

Fourier Transformation

- Signale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind im **Zeitbereich**
 - jedem Zeitpunkt wird ein Wert (z.B. Amplitude) zugeordnet
 - Beispiele: Audio, Video, Bilder
- **Fourier-Transformation** führt Signal in **Frequenzbereich** über
 - betrachte Signal als Überlagerung von Sinuskurven
- **Anwendungen:**
 - Filterung von bestimmten Frequenzen
 - Datenkompression, z.B.
 - Audio: MP3
 - Video: MPEG
 - Bilder: JPEG
 - Bild- und Signalverarbeitung
- überaus nützlich, und effizient dank **FFT** (Fast Fourier Transformation)

Notizen

3

Polynome

Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$A(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

heißt **Polynom** in x vom **Grad** $n - 1$. Hierbei heißen die $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n - 1$ und $a_{n-1} \neq 0$, **Koeffizienten** von A .

- A hat **Gradschranke** n , falls der Grad von A zwischen 0 und $n - 1$ liegt.
- **Summen-Notation** für A :

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

- Die **Koeffizientendarstellung** von A ist der Vektor

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$$

Notizen

4

Operationen auf Polynomen

Seien A, B Polynome.

- **Auswertung von Polynom:** berechne für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$A(x_0)$$

- **Summe von Polynomen:** berechne Polynom C für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$C(x) = A(x) + B(x)$$

- **Multiplikation von Polynomen:** berechne Polynom C für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$C(x) = A(x)B(x)$$

Notizen

5

Auswertung von Polynomen

Sei A Polynom mit Koeffizientendarstellung $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$.

- **Auswertung** von A an $x_0 \in \mathbb{R}$ mit **Horner-Schema:**

$$A(x_0) = a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \dots + x_0(a_{n-2} + x_0(a_{n-1}))) \dots))$$

- Aufwand: $\Theta(n)$
- **Beispiel:** $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$ an Stelle $x_0 = 2$:

$$A(x_0) = 4 + x_0(-3 + x_0(5)) = 4 + 2(-3 + 2(5)) = 18$$

Notizen

6

Addition von Polynomen

Seien A, B Polynome mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$.

- Koeffizientendarstellungen $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$,
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- **Summe** $A(x) + B(x)$ ist Polynom C mit Gradschranke n ,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$$

mit $c_j = a_j + b_j$ für $j = 0, \dots, n-1$.

- Aufwand: $\Theta(n)$
- **Beispiel:** $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$, $B(x) = 4x - 2$, dann ist

$$C(x) = 5x^2 + x + 2$$

7

Notizen

Multiplikation von Polynomen

Seien A, B Polynome mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$.

- Koeffizientendarstellungen $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$,
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- **Produkt** $A(x)B(x)$ ist Polynom C mit Gradschranke $2n-1$,

$$C(x) = \sum_{j=0}^{2n-2} c_j x^j$$

mit

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} \quad \text{für } j = 0, \dots, 2n-2$$

- Aufwand: $\Theta(n^2)$
- **Beispiel:** $A(x) = 5x^2 - 3x + 4$, $B(x) = 4x - 2$, dann sind

$$c_0 = -8, \quad c_1 = 22, \quad c_2 = -22, \quad c_3 = 20, \quad c_4 = 0$$

8

Notizen

Faltung

Seien A, B Polynome mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$.

- Koeffizientendarstellung $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$,
 $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$
- Sei $c = (c_0, \dots, c_{2n-2})$ die Koeffizientendarstellung des
Produktpolynoms $C(x) = A(x)B(x)$ mit

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}$$

- c wird auch **Faltung** der Vektoren a, b genannt,

$$c = a * b$$

- Faltung ist sehr häufige Operation auf Signalen (z.B.
Anwendung von Filtern)

Notizen

9

Stützstellendarstellung

Stützstellendarstellung von Polynom

Sei A Polynom mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$. Die
Stützstellendarstellung von A ist eine Menge von n
Stützstellenpaaren

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

mit x_k paarweise verschieden für $k = 0, \dots, n - 1$ sowie

$$y_k = A(x_k).$$

- Die Stützstellendarstellung ist nicht eindeutig
 - jede Menge von verschiedenen Punkten x_0, \dots, x_{n-1} kann
verwendet werden

Notizen

10

Auswertung

Sei A Polynom mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$.

