Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche
   - Kürzeste Pfade
   - Minimaler Spannbaum

Definition Kürzester Pfad

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Gewichtsfunktion

$$w : E \to \mathbb{R}.$$

- das Gewicht eines Pfades $p = (v_1, \ldots, v_k)$, $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, k$, ist die Summe der Gewichte aller seiner Kanten

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

- das Gewicht des kürzesten Pfades zwischen zwei Knoten u und v $(u, v \in V)$ ist

$$w_{min}(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : p \text{ Pfad von } u \text{ nach } v\} & \text{Pfad existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

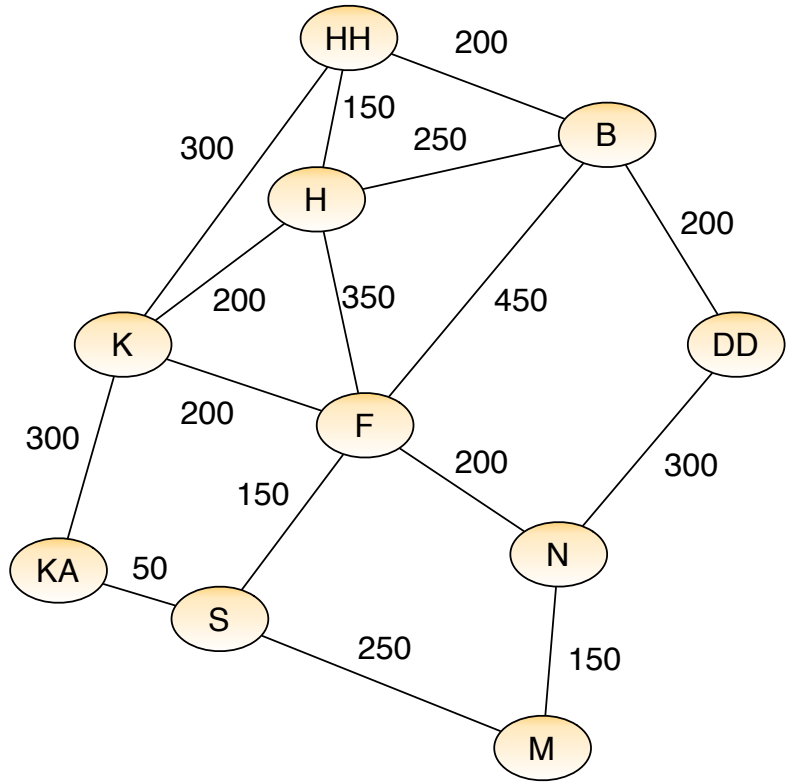
Beispiel: kürzeste Pfade

Navigationssystem:

- Knoten sind Großstädte
- Kanten sind Autobahnverbindung
- Gewichte der Kanten sind (grobe) Entfernungen in Kilometern

Fragestellungen:

- kürzester Weg von M nach HH?
- alle kürzesten Verbindungen von M zu anderen Städten?
- alle kürzesten Verbindungen zwischen allen Städten?

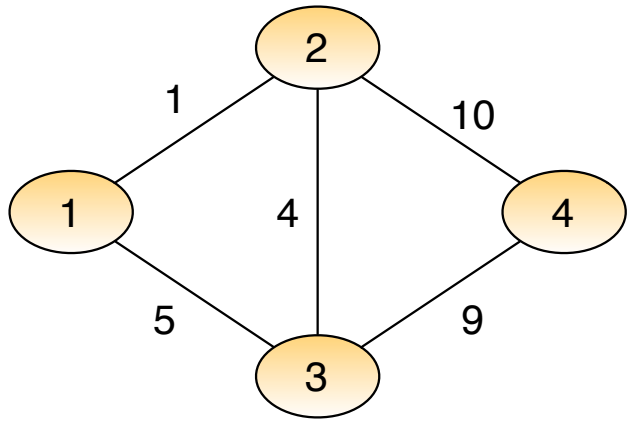


Kürzeste Pfade: Algorithmen

Sei $G = (V, E)$ gewichteter, gerichteter Graph.

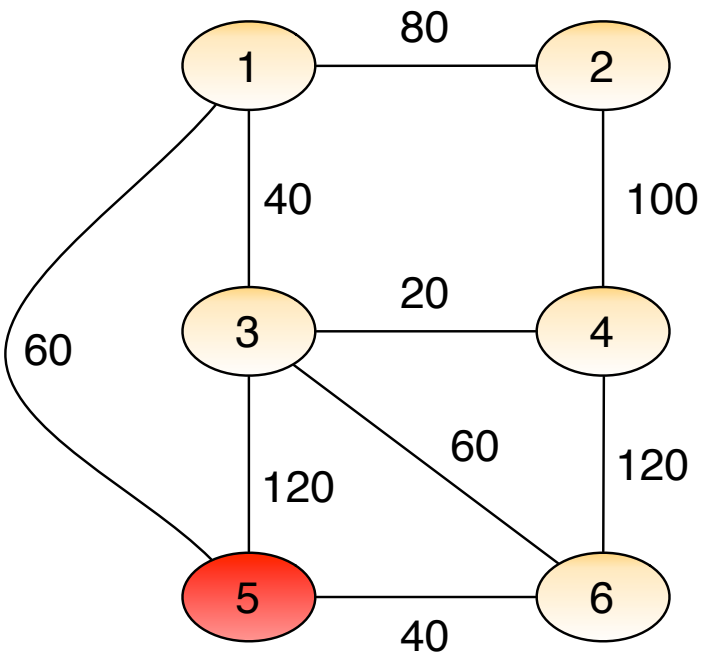
- Kürzeste Pfade in Graphen von fixem Startknoten s:
  - Dijkstra-Algorithmus (nur positive Kantengewichte)
    Greedy-Algorithmus
    Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
  - A*-Algorithmus (nur positive Kantengewichte)
    Komplexität: mit guter Heuristik, besser als Dijkstra
  - Bellman-Ford-Algorithmus (auch negative Gewichte)
    Komplexität: $O(|V| * |E|)$
- Kürzeste Pfade in Graphen zwischen allen Knotenpaaren:
  - Floyd-Warshall-Algorithmus (all pairs shortest path)
    basiert auf dynamischer Programmierung
    Komplexität: $\Theta(|V|^3)$

Gegenbeispiel Greedy-Algorithmus



- Greedy-Schema: füge kürzeste Kante zu Pfad (so dass kein Zyklus entsteht)
  - Starte bei Knoten 1
  - füge Kante (1,2) hinzu (Kosten 1)
  - füge Kante (2,3) hinzu (Kosten 4)
  - füge Kante (3,4) hinzu (Kosten 9)
- Problem: Pfad von 1 nach 4 hat Kosten 14, kürzester Pfad hat aber Kosten 11!

