

Definition Kürzester Pfad

Sei $G = (V, E)$ Graph mit **Gewichtsfunktion**

$$w : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

- das **Gewicht eines Pfades** $p = (v_1, \dots, v_k)$, $v_i \in V$, $i = 1, \dots, k$, ist die Summe der Gewichte aller seiner Kanten

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

- das **Gewicht des kürzesten Pfades** zwischen zwei Knoten u und v ($u, v \in V$) ist

$$w_{min}(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : p \text{ Pfad von } u \text{ nach } v\} & \text{Pfad existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

3

Notizen

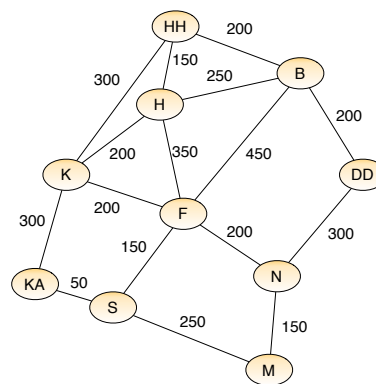
Beispiel: kürzeste Pfade

Navigationssystem:

- Knoten sind Großstädte
- Kanten sind Autobahnverbindung
- Gewichte der Kanten sind (grobe) Entfernungen in Kilometern

Fragestellungen:

- kürzester Weg von M nach HH?
- alle kürzesten Verbindungen von M zu anderen Städten?
- alle kürzesten Verbindungen zwischen allen Städten?



4

Notizen

Kürzeste Pfade: Algorithmen

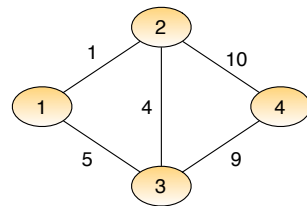
Sei $G = (V, E)$ gewichteter, gerichteter Graph.

- Kürzeste Pfade in Graphen von fixem **Startknoten s** :
 - **Dijkstra-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - **A*-Algorithmus** (nur positive Kantengewichte)
Komplexität: mit guter Heuristik, besser als Dijkstra
 - **Bellman-Ford-Algorithmus** (auch negative Gewichte)
Komplexität: $O(|V| * |E|)$
- Kürzeste Pfade in Graphen zwischen **allen Knotenpaaren**:
 - **Floyd-Warshall-Algorithmus** (all pairs shortest path)
basiert auf dynamischer Programmierung
Komplexität: $\Theta(|V|^3)$

Notizen

5

Gegenbeispiel Greedy-Algorithmus

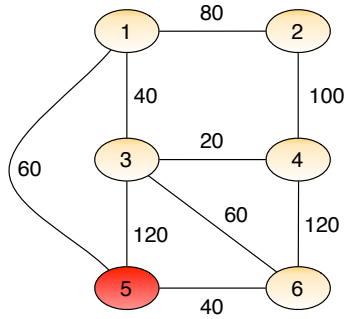


- **Greedy-Schema**: füge kürzeste Kante zu Pfad (so dass kein Zyklus entsteht)
 - Starte bei Knoten 1
 - füge Kante (1,2) hinzu (Kosten 1)
 - füge Kante (2,3) hinzu (Kosten 4)
 - füge Kante (3,4) hinzu (Kosten 9)
- Problem: Pfad von 1 nach 4 hat Kosten 14, kürzester Pfad hat aber Kosten 11!

