wenn $r \neq w$ und wenn es außer w selbst keinen längeren Rand gibt. Der eigentliche Rand von w wird mit $\partial(w)$ bezeichnet.

Beispiel: Wort $w =$ `aabaabaa` hat folgende Ränder:

- ε
- `a`
- `aa`
- `aabaa` $\leftarrow$ eigentlicher Rand
- `aabaabaa` $= w$

Überspringen beim Suchen



- Idee: verschiebe Pattern so, dass im bereits geprüften Bereich wieder Übereinstimmung herrscht
  - dazu müssen Präfix und Suffix dieses Bereichs übereinstimmen
    $\rightarrow$ eigentlicher Rand

Shift-Tabelle

Shift-Tabelle

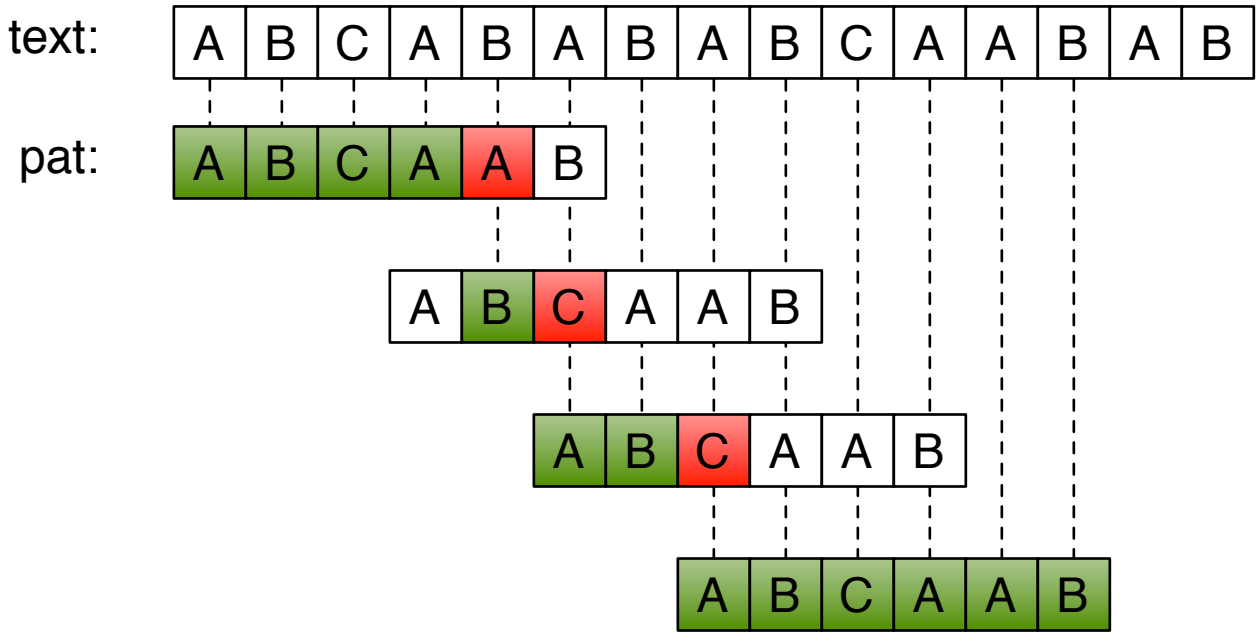
Sei $pat = s_0 \cdots s_{m-1}$ ein Wort der Länge m. Die Shift-Tabelle von pat gibt die Länge des eigentlichen Randes des Präfixes der Länge j von pat an. Sie hat folgende Gestalt:

$$shift[j] = \begin{cases} -1 & \text{für } j = 0 \\ \left|\partial(s_0 \cdots s_{j-1})\right| & \text{für } j \geq 1 \end{cases}$$

wobei $j = 0, \ldots, m-1$.

- Ist das Präfix der Länge j gematcht, und an Stelle j ein Mismatch, so ist der Shift $j - shift[j] > 0$ korrekt