- **Konversion** von Koeffizientendarstellung in Stützstellendarstellung erfolgt mittels **Auswertung**:
 - wähle Stützstellen x_0, \dots, x_{n-1}
 - werte $A(x_k)$ aus für $k = 0, \dots, n - 1$
- Auswertung von n Stützstellen mit Horner-Schema: $\Theta(n^2)$
- später: Auswertung mittels FFT: $\Theta(n \log n)$

Notizen

11

Interpolation

Eindeutigkeit interpolierendes Polynom

Für jede Menge von n Stützstellenpaaren

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

mit paarweise verschiedenen x_k existiert **genau ein Polynom** $A(x)$ mit Gradschranke n , so daß gilt

$$y_k = A(x_k) \quad \text{für } k = 0, \dots, n - 1.$$

- **Konversion** von Stützstellendarstellung in Koeffizientendarstellung heißt **Interpolation**.

Notizen

12

Interpolation: Beweiseidee

- Ähnlich zu Least Squares Problemen kann Matrix-Gleichung aufgestellt werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{=:V(x_0, \dots, x_{n-1})} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:a} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:y}$$

- $V(x_0, \dots, x_{n-1})$ heißt **Vandermonde-Matrix**
- da x_k paarweise verschieden ist

$$\det V(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq j < k \leq n-1} (x_k - x_j) \neq 0$$

- also ist $V(x_0, \dots, x_{n-1})$ invertierbar und

$$a = V(x_0, \dots, x_{n-1})^{-1}y$$

ist die Koeffizientendarstellung von A .

Notizen

13

Interpolation: Algorithmen

Sei A Polynom mit n Stützstellenpaaren $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$

- Berechnung mit **LUP-Zerlegung**:
 - $V(x_0, \dots, x_{n-1})a = y \Leftrightarrow L U a = P y$
 - Aufwand: $\Theta(n^3)$
- Berechnung mit **Lagrange-Interpolationsformel**:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

- Aufwand: $\Theta(n^2)$
- später: Berechnung mit IFFT: $\Theta(n \log n)$

Notizen

14

Addition von Polynomen

Seien A, B Polynome mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$.

- Stützstellendarstellung für A :

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$$

- Stützstellendarstellung für B mit **selben** x_k :

$$\{(x_0, y'_0), \dots, (x_{n-1}, y'_{n-1})\}$$

- Stützstellendarstellung für $C(x) = A(x) + B(x)$:

$$\{(x_0, y_0 + y'_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1} + y'_{n-1})\}$$

- Aufwand: $\Theta(n)$

Notizen

15

Multiplikation von Polynomen

Seien A, B Polynome mit Gradschranke $n \in \mathbb{N}$.

- Produkt $C(x) = A(x)B(x)$ hat Gradschranke $2n$
 - benötigt $2n$ Stützstellen
 - erweitere Darstellung von A, B auf $2n$ Stützstellen vor Multiplikation

- Stützstellendarstellungen für A, B :

$$\{(x_0, y_0), \dots, (x_{2n-1}, y_{2n-1})\}$$

$$\{(x_0, y'_0), \dots, (x_{2n-1}, y'_{2n-1})\}$$

- Stützstellendarstellung für $C(x)=A(x)B(x)$:

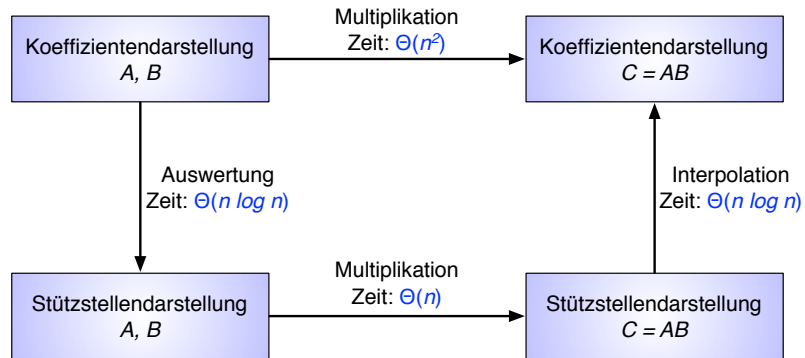
$$\{(x_0, y_0 y'_0), \dots, (x_{2n-1}, y_{2n-1} y'_{2n-1})\}$$

- Aufwand: $\Theta(n)$

Notizen

16

Effiziente Multiplikation von Polynomen



- Multiplikation von Polynomen in Koeffizientendarstellung via Stützstellendarstellung: $\Theta(n \log n)$
- Auswertung und Interpolation mit FFT/IFFT