Notizen

6

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



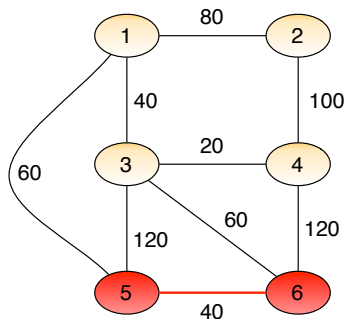
| Kürzester Pfad | | Länge |
|----------------|--|-------|
| 5 | | 0 |

| Knoten | Pfad | Pfad Länge |
|--------|------|------------|
| 1 | 5 | 60 |
| 3 | 5 | 120 |
| 6 | 5 | 40 |

Notizen

7

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



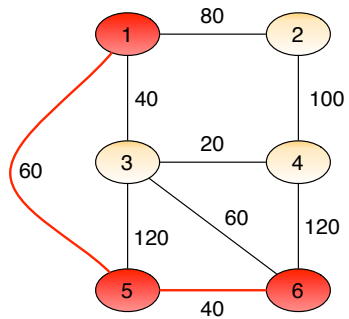
| Kürzester Pfad | | Länge |
|----------------|--|-------|
| 5 | | 0 |
| 5,6 | | 40 |

| Knoten | Pfad | Pfad Länge |
|--------|------|------------|
| 1 | 5 | 60 |
| 3 | 5,6 | 100 |
| 4 | 5,6 | 160 |

Notizen

8

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 3

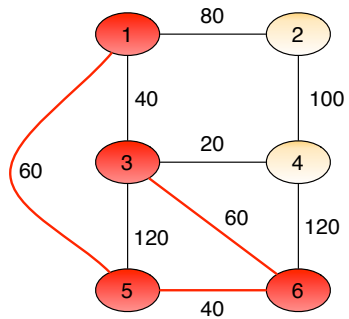


| Kürzester Pfad | Länge |
|----------------|-------|
| 5 | 0 |
| 5,6 | 40 |
| 5,1 | 60 |

| Knoten hinzugefügt | Pfad | Pfad Länge |
|--------------------|------|------------|
| 2 | 5,1 | 140 |
| 3 | 5,6 | 100 |
| 4 | 5,6 | 160 |

Notizen

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 4

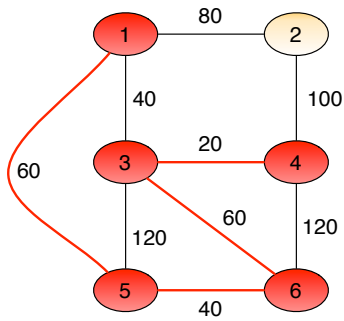


| Kürzester Pfad | Länge |
|----------------|-------|
| 5 | 0 |
| 5,6 | 40 |
| 5,1 | 60 |
| 5,6,3 | 100 |

| Knoten hinzugefügt | Pfad | Pfad Länge |
|--------------------|-------|------------|
| 2 | 5,1 | 140 |
| 4 | 5,6,3 | 120 |

Notizen

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 5



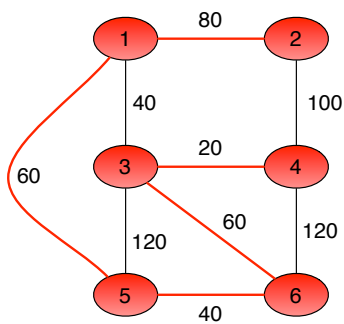
| Kürzester Pfad | Länge |
|----------------|-------|
| 5 | 0 |
| 5,6 | 40 |
| 5,1 | 60 |
| 5,6,3 | 100 |
| 5,6,3,4 | 120 |

| Knoten hinzugefügt | Pfad | Pfad Länge |
|-----------------------|------|------------|
| 2 | 5,1 | 140 |

Notizen

11

Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 6



| Kürzester Pfad | Länge |
|----------------|-------|
| 5 | 0 |
| 5,6 | 40 |
| 5,1 | 60 |
| 5,6,3 | 100 |
| 5,6,3,4 | 120 |
| 5,1,2 | 140 |

fertig

Notizen

12

Dijkstra-Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ Graph mit Gewicht $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ (positive reelle Zahlen).

