

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

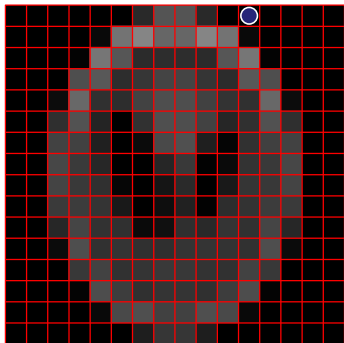
8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

Bild-Repräsentation mit Pixeln



- Bild als **zwei-dimensionales Feld**
- einzelnes Element: **Pixel** (*picture element*)
- hier: jedem Pixel wird ein **Grauwert** zugewiesen
 - z.B. von 0 bis 255

Segmentierung von Bildern

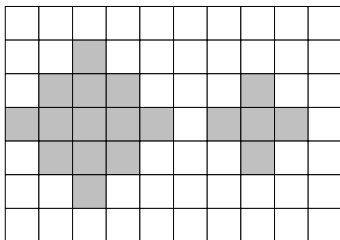
- **Segmentierung:** Zusammenfassung von inhaltlich zusammenhängenden Regionen gemäß eines Kriteriums



- Beispiel: Segmentierung von Knochen oder Organen

Binäre Bilder

- **Binäres Bild:** jedes Pixel hat entweder Wert 0 oder 1



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

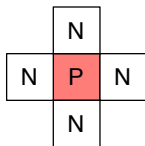
- Segmentierungs-Problem: identifiziere die beiden "Sterne"
→ Algorithmus?

Problem: Segmentierung von "Sternen"

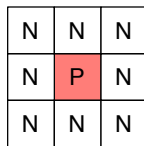
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- **Gegeben:** binäres Bild mit 0,1 Werten
- **Gesucht:** Regionen im Bild mit Wert 1
- **Ansatz:**
 - fange an bei beliebigem Pixel mit Wert 1
 - wiederhole: inspiere unbesuchte Nachbar-Pixel auf Wert 1
 - beende, falls kein weiterer Nachbar mit Wert 1 existiert

Nachbarschaft von Pixeln



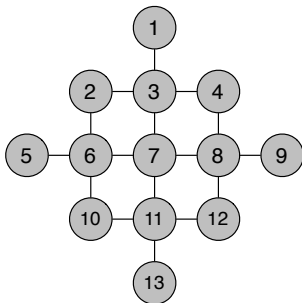
4-Nachbarschaft



8-Nachbarschaft

- **4-Nachbarschaft** von Pixel P: alle direkten Nachbar-Pixel, die Kante mit P gemeinsam haben
 - auch genannt: Von-Neumann-Nachbarschaft
- **8-Nachbarschaft** von Pixel P: alle direkten Nachbar-Pixel, die Kante oder Ecke mit P gemeinsam haben
 - auch genannt: Moore-Nachbarschaft

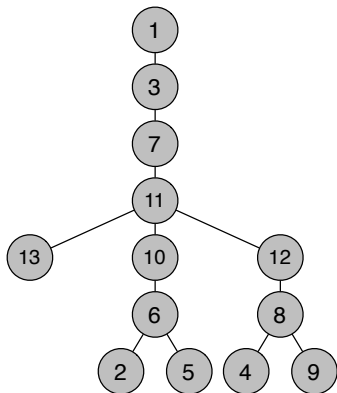
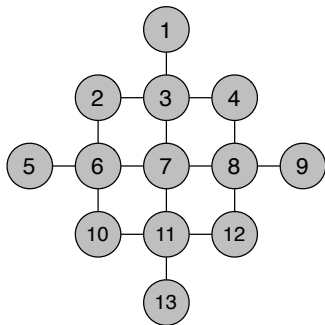
“Stern” als Graph



Segmentierungs-Ansatz von linkem “Stern”:

- 1 starte mit Pixel 1
- 2 besuche Nachbarn (Schema: oben, unten, links, rechts)

Segmentierungs-Durchlauf als Baum



Ansatz auch genannt: **Tiefensuche** bzw. **Depth-First Search (DFS)**

Tiefensuche (DFS)

Sei $G = (V, E)$ Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste **adj**
- jeder Knoten hat Farb-Markierung **farbe**:
 - **weiss** = noch nicht besucht
 - **grau** = besucht, gerade in Bearbeitung
 - **schwarz** = besucht, fertig bearbeitet
- jeder Knoten hat Vorgänger in Besuch-Reihenfolge **pred**
- (optional) zusätzliche Knoten-Markierungen **d** und **f**
 - Zeitmarke, wann Knoten **entdeckt**: **d** (discovered)
 - Zeitmarke, wann Knoten **fertig bearbeitet**: **f** (finalized)