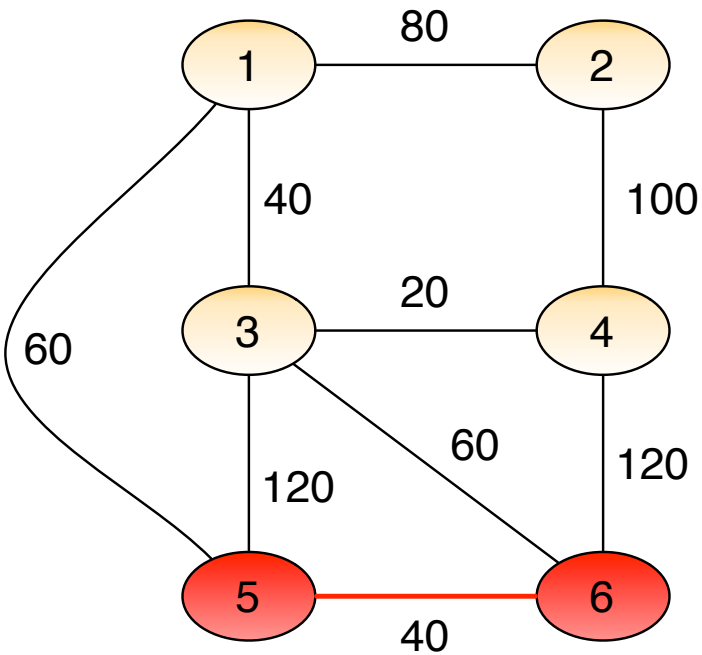
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



Kürzester Pfad	Länge
5	0

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
1	5	60
3	5	120
6	5	40

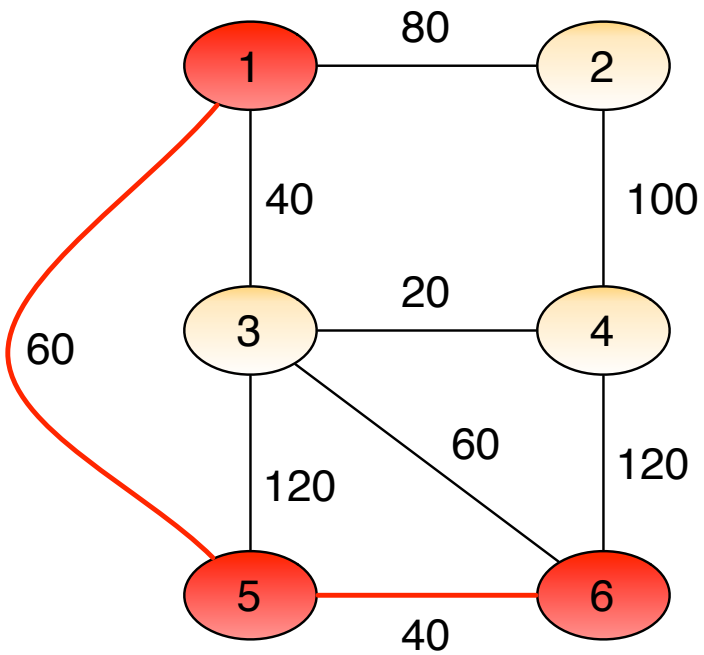
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
1	5	60
3	5,6	100
4	5,6	160

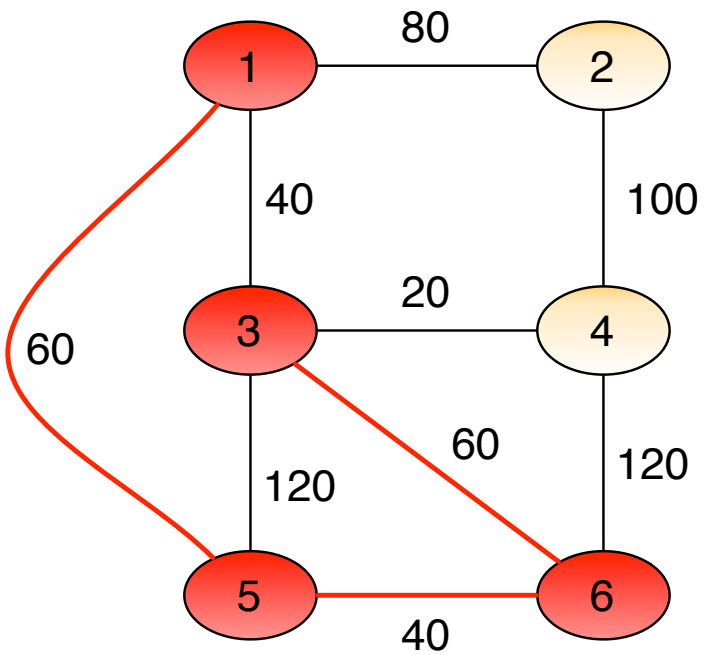
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 3



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
3	5,6	100
4	5,6	160

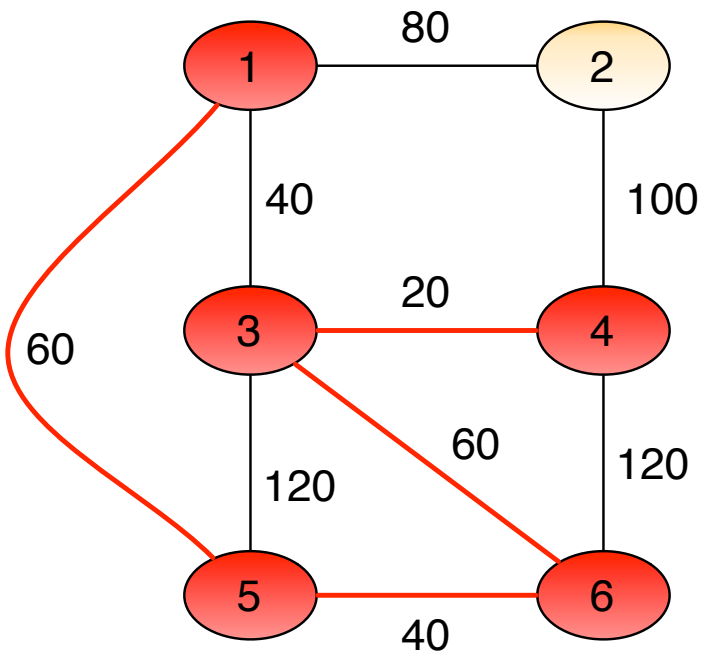
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 4



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140
4	5,6,3	120

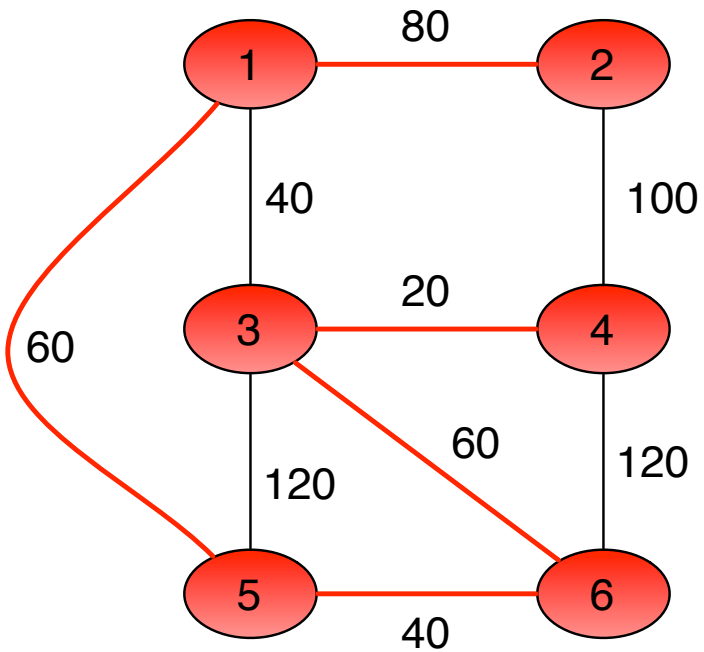
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 5



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100
5,6,3,4	120

Knoten hinzugefügt	Pfad	Pfad Länge
2	5,1	140

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 6



Kürzester Pfad	Länge
5	0
5,6	40
5,1	60
5,6,3	100
5,6,3,4	120
5,1,2	140

fertig

Dijkstra-Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Gewicht $w : E \to \mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahlen).