- Startknoten $s \in V$ für kürzesten Pfad
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im kürzesten Pfad $pred$
- jeder Knoten hat Markierung d
 - Distanz (bzgl. Gewicht) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Priority Queue Q

Notizen

13

Algorithmus: Dijkstra

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste $pred$, Distanz-Markierung d

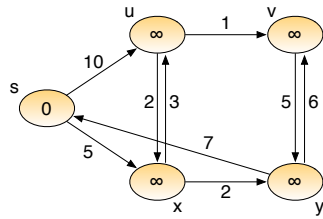
Dijkstra(G, w, s):

```
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
     $pred[v] = null$ ;  $d[v] = \infty$ ;
}
 $d[s] = 0$ ;
 $Q =$  Priority Queue mit Elementen  $V$ , Schlüsseln  $d$ ;
while ( ! $Q.isEmpty()$  ) {
     $u = Q.extractMin()$ ;
    for each ( $v \in adj[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
        if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
             $pred[v] = u$ ;  $d[v] = d[u] + w(u, v)$ ;
             $Q.decreaseKey(v, d[v])$ ;
        }
    }
}
```

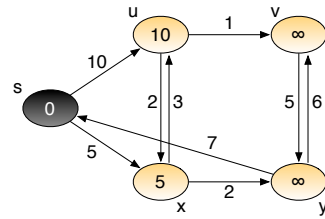
Notizen

14

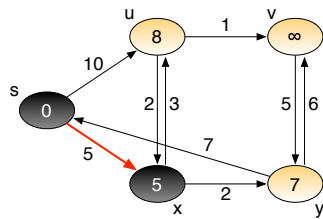
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 1



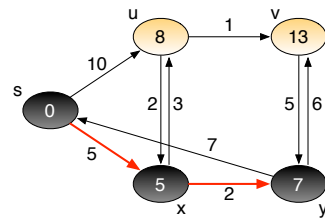
Q: (s,0) (u,∞) (v,∞) (x,∞) (y,∞)



Q: (x,5) (u,10) (v,∞) (y,∞)



Q: (y,7) (u,8) (v,∞)

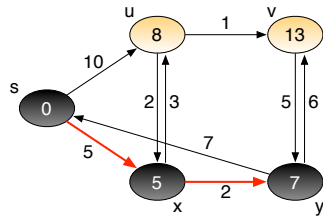


Q: (u,8) (v,13)

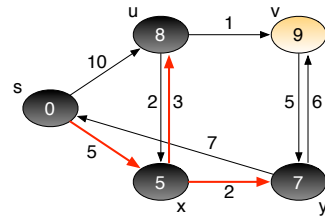
15

Notizen

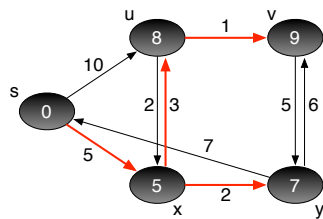
Beispiel: Ablauf Dijkstra-Algorithmus 2



Q: (u,8) (v,13)



Q: (v,9)



Q:

16

Notizen

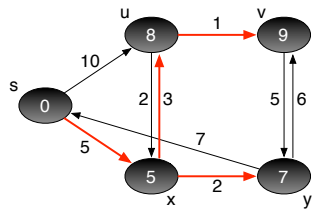
Dijkstra-Algorithmus

Nach Ausführung von **Dijkstra**(G, w, s) gilt für $v \in V$:

- $d[v]$ = Gewicht $w_{min}(s, v)$ des kürzesten Pfades von s zu v
- $pred[v]$ = Vorgängerknoten
- Kürzester Pfad von s zu v :

$pred[v], pred[pred[v]], \dots, s$

Beispiel:



Notizen

Dijkstra: Laufzeit

Laufzeit:

- Annahme: Q implementiert als binärer Min-Heap
- Zeile 1-3: $O(|V|)$
- Zeile 5: entspricht buildMinHeap, also $O(|V|)$
- Zeile 6-15: Ausführung $|V|$ mal
 - Zeile 7: $O(\log |V|)$
 - Zeile 8-14: Ausführung inkl. äußerer while-Schleife: insgesamt $|E|$ mal (siehe DFS/BFS)
 - Zeile 12: $O(\log |V|)$

```

Dijkstra( $G, w, s$ ):
1  for each (Knoten  $v \in V$ ) {
2     $pred[v] = \text{null}; d[v] = \infty;$ 
3  }
4   $d[s] = 0;$ 
5   $Q = \text{Priority Queue}(V, d);$ 
6  while (  $!Q.\text{isEmpty}()$  ) {
7     $u = Q.\text{extractMin}();$ 
8    for each ( $v \in \text{adj}[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
9      if ( $d[u] + w(u, v) < d[v]$ ) {
10        $pred[v] = u;$ 
11        $d[v] = d[u] + w(u, v);$ 
12        $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v]);$ 
13     }
14   }
15 }
    
```

Gesamt: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

einfacher: $O(|E| \log |V|)$

Notizen

Dijkstra: Komplexität

- Komplexität des Dijkstra Algorithmus hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Notizen

19

Dijkstra: Korrektheit

(nur Beweisidee, dies ist kein formaler Beweis!)

Annahme: bisherige Iterationen waren korrekt, bisher bearbeitete Knoten: $X \subset V$

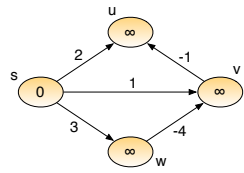
- nächster Iterationsschritt nimmt kürzeste direkte Verbindung von Knoten $x \in X$ zu noch nicht bearbeitetem Knoten $y \in V \setminus X$ hinzu
- $d[y]$ ist nun $d[x] + w(x, y)$
- jeder andere Pfad zu y hat entweder
 - eine Kante, die aus X heraus geht und ist damit nicht kürzer als (x, y)
 - mehrere Kanten, und ist damit nicht kürzer als $d[y]$, da die Kanten positives Gewicht haben

Entscheidende Annahme: Kanten haben positives Gewicht!

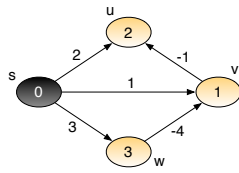
Notizen

20

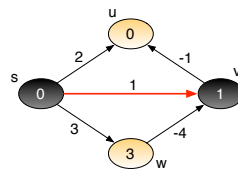
Dijkstra: Negativ-Beispiel



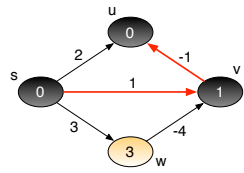
Q: (s, 0) (u, ∞) (v, ∞) (w, ∞)



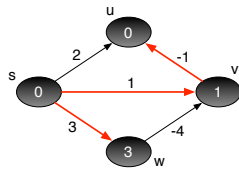
Q: (v, 1) (u, 2) (w, 3)



Q: (u, 0) (w, 3)



Q: (w, 3)



Q:

Notizen

21

Dijkstra: Anwendungen

Dijkstra ist einer der am häufigsten verwendete Graph-Algorithmen

Beispiele:

- Routenplanung in GIS (Geographic Information System)
 - Navigationssystem im Auto
 - Maps Applikation (Google, Bing, Apple etc.)
 - Routen mit Flugzeugen, Bahn usw.
- Routing Protokolle für IP Netzwerke
 - z.B. Open Shortest Path First
- Pfadplanung von Robotern, UAV/Dronen, etc.
- Segmentierung von medizinischen Bilddaten

Notizen

22

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

9 Graph-Algorithmen

- Tiefensuche
- Breitensuche
- Kürzeste Pfade
- Minimaler Spannbaum

Notizen

Minimaler Spannbaum

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

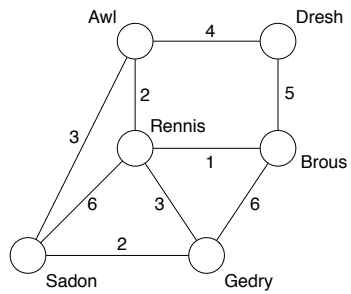
- **Spannbaum:** Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
- **minimaler Spannbaum:** Spannbaum G' mit minimalem Gewicht

$$w_{G'} = \sum_{(x,y) \in E'} w(x,y)$$

Notizen

Minimaler Spannbaum: Beispiel

Beispiel: 6 (virtuelle) Städte und Kosten für Strassenbau dazwischen (in Million Euro):