Algorithmus DFS

Input: Graph $G = (V, E)$

Output: Vorgänger-Liste `pred`,
Markierungen `d`, `f`

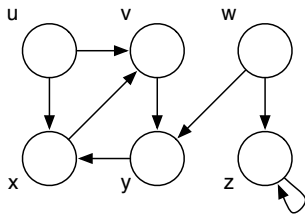
DFS(G):

```
for each (Knoten  $v \in V$ ) {
    farbe[v] = weiss;
    pred[v] = null;
}
zeit = 0;
for each (Knoten  $v \in V$ ) {
    if (farbe[v] == weiss)
        DFSvisit(v);
}
```

DFSvisit(v):

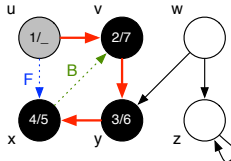
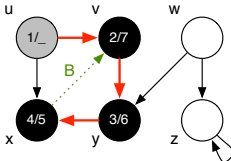
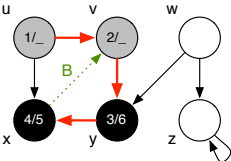
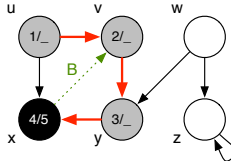
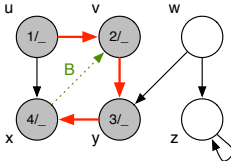
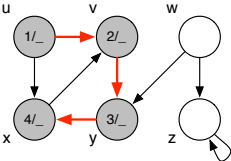
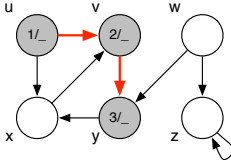
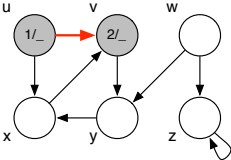
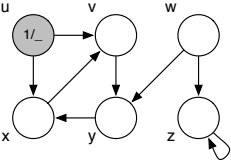
```
farbe[v] = grau; // v war weiss
zeit = zeit + 1;
d[v] = zeit;
for each (Knoten  $u \in \text{adj}[v]$ ) {
    if (farbe[u] == weiss) {
        pred[u] = v;
        DFSvisit(u);
    }
}
farbe[v] = schwarz; // v ist fertig
zeit = zeit + 1;
f[v] = zeit;
```

DFS: Beispiel-Ablauf 1

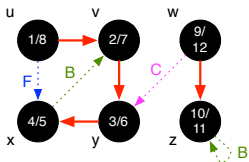
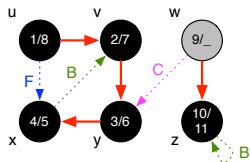
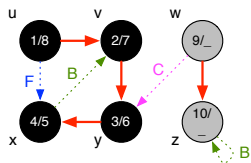
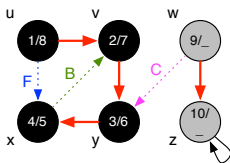
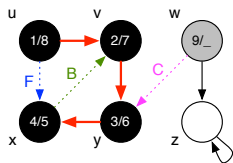
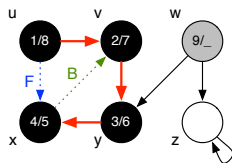
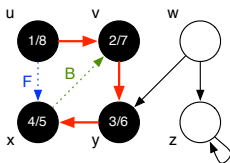
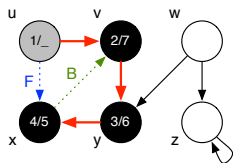


- Knoten u, v, w, x, y, z
- farbe direkt im Knoten markiert
- d/f im Knoten notiert
- pred markiert durch rote Kanten

DFS: Beispiel-Ablauf 2



DFS: Beispiel-Ablauf 3



Spannwald mit DFS

Sei $G = (V, E)$ Graph.