KMP Algorithmus: Beispiel I



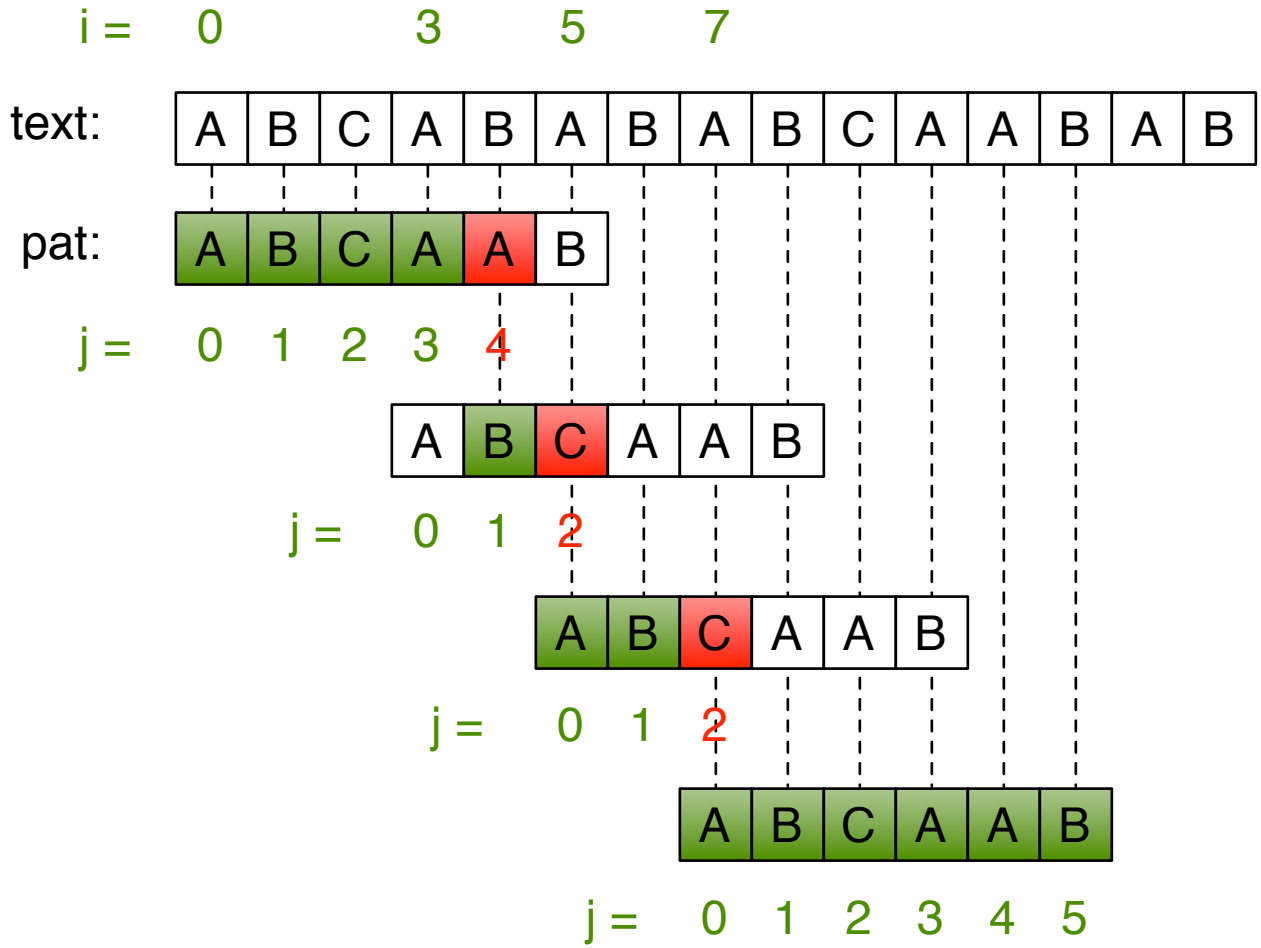
j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

KMP Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* der Länge n,
gesuchtes Muster *pat* der Länge m
Output: Index i von Match (oder -1 falls nicht gefunden)
KMPSearch(*text*, *pat*):