Problem: Strassenbau mit minimalen Kosten, so daß alle Städte verbunden sind (direkt oder über andere Städte)

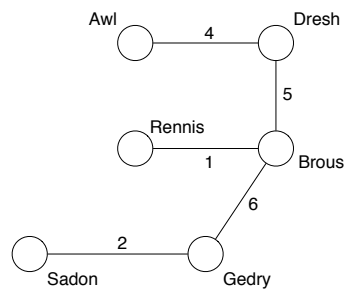
Lösung: minimaler Spannbaum

Notizen

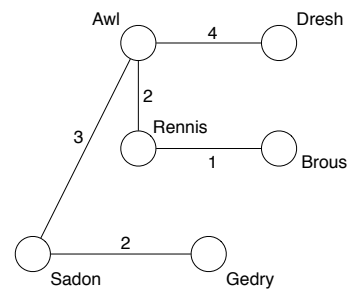
25

Minimaler Spannbaum: Beispiel 2

Mögliche Lösungen:



Gewicht: 18



Gewicht: 12

Notizen

26

Minimaler Spannbaum: Algorithmen

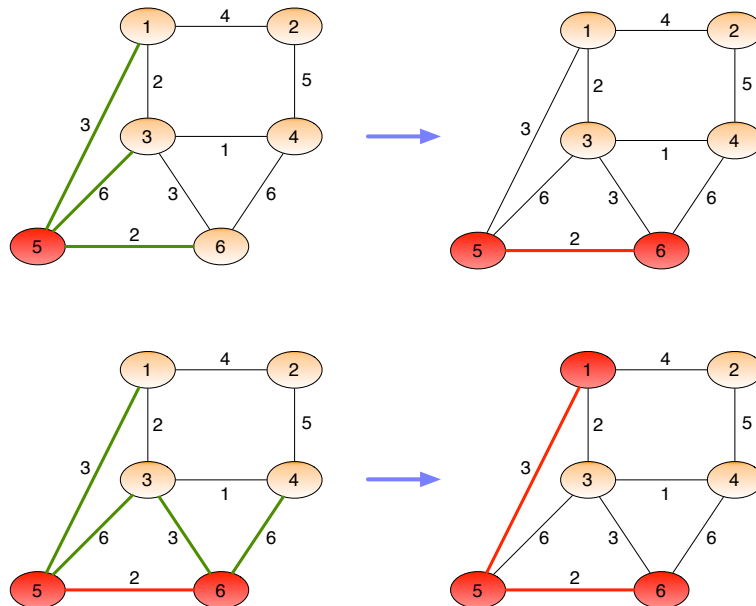
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Minimaler Spannbaum von G :
 - Algorithmus von Kruskal: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - Algorithmus von Prim: Greedy-Algorithmus
Komplexität: $O(|E| \log |V|)$
 - viele Varianten davon als parallele Algorithmen

Notizen

27

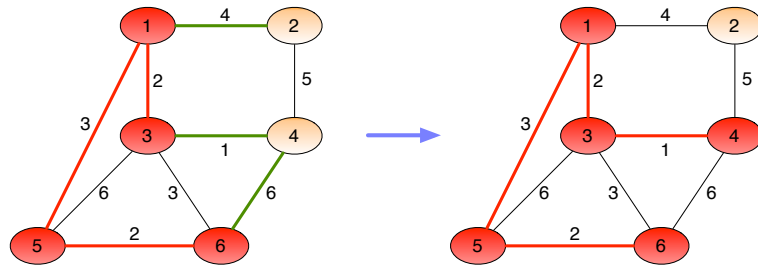
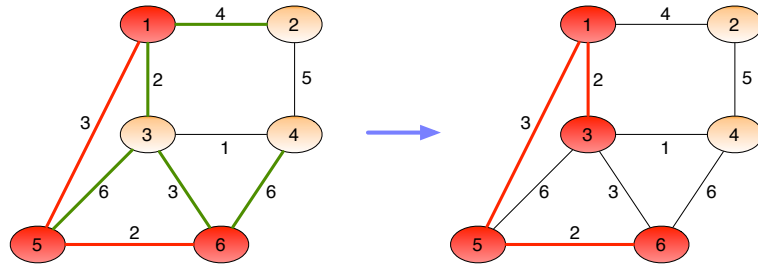
Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 1