- **Spannbaum:** Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
 - existiert nur für zusammenhängende Graphen
- **Spannwald:** Teilgraph $G' = (V, E')$, dessen Zusammenhangskomponenten jeweils Spann bäume der Zusammenhangskomponenten von G sind
- DFS erzeugt Spannwald
 - Knoten sind V , Kanten E' ergeben sich aus **pred**
 - im Beispiel-Ablauf: Knoten V sind schwarz, Kanten E' sind **rot**
- DFS erlaubt Markierung spezieller Kanten:
 - Rückkanten im Spannwald (markiert mit **B**)
 - Vorwärtskanten im Spannwald (markiert mit **F**)
 - Cross-Kanten im Spannwald (markiert mit **C**)

Komplexität von DFS

- **DFS** erste Schleife wird $|V|$ mal durchlaufen: $\Theta(|V|)$
- **DFSvisit** wird für jeden Knoten **genau** einmal aufgerufen (zweite Schleife in **DFS**, rekursiver Aufruf in **DFSvisit**)
- innere Schleife in **DFSvisit** wird $|\text{adj}(v)|$ mal aufgerufen

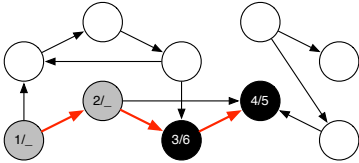
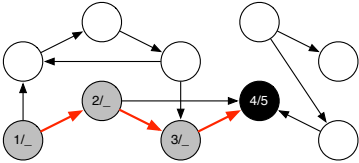
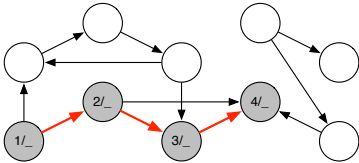
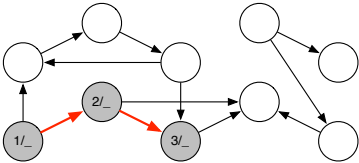
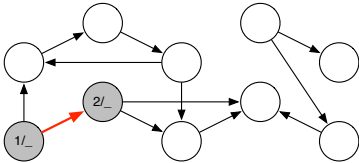
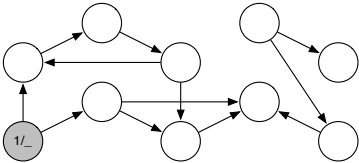
$$\sum_{v \in V} |\text{adj}(v)| = \Theta(|E|)$$

- Gesamtlaufzeit: $\Theta(|V| + |E|)$
- Implementierung gleicher Komplexität auch nicht-rekursiv möglich (mit Stack)

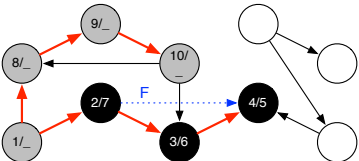
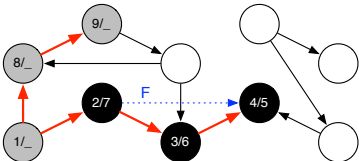
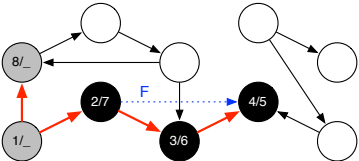
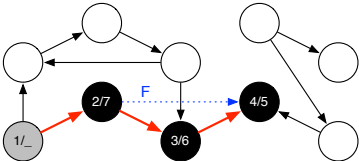
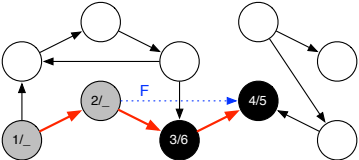
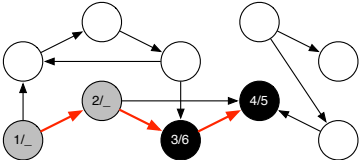
Anwendungen von DFS

- Test auf **Zusammenhang** von Graphen
 - rufe **DFSvisit** nur für einen Knoten auf (statt für alle)
 - falls nicht alle Knoten dadurch besucht: nicht zusammenhängend!
- Test auf **Zyklensfreiheit** in Graphen
 - Zyklus entdeckt falls Rückkante **B** gefunden
 - Rückkante **B**: in **DFSvisit** Schleife ist Zielknoten bereits grau

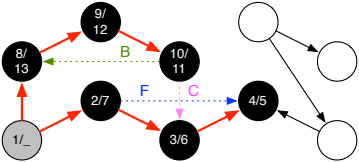
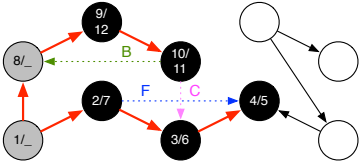
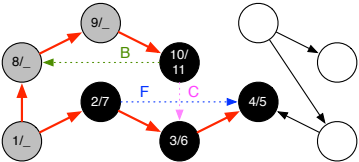
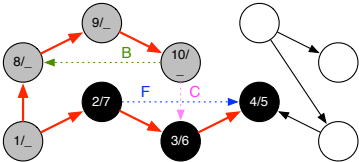
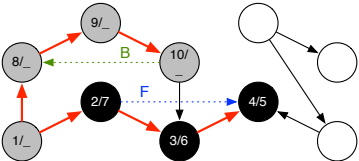
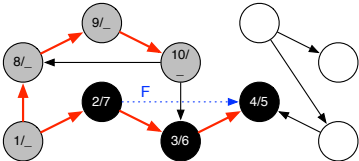
Beispiel DFS 1