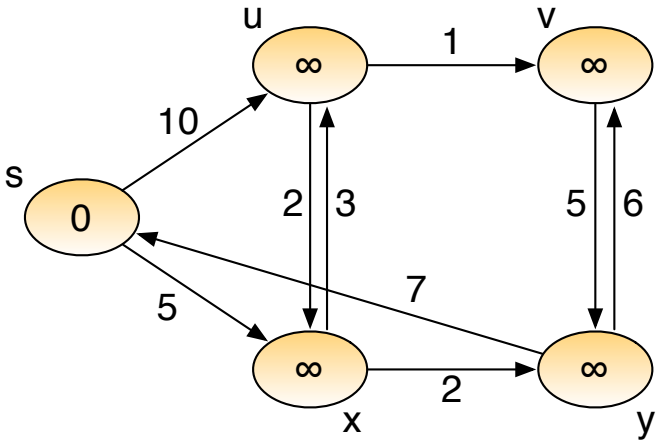
- Startknoten $s \in V$ für kürzesten Pfad
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im kürzesten Pfad pred
- jeder Knoten hat Markierung d
  - Distanz (bzgl. Gewicht) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Algorithmus: Dijkstra

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}^+$, Startknoten $s \in V$
Output: Vorgänger-Liste pred, Distanz-Markierung d
Dijkstra(G, w, s):

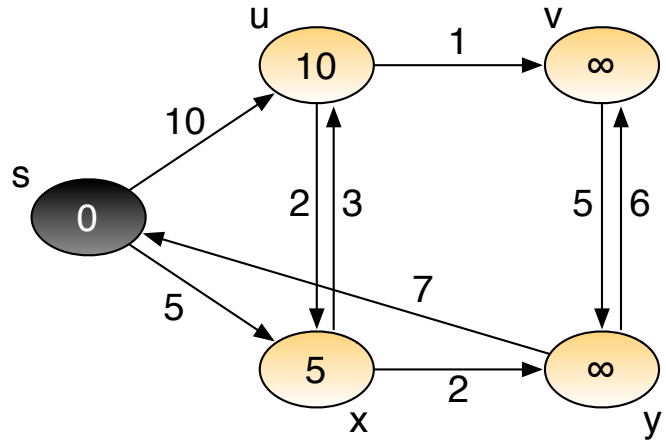
```
for each (Knoten v ∈ V) { // Initialisierung
    pred[v] = null; d[v] = ∞;
}
d[s] = 0;
Q = Priority Queue mit Elementen V, Schlüsseln d;
while ( !Q.isEmpty() ) {
    u = Q.extractMin();
    for each (v ∈ adj[u] mit v ∈ Q) {
        if (d[u] + w(u, v) < d[v]) {
            pred[v] = u; d[v] = d[u] + w(u, v);
            Q.decreaseKey(v, d[v]);
        }
    }
}
```

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



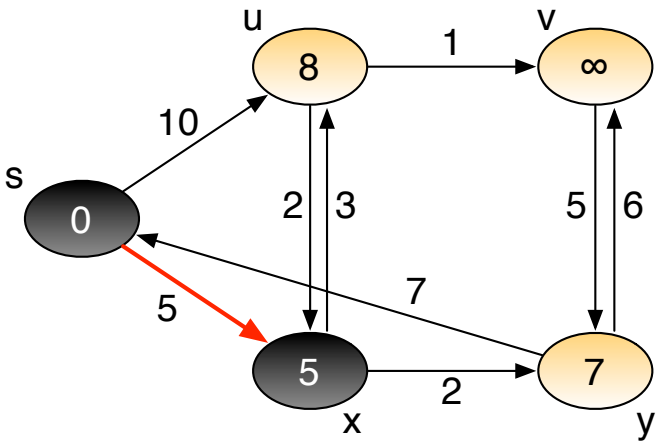
Q:

(s,0)	(u, ∞)	(v, ∞)	(x, ∞)	(y, ∞)



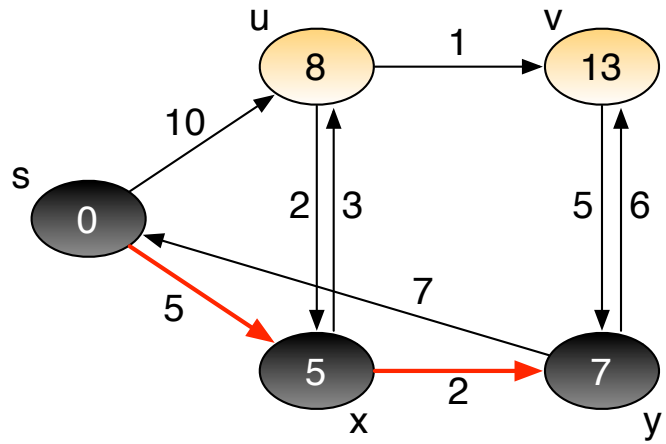
Q:

(x, 5)	(u, 10)	(v, ∞)	(y, ∞)



Q:

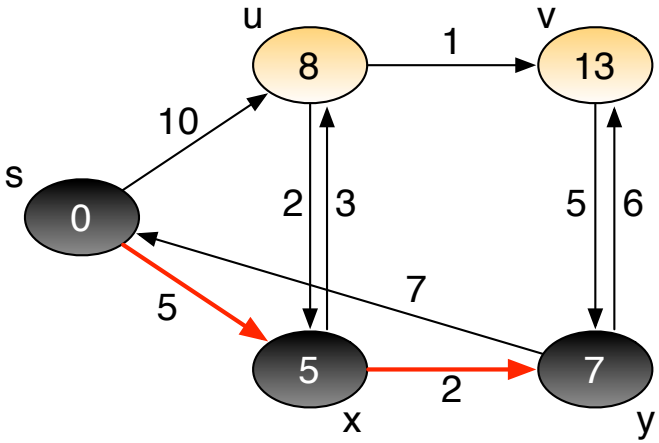
(y, 7)	(u, 8)	(v, ∞)



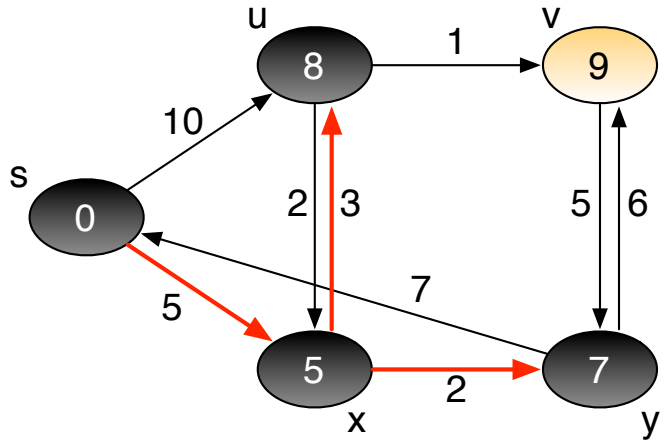
Q:

(u, 8)	(v, 13)

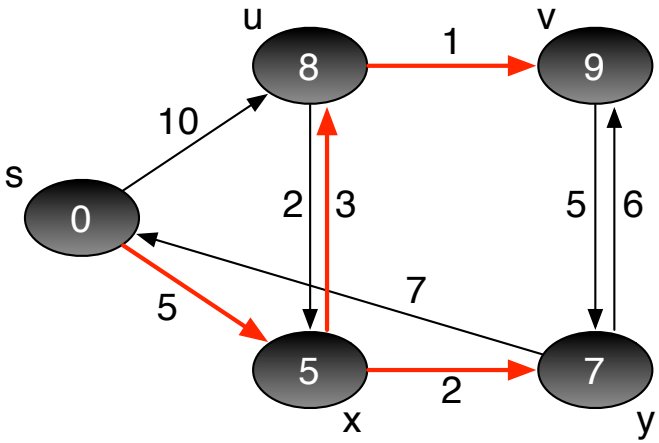
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