Notizen

28

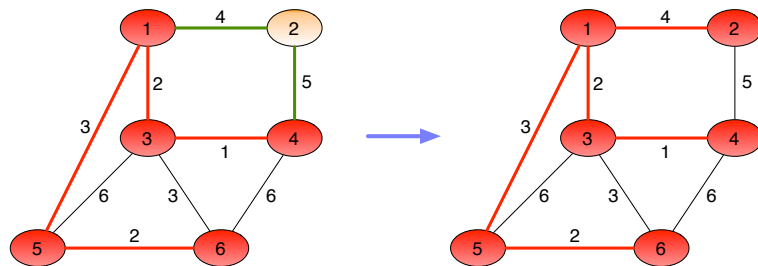
Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 2



Notizen

29

Beispiel-Ablauf: Prim Algorithmus 3



Notizen

Beobachtungen:

- Zwischenlösungen von Prim Algorithmus sind Bäume
- es werden öfters mehrere Kanten zum selben Knoten betrachtet (s. oben)
 - Vereinfachung: betrachte nur Kante mit minimalem Gewicht

30

Prim Algorithmus

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Startknoten $s \in V$ für minimalen Spannbaum
- Graph repräsentiert als Adjazenzliste `adj`
- jeder Knoten (ausser s) hat Vorgänger im Spannbaum `pred`
- jeder Knoten hat Markierung `g`
 - kleinstes Gewicht um Knoten mit aktuellem Spannbaum zu verbinden
- Hilfsmittel: Priority Queue `Q`

Notizen

31

Algorithmus: Prim

Input: Graph $G = (V, E)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, Startknoten $s \in V$

Output: Vorgänger-Liste `pred`

Prim(G, w, s):

```
for each (Knoten  $v \in V$ ) { // Initialisierung
```

```
     $pred[v] = \text{null}; g[v] = \infty;$ 
```

```
}
```

```
 $g[s] = 0;$ 
```

```
 $Q = \text{Priority Queue mit Elementen } V, \text{ Schlüsseln } g;$ 
```

```
while ( ! $Q.is\text{Empty}()$  ) { // Hauptschleife
```

```
     $u = Q.extractMin();$ 
```

```
    for each ( $v \in adj[u]$  mit  $v \in Q$ ) {
```

```
        if ( $w(u, v) < g[v]$ ) {
```

```
             $pred[v] = u; g[v] = w(u, v);$ 
```

```
             $Q.decreaseKey(v, g[v]);$ 
```

```
        }
```

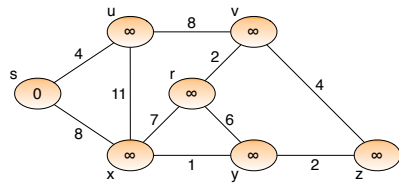
```
    }
```

```
}
```

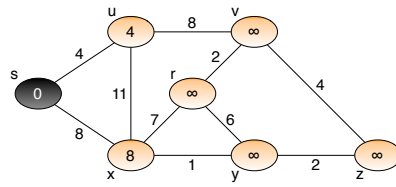
Notizen

32

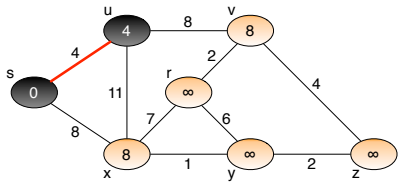
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 1