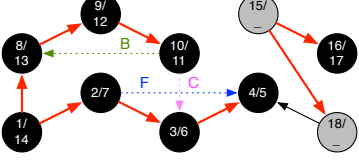
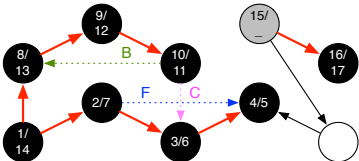
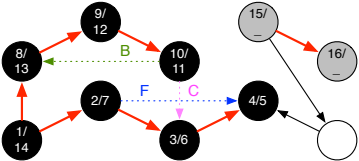
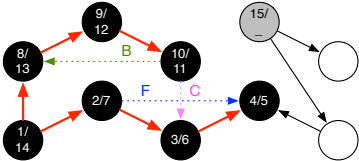
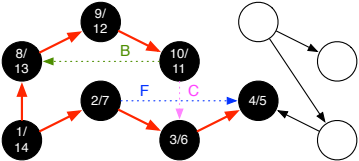
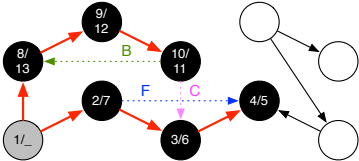
Beispiel DFS 2



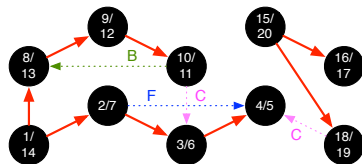
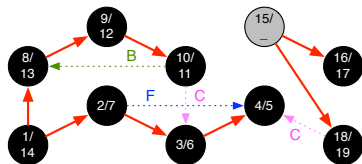
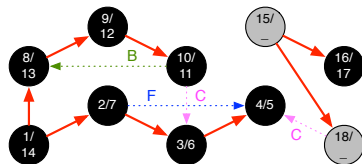
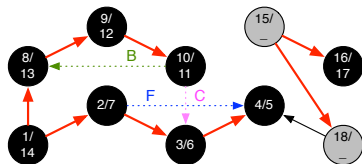
Beispiel DFS 3



Beispiel DFS 4



Beispiel DFS 5



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche

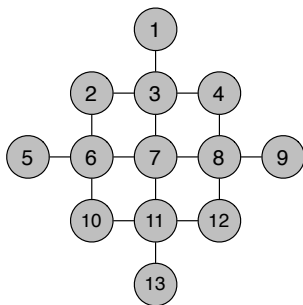
Breitensuche im “Stern”-Beispiel

- Segmentierung von “Sternen”

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

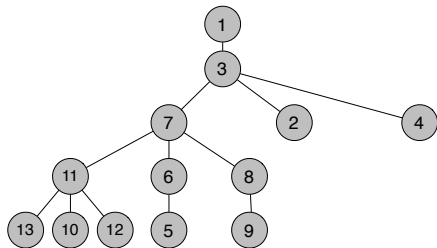
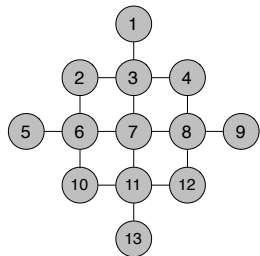
- neuer Ansatz:
 - anstatt direkt nächsten Nachbar ansteuern, erst alle aktuellen Nachbarn abarbeiten
→ Breitensuche

Breitensuche im “Stern”-Beispiel: Ablauf



- 1 starte mit Pixel 1
- 2 besuche alle Nachbarn von aktuellem Pixel (Schema: oben, unten, links, rechts)
- 3 arbeite die Nachbarn der Nachbarn in selber Reihenfolge ab

Breitensuche im "Stern"-Beispiel: als Baum



Ansatz: **Breitensuche** bzw. **Breadth-First Search (BFS)**

Breitensuche (BFS)

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Startknoten $s \in V$
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten hat Farb-Markierung $farbe$:
 - $weiss$ = noch nicht besucht
 - $grau$ = besucht, gerade in Bearbeitung
 - $schwarz$ = besucht, fertig bearbeitet
- jeder Knoten hat Vorgänger in Besuch-Reihenfolge $pred$
- (optional) zusätzliche Knoten-Markierung d
 - Distanz (in Anzahl von Kanten) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Queue Q