Q: | (u, 8) | (v, 13) |



Q: | (v, 9) |



Q:

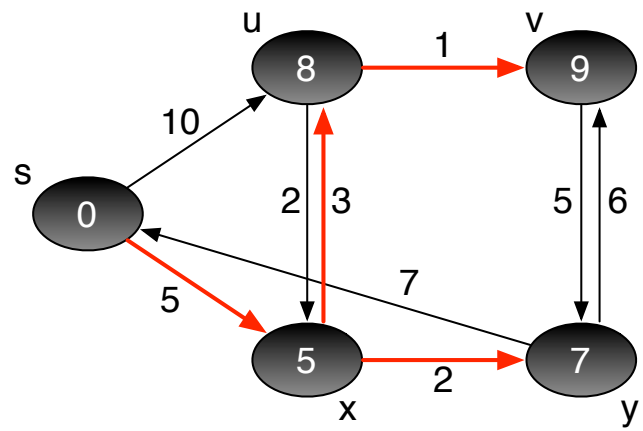
Dijkstra-Algorithmus

Nach Ausführung von **Dijkstra**(G, w, s) gilt für $v \in V$:

- d[v] = Gewicht $w_{min}(s, v)$ des kürzesten Pfades von s zu v
- pred[v] = Vorgängerknoten
- Kürzester Pfad von s zu v:

$$\text{pred}[v], \text{pred}[\text{pred}[v]], \ldots, s$$

Beispiel:



Dijkstra: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-15: Ausführung $|V|$ mal
  - Zeile 7: $O(\log |V|)$
  - Zeile 8-14: Ausführung inkl. äusserer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
  - Zeile 12: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

Dijkstra(G, w, s):

```
1    for each (Knoten v ∈ V) {
2       pred[v] = null; d[v] = ∞;
3    }
4    d[s] = 0;
5    Q = Priority Queue(V, d);
6    while ( !Q.isEmpty() ) {
7       u = Q.extractMin();
8       for each (v ∈ adj[u] mit v ∈ Q) {
9          if (d[u] + w(u, v) < d[v]) {
10            pred[v] = u;
11            d[v] = d[u] + w(u, v);
12            Q.decreaseKey(v, d[v]);
13         }
14      }
15   }
```

Dijkstra: Komplexität

- Komplexität des Dijkstra Algorithmus hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
  - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
  - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
  - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Dijkstra: Korrektheit

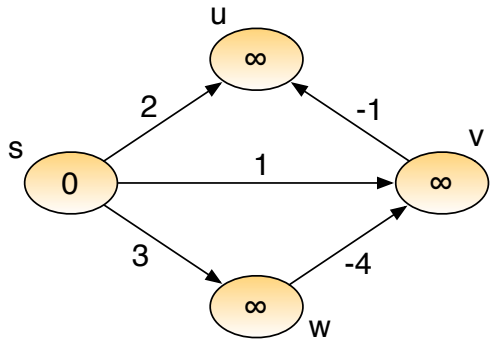
(nur Beweisidee, dies ist kein formaler Beweis!)

Annahme: bisherige Iterationen waren korrekt, bisher bearbeitete Knoten: $X \subset V$

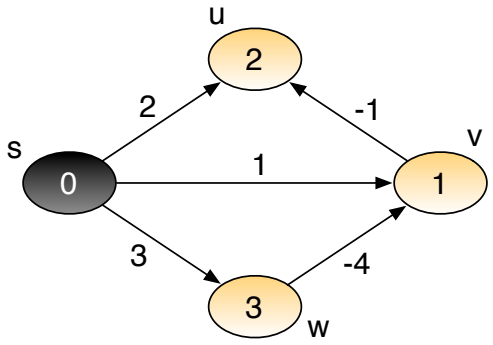
- nächster Iterationsschritt nimmt kürzeste direkte Verbindung von Knoten $x \in X$ zu noch nicht bearbeitetem Knoten $y \in V \setminus X$ hinzu
- $d[y]$ ist nun $d[x] + w(x, y)$
- jeder andere Pfad zu y hat entweder
  - eine Kante, die aus X heraus geht und ist damit nicht kürzer als (x, y)
  - mehrere Kanten, und ist damit nicht kürzer als $d[y]$, da die Kanten positives Gewicht haben

Entscheidende Annahme: Kanten haben positives Gewicht!

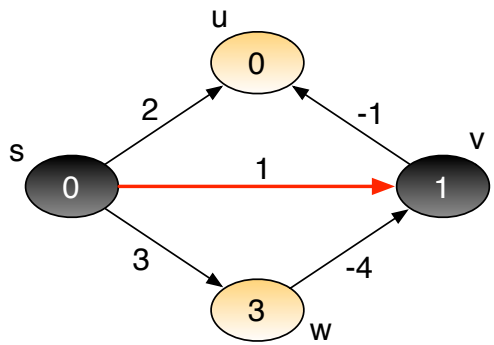
Dijkstra: Negativ-Beispiel



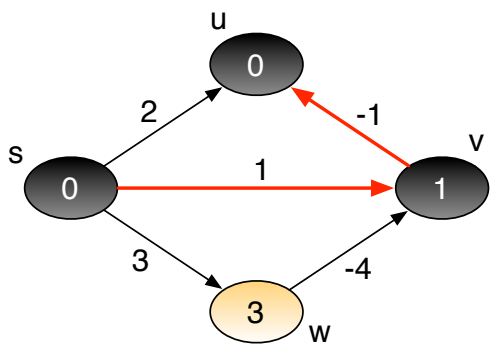
Q: | (s,0) | (u, ∞) | (v, ∞) | (w, ∞) |



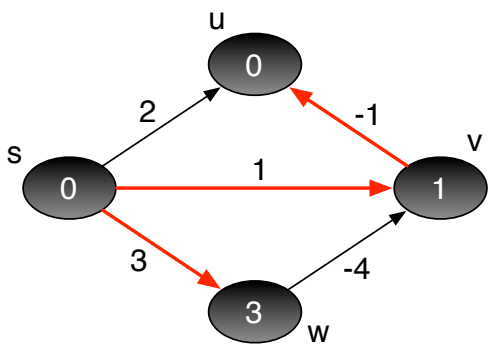
Q: | (v, 1) | (u, 2) | (w, 3) |



Q: | (u, 0) | (w, 3) |



Q: | (w, 3) |



Q:

Dijkstra: Anwendungen

Dijkstra ist einer der am häufigsten verwendete Graph-Algorithmen

Beispiele:

- Routenplanung in GIS (Geographic Information System)
  - Navigationssystem im Auto
  - Maps Applikation (Google, Bing, Apple etc.)
  - Routen mit Flugzeugen, Bahn usw.
- Routing Protokolle für IP Netzwerke
  - z.B. Open Shortest Path First
- Pfadplanung von Robotern, UAV/Dronen, etc.
- Segmentierung von medizinischen Bilddaten

Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche
   - Kürzeste Pfade
   - Minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum

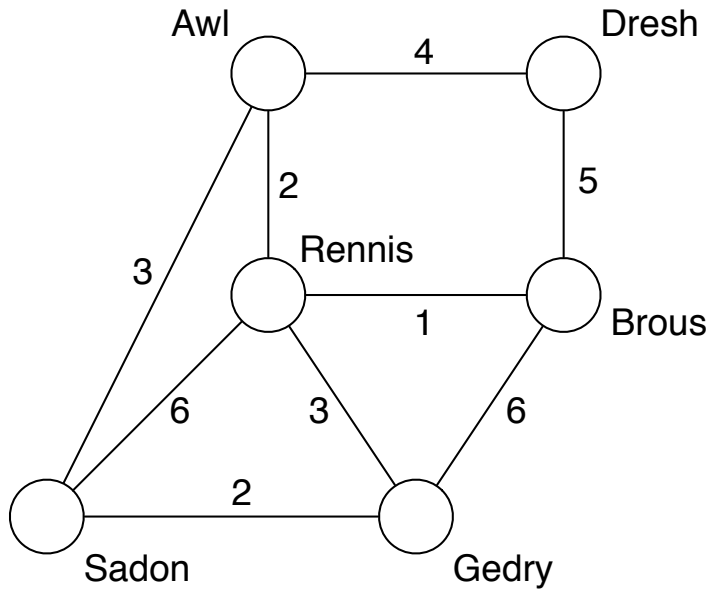
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.

- Spannbaum: Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
- minimaler Spannbaum: Spannbaum G' mit minimalem Gewicht

$$w_{G'} = \sum_{(x,y) \in E'} w(x, y)$$

Minimaler Spannbaum: Beispiel

Beispiel: 6 (virtuelle) Städte und Kosten für Strassenbau dazwischen (in Million Euro):

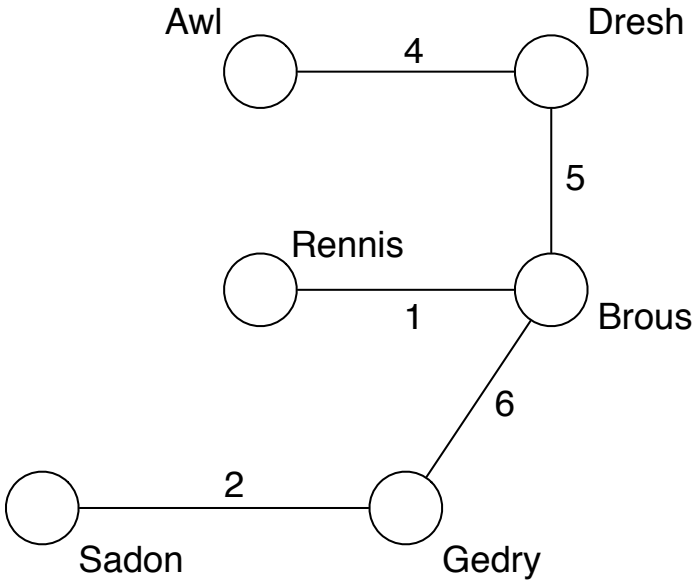


Problem: Strassenbau mit minimalen Kosten, so daß alle Städte verbunden sind (direkt oder über andere Städte)

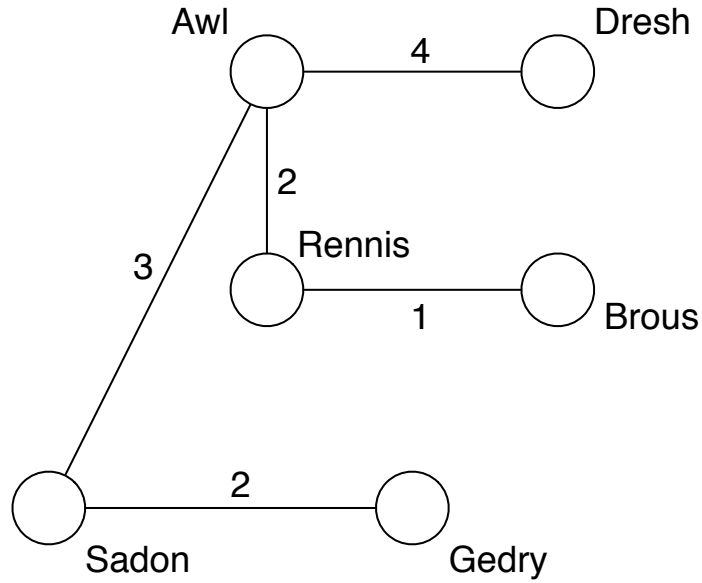
Lösung: minimaler Spannbaum

Minimaler Spannbaum: Beispiel 2

Mögliche Lösungen:



Gewicht: 18



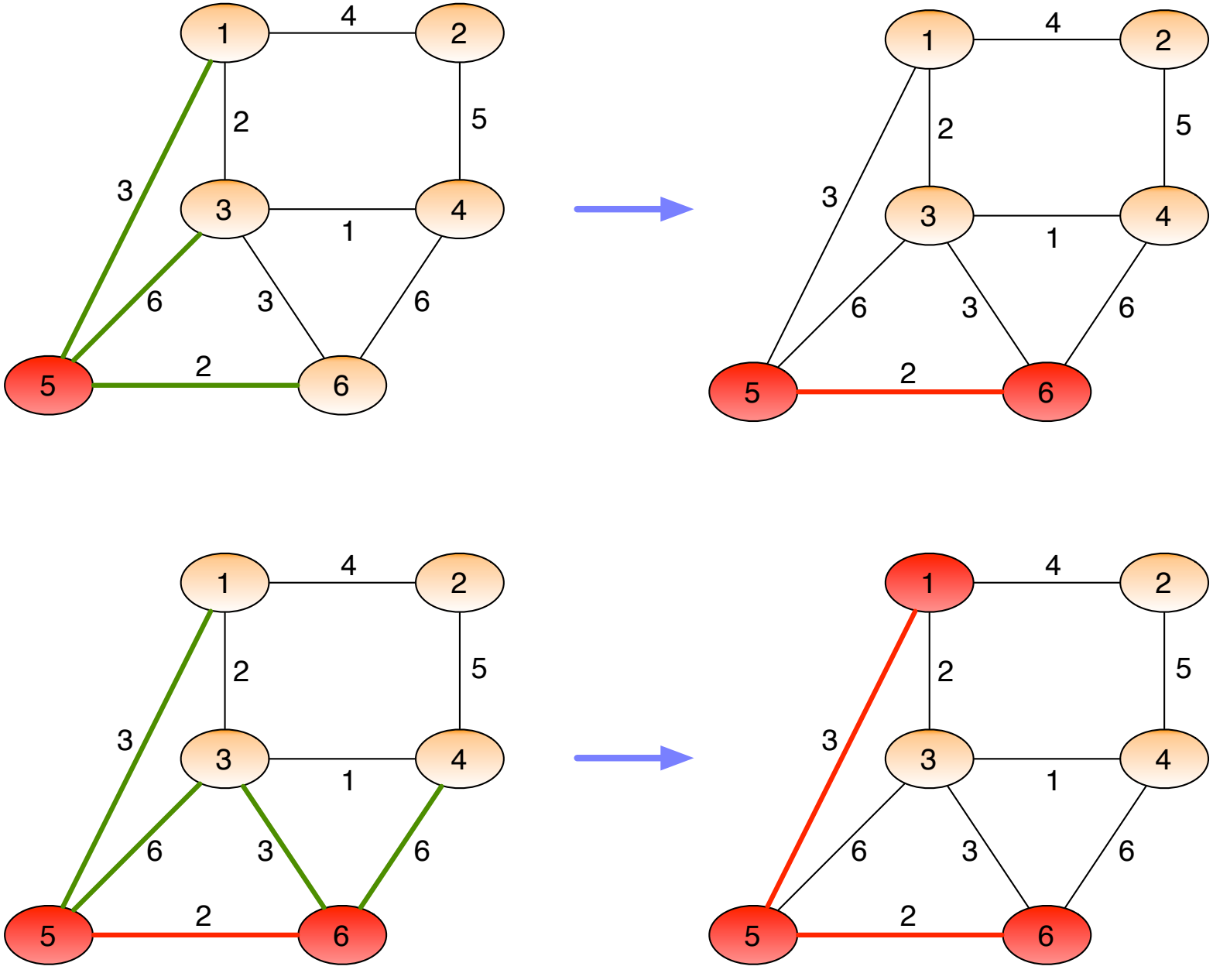
Gewicht: 12

Minimaler Spannbaum: Algorithmen

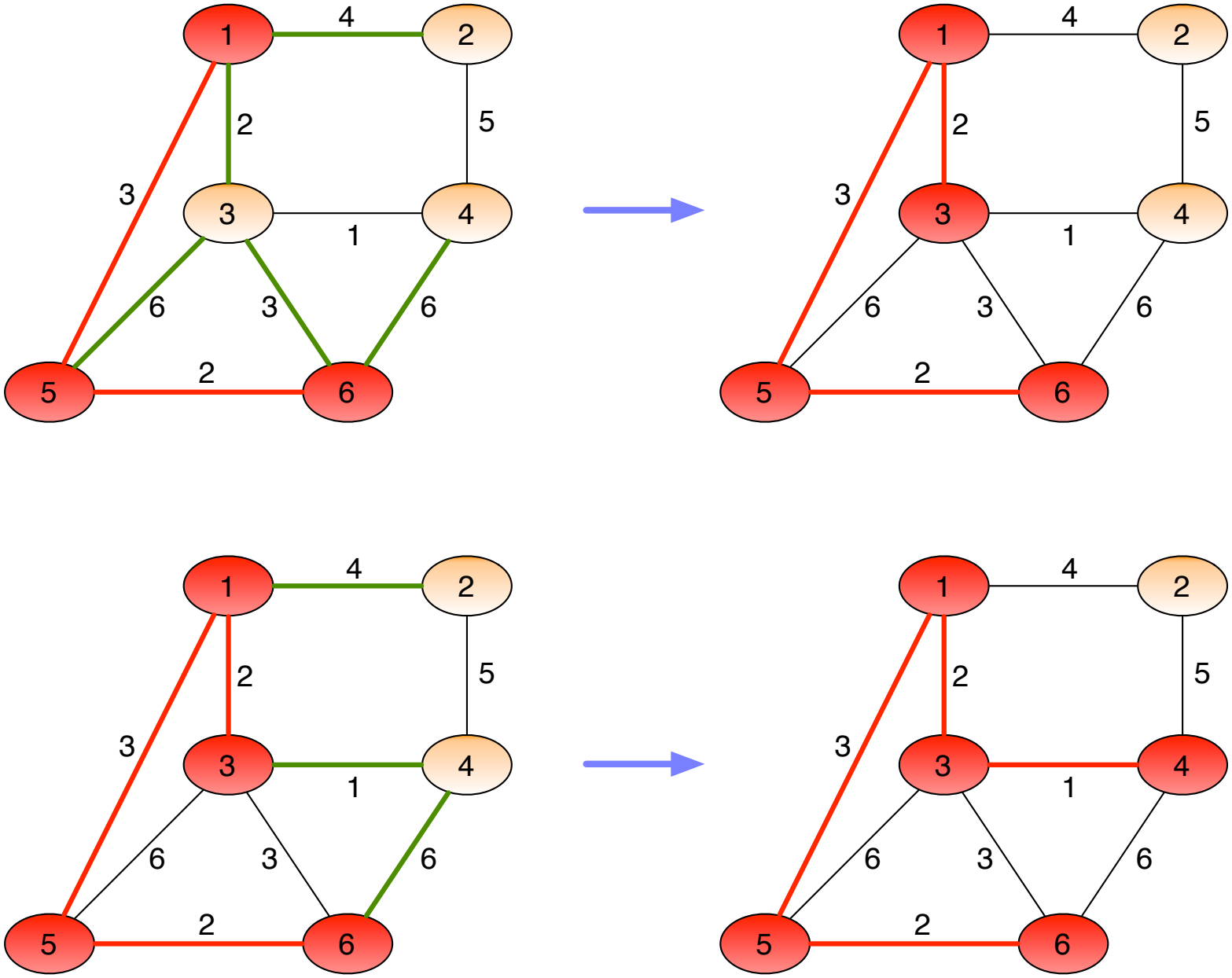
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.

- Minimaler Spannbaum von G:
  - Algorithmus von Kruskal: Greedy-Algorithmus
    Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
  - Algorithmus von Prim: Greedy-Algorithmus
    Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
  - viele Varianten davon als parallele Algorithmen

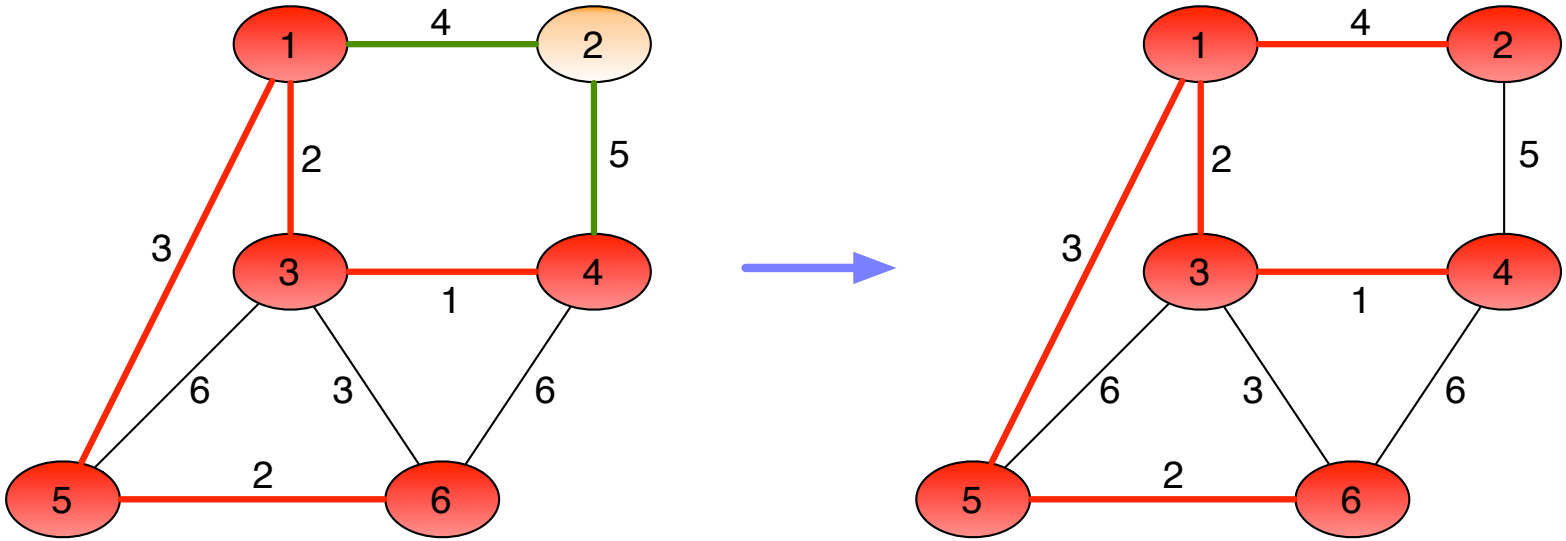
Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 1



Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 2



Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 3



Beobachtungen:

- Zwischenlösungen von Prim Algorithmus sind Bäume
- es werden öfters mehrere Kanten zum selben Knoten betrachtet (s. oben)
  - Vereinfachung: betrachte nur Kante mit minimalem Gewicht

Prim Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.