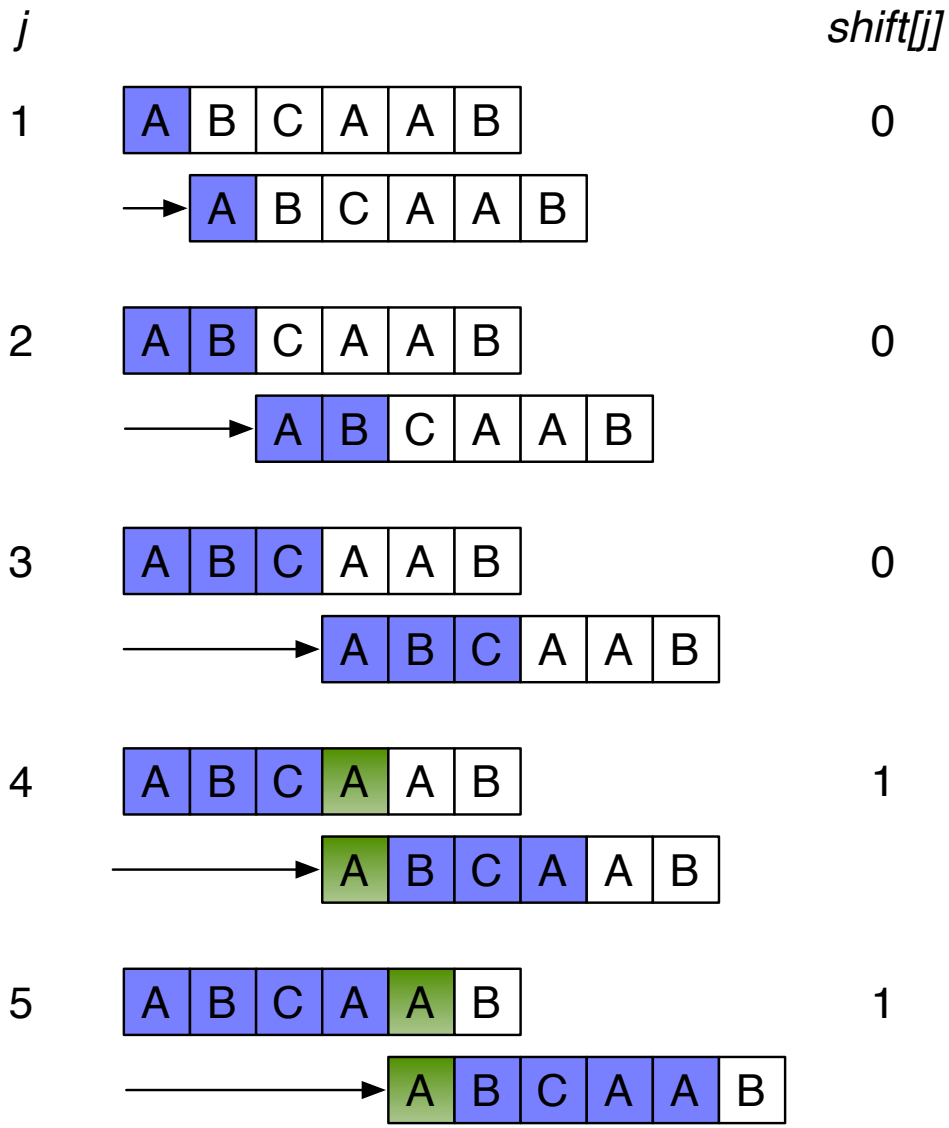
```
initShift(pat); // Initialisierung shift Tabelle, siehe später
i = 0; j = 0;
while (i ≤ n − m) {
    while (text[i + j] == pat[j]) {
        j = j + 1;
        if (j == m)
            return i; // fündig geworden
    }
    i = i + (j − shift[j]); // j − shift[j] ist immer > 0
    j = max(0, shift[j]);
}
return -1; // war wohl nix
```

KMP Algorithmus: Beispiel II



j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

Shift Tabelle Beispiel I



KMP Algorithmus: Shift Tabelle

Input: Muster pat der Länge m
initShift(pat):
    $shift[0] = -1;$
    $shift[1] = 0;$
    $i = 0;$
    for $j = 2$ **to** m {
        // hier ist: $i == shift[j-1]$
        while ($i \geq 0$ && $pat[i] \neq pat[j-1]$)
            $i = shift[i];$
        $i = i + 1;$
        $shift[j] = i;$
    }

KMP Algorithmus: Komplexität

Komplexität von KMP:

- KMPSearch:
  - erfolglose Vergleiche (äußere while-Schleife): maximal $n - m + 1$ Vergleiche
  - erfolgreiche Vergleiche (innere while-Schleife): ingesamt maximal n Vergleiche
  - insgesamt: maximal $2n - m + 1$ Vergleiche
- initShift:
  - erfolgreiche Vergleiche (for-Schleife): maximal $m - 1$ Vergleiche
  - erfolglose Vergleiche (while-Schleife): maximal m Vergleiche
  - insgesamt: maximal $2m - 1$ Vergleiche
- insgesamt: maximal $2n + m$ Vergleiche, also $O(n + m)$
- Platzbedarf: $O(m)$

Ausblick: Suchen in Zeichenketten

- Brute-Force Algorithmus
  - Komplexität: $O(mn)$
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
  - Komplexität: $O(m + n)$
- Rabin-Karp Algorithmus: Suchen mit Hash-Funktion
  - Komplexität im Mittel: $O(m + n)$
  - Komplexität worst-case: $O(mn)$
- Boyer-Moore Algorithmus: Suchen rückwärts
  - Komplexität: $O(n)$
  - Komplexität best-case: $O(n/m)$
- Reguläre Ausdrücke mit endlichen Automaten
- Suche nach ähnlichen Zeichenketten

Zusammenfassung

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen
   - Lineare Suche
   - Binäre Suche
   - Binäre Suchbäume
   - Balancierte Suchbäume
   - Suchen mit Hashtabellen
   - Suchen in Zeichenketten