Algorithmus BFS

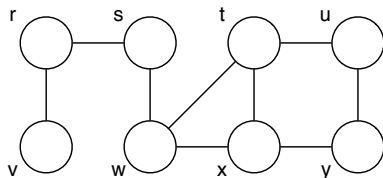
Input: Graph $G = (V, E)$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste `pred`, Markierung `d`

BFS(G, s):

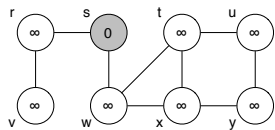
```
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
    farbe[v] = weiss; pred[v] = null; d[v] =  $\infty$ ;
}
farbe[s] = grau; d[s] = 0;
Q = initialize(); Q.enqueue(s);
while ( !Q.isEmpty() ) {
    u = Q.dequeue();
    for each ( $v \in \text{adj}[u]$ ) { // besuche alle Nachbarn
        if (farbe[v] == weiss) {
            farbe[v] = grau; d[v] = d[u] + 1; pred[v] = u;
            Q.enqueue(v);
        }
    }
    farbe[u] = schwarz; // u ist erledigt
}
```

BFS: Beispiel-Ablauf 1

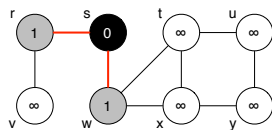


- Knoten r, s, t, u, v, w, x, y
- farbe direkt im Knoten markiert
- d im Knoten notiert
- pred markiert durch rote Kanten
- Startknoten s

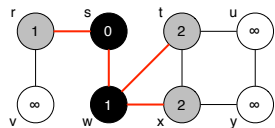
BFS: Beispiel-Ablauf 2



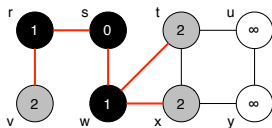
Q: **s**



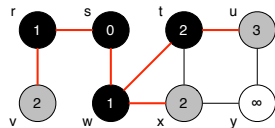
Q: **w r**



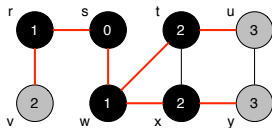
Q: **r t x**



Q: **t x v**

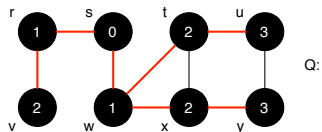
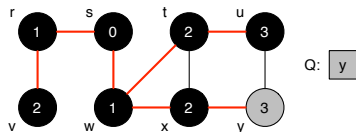
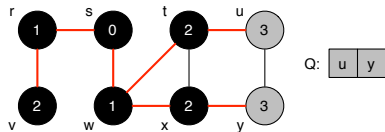
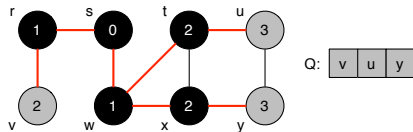


Q: **x v u**



Q: **v u y**

BFS: Beispiel-Ablauf 3



BFS Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Graph.

- BFS erzeugt Spannbaum $G' = (V, E')$
 - Knoten sind V , Kanten E' ergeben sich aus **pred**
 - im Beispiel-Ablauf: Knoten V sind schwarz, Kanten E' sind **rot**
- ausgehend von Startknoten s wird nur Zusammenhangskomponente von Graph durchsucht!
- falls G nicht zusammenhängend, wird **kein** Spannwald berechnet!
- falls Stack statt Queue in BFS: DFS-artiger Algorithmus
 - Unterschied: nur in Zusammenhangskomponente

Komplexität von BFS

- **BFS** erste Schleife (for) wird $|V|$ mal durchlaufen: $\Theta(|V|)$
- zweite geschachtelte Schleife (while und for) wird im schlechtesten Fall je einmal für jeden Knoten in Adjazenzliste aufgerufen

$$\sum_{v \in V} |\text{adj}(v)| = \Theta(|E|)$$

- Gesamtlaufzeit: $\Theta(|V| + |E|)$

Anwendungen von BFS

- Besuche alle Knoten in Zusammenhangskomponente von Graph
 - ausgehend von Startknoten s
- Berechne Länge der kürzesten Pfade (d.h. Anzahl von Kanten)
 - ausgehend von Startknoten s
 - kürzeste Pfade selbst erfordern Modifikation des Algorithmus

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

Tiefensuche

Breitensuche