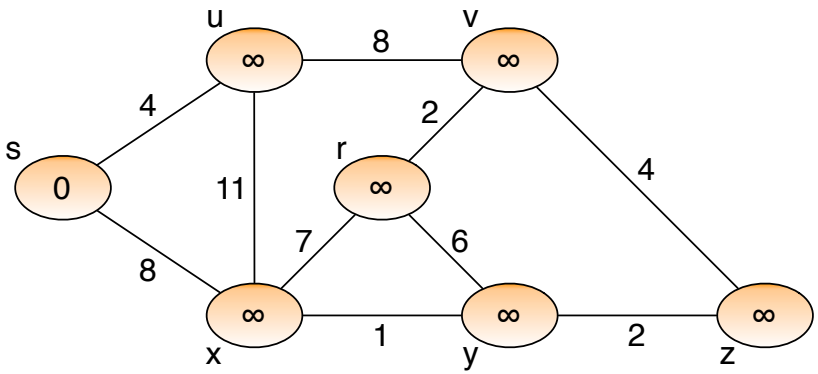
- Startknoten $s \in V$ für minimalen Spannbaum
- Graph repräsentiert als Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im Spannbaum pred
- jeder Knoten hat Markierung g
  - kleinstes Gewicht um Knoten mit aktuellem Spannbaum zu verbinden
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Algorithmus: Prim

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$, Startknoten $s \in V$
Output: Vorgänger-Liste pred
Prim(G, w, s):

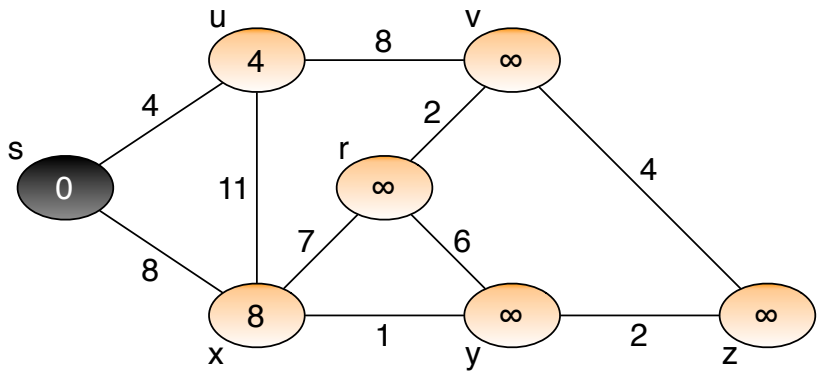
```
for each (Knoten v ∈ V) { // Initialisierung
    pred[v] = null; g[v] = ∞;
}
g[s] = 0;
Q = Priority Queue mit Elementen V, Schlüsseln g;
while ( !Q.isEmpty() ) { // Hauptschleife
    u = Q.extractMin();
    for each (v ∈ adj[u] mit v ∈ Q) {
        if (w(u, v) < g[v]) {
            pred[v] = u; g[v] = w(u, v);
            Q.decreaseKey(v, g[v]);
        }
    }
}
```

Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 1



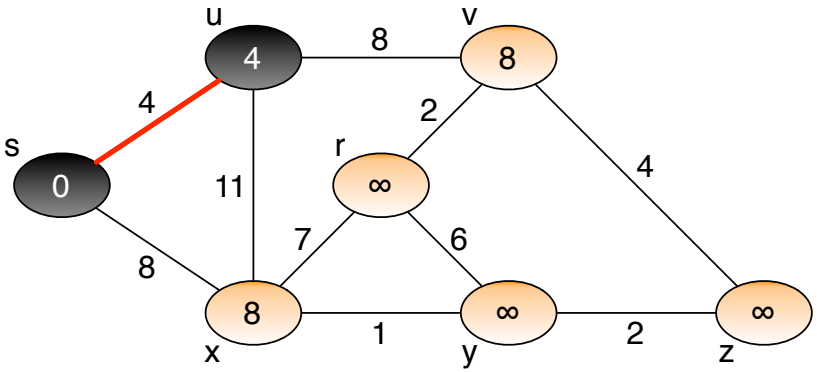
Q:

(s,0)	(u, ∞)	(v, ∞)	(r, ∞)	(x, ∞)	(y, ∞)	(z, ∞)



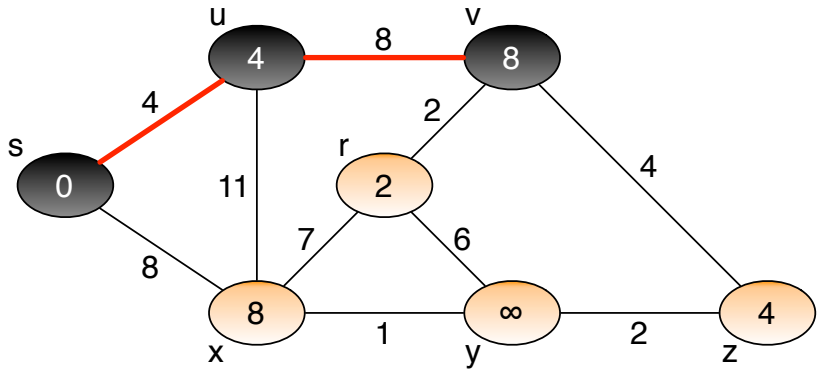
Q:

(u, 4)	(x, 8)	(r, ∞)	(v, ∞)	(y, ∞)	(z, ∞)



Q:

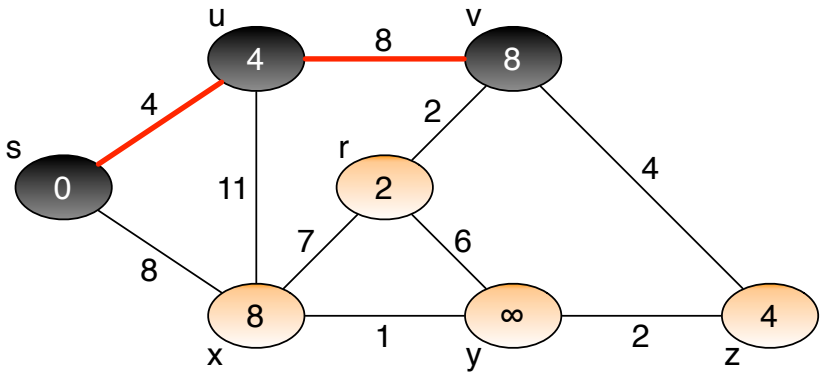
(v, 8)	(x, 8)	(r, ∞)	(y, ∞)	(z, ∞)



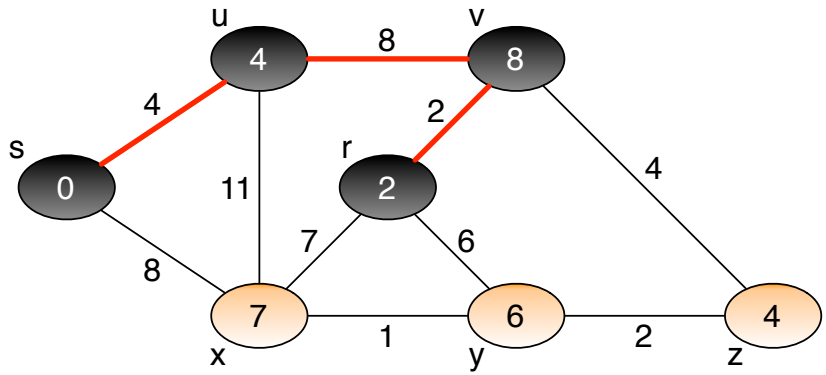
Q:

(r, 2)	(z, 4)	(x, 8)	(y, ∞)

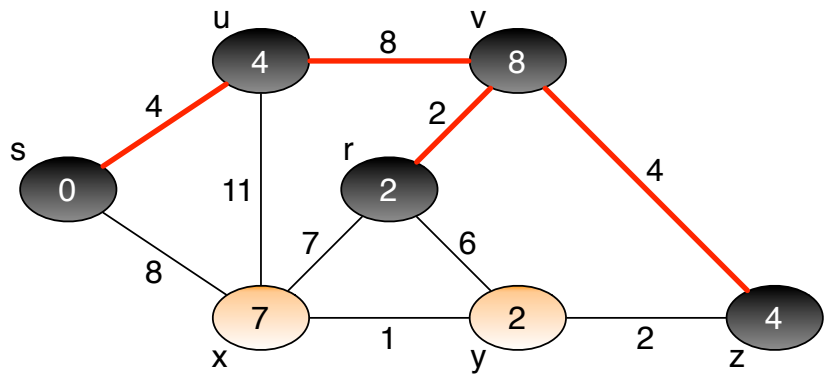
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 2



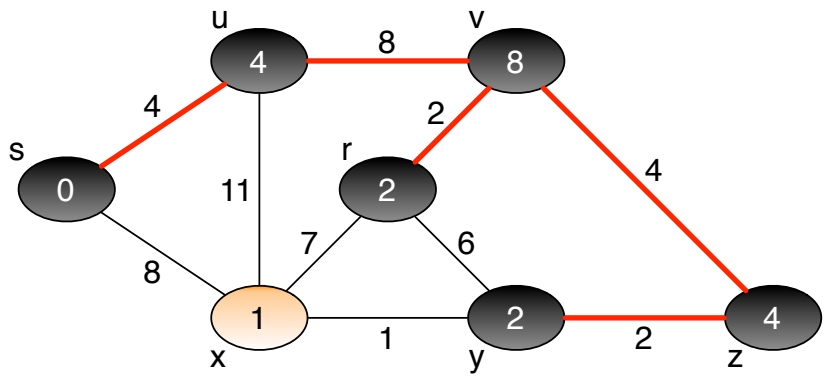
Q: | (r, 2) | (z, 4) | (x, 8) | (y, ∞) |



Q: | (z, 4) | (y, 6) | (x, 7) |

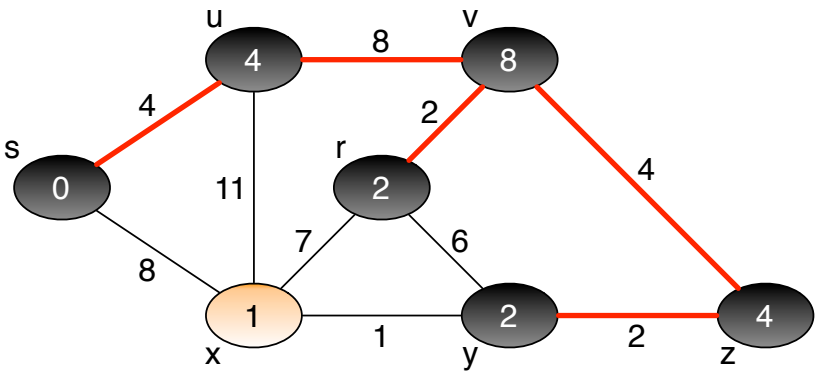


Q: | (y, 2) | (x, 7) |

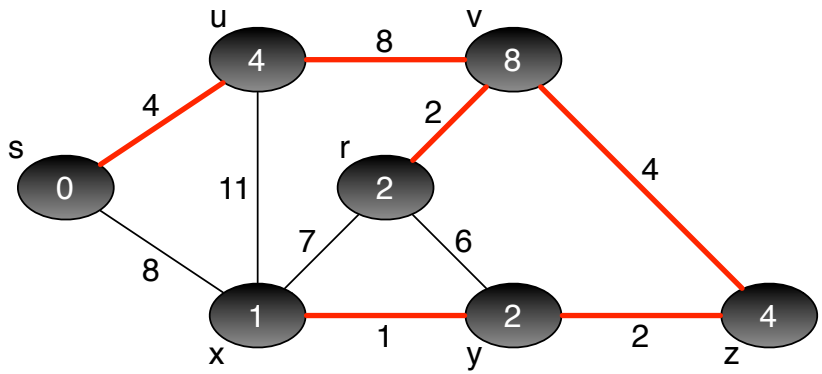


Q: | (x, 1) |

Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 3



Q: (x, 1)



Q:

Nach Ausführung von **Prim**(G, w, s) gilt für $v \in V$:

- pred[v] = Vorgängerknoten im Spannbaum
- Pfad in Spannbaum von v zu Wurzel s:

  pred[v], pred[pred[v]], ..., s

Prim: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-14: Ausführung $|V|$ mal
  - Zeile 7: $O(\log |V|)$
  - Zeile 8-13: Ausführung inkl. äusserer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
  - Zeile 11: $O(\log |V|)$

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

```
Prim(G, w, s):
1     for each (Knoten v ∈ V) {
2       pred[v] = null; g[v] = ∞;
3     }
4     g[s] = 0;
5     Q = Priority Queue(V, g);
6     while ( !Q.isEmpty() ) {
7       u = Q.extractMin();
8       for each (v ∈ adj[u] mit v ∈ Q) {
9         if (w(u, v) < g[v]) {
10          pred[v] = u; g[v] = w(u, v);
11          Q.decreaseKey(v, g[v]);
12        }
13      }
14    }
```

Prim: Komplexität

- Komplexitätsanalyse von Prim fast identisch mit Dijkstra!

- Komplexität des Algorithmus von Prim hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
  - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
  - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
  - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Prim: Anwendungen

- Planung von Netzwerken
  - Strassennetz
  - Kommunikations-Netzwerk
  - elektronische Schaltungen
- Clustering von Daten
  - Daten als Knoten, “Nähe” als Kanten, entferne “lange” Kanten aus minimalem Spannbaum $\rightarrow$ Clustering
- Extrahieren/Tracking von Objekten aus Bildern in Computer Vision

Ausblick: Graphen-Algorithmen

- Fluss in Graphen: statt Kantengewichten gibt es Kapazitäten, betrachtet wird Fluss von Quelle zu Senke
  - Problem: finde maximalen Fluss
  - Anwendung: z.B. Fluss in Kommunikations-Netzwerken
- Einfärben von Graphen: Färbe Knoten von Graph so ein, dass keine benachbarten Knoten diesselbe Farbe haben
  - Anwendungen: z.B. Scheduling, Sudoku
- Planare Graphen: lässt sich Graph ohne Kanten-Überschneidung zeichnen?
  - Anwendung: z.B. Chip- bzw. Platinen-Design
- Klassifikation von medizinischen Daten: über analytische Operationen auf Adjazenzmatrix, z.B. Laplace-Operator
  - Anwendungen: z.B. Identifikation von Melanomen, Tracking von Endoskopen

Zusammenfassung

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche
   - Kürzeste Pfade
   - Minimaler Spannbaum