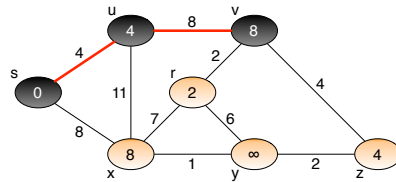
Q: (s,0) (u,∞) (v,∞) (r,∞) (x,∞) (y,∞) (z,∞)



Q: (u,4) (x,8) (r,∞) (v,∞) (y,∞) (z,∞)



Q: (v,8) (x,8) (r,∞) (y,∞) (z,∞)

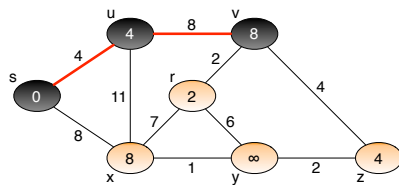


Q: (r,2) (z,4) (x,8) (y,∞)

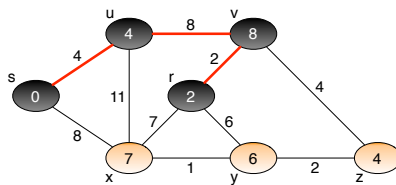
33

Notizen

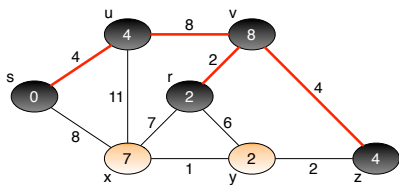
Beispiel: Ablauf Prim Algorithmus 2



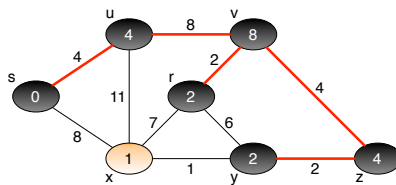
Q: (r,2) (z,4) (x,8) (y,∞)



Q: (z,4) (y,6) (x,7)



Q: (y,2) (x,7)



Q: (x,1)

34

Notizen

Prim: Komplexität

- Komplexitätsanalyse von Prim fast identisch mit Dijkstra!
- Komplexität des Algorithmus von Prim hängt entscheidend von der Implementierung der Priority Queue ab!
- Varianten:
 - als verkettete Liste: $O(|V|^2)$
 - als binärer Heap: $O(|E| \log |V|)$
 - als Fibonacci Heap: $O(|E| + |V| \log |V|)$

Notizen

37

Prim: Anwendungen

- Planung von Netzwerken
 - Strassennetz
 - Kommunikations-Netzwerk
 - elektronische Schaltungen
- Clustering von Daten
 - Daten als Knoten, "Nähe" als Kanten, entferne "lange" Kanten aus minimalem Spannbaum → Clustering
- Extrahieren/Tracking von Objekten aus Bildern in Computer Vision

Notizen

38

Ausblick: Graphen-Algorithmen

- **Fluss in Graphen:** statt Kantengewichten gibt es Kapazitäten, betrachtet wird Fluss von Quelle zu Senke
 - Problem: finde maximalen Fluss
 - Anwendung: z.B. Fluss in Kommunikations-Netzwerken
- **Einfärben von Graphen:** Färbe Knoten von Graph so ein, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben
 - Anwendungen: z.B. Scheduling, Sudoku
- **Planare Graphen:** lässt sich Graph ohne Kanten-Überschneidung zeichnen?
 - Anwendung: z.B. Chip- bzw. Platinen-Design
- **Klassifikation von medizinischen Daten:** über analytische Operationen auf Adjazenzmatrix, z.B. Laplace-Operator
 - Anwendungen: z.B. Identifikation von Melanomen, Tracking von Endoskopen

Notizen

39

Zusammenfassung

- ⑦ Fortgeschrittene Datenstrukturen
- ⑧ Such-Algorithmen
- ⑨ Graph-Algorithmen
 - Tiefensuche
 - Breitensuche
 - Kürzeste Pfade
 - Minimaler Spannbaum

Notizen

40