17

Notizen

Komplexe Einheitswurzeln

Komplexe Einheitswurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **komplexe n -te Einheitswurzel** ist eine Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ mit

$$\omega^n = 1.$$

- Es gibt n komplexe n -te Einheitswurzeln: $e^{2\pi ik/n}$ für $k = 0, \dots, n-1$.

n -te Haupteinheitswurzel

Die Zahl $\omega_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\omega_n = e^{2\pi i/n}$$

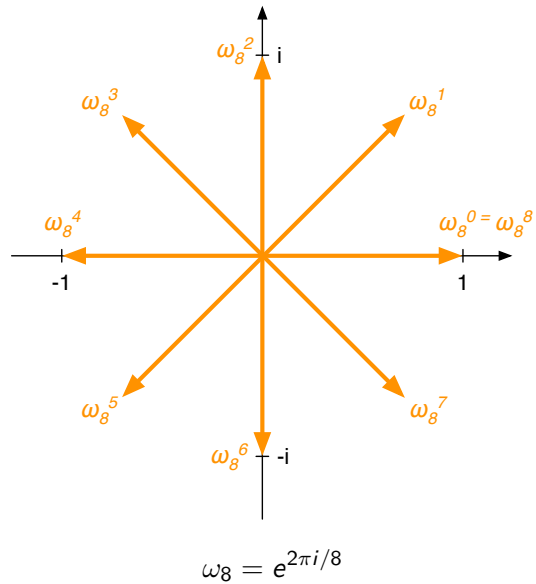
heißt **n -te Haupteinheitswurzel**.

- Die anderen komplexen n -ten Einheitswurzeln sind Potenzen von ω_n .

18

Notizen

Beispiel: die komplexen 8-ten Einheitswurzeln



Notizen

19

Diskrete Fourier Transformation

Diskrete Fourier Transform

Sei A Polynom mit Gradschranke n und Koeffizienten $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$,

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

Die Auswertung von A an den Stellen $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$, d.h.

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

für $k = 0, \dots, n-1$, heißt **Diskrete Fourier Transformation** des Koeffizientenvektors a . Kurz notiert auch als

$$y = DFT_n(a)$$

mit $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$.

Notizen

20

Diskrete Fourier Transformation

- Aufwand der DFT: $\Theta(n^2)$
- zur Multiplikation von Polynomen benötigen wir tatsächlich $2n$ Koeffizienten statt n
- Zur effizienten Berechnung der DFT verwenden wir einen Divide & Conquer Ansatz \rightarrow FFT

Notizen

21

Eigenschaften komplexer Einheitswurzeln

Halbierungslemma

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade Zahl. Dann gilt für $k = 0, \dots, n - 1$

$$(\omega_n^k)^2 = \omega_{n/2}^k = (\omega_n^{k+n/2})^2.$$

Beweis-Idee:

- Es ist $(\omega_n^k)^2 = (e^{2\pi i k/n})^2 = (e^{2\pi i \cdot 2/n})^k = \omega_{n/2}^k$

• Ausserdem:

$$(\omega_n^{k+n/2})^2 = \omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k} \omega_n^n = \omega_n^{2k} = (\omega_n^k)^2$$

Notizen

22

DFT mit Divide and Conquer 1

Sei A Polynom mit Koeffizienten $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

- **Annahme:** n sei eine Zweier-Potenz ($n = 2^m$)
- **Divide-Schritt:** teile A auf entlang Koeffizienten mit geradem und ungeradem Index in $A^{[0]}$ und $A^{[1]}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j} x^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} x^{2j+1} \\ &= A^{[0]}(x^2) + A^{[1]}(x^2+1) \end{aligned}$$

- **Conquer-Schritt:** es gilt

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Notizen

23

DFT mit Divide and Conquer 2

Auswertung von $A(x)$ für $x = \omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ also berechnet als:

- **Divide:** werte $A^{[0]}$ und $A^{[1]}$ mit Gradschranke $n/2$ aus an

$$(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \dots, (\omega_n^{n-1})^2$$

Laut Halbierungslemma sind das nur $n/2$ verschiedene Einheitswurzeln!

- **Rekursion:** weitere Aufteilung der Polynome in kleinere Probleme
- **Conquer:** führe Ergebnisse zusammen

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Der Divide Schritt halbiert also (gemäß Halbierungslemma) die Problemgröße, und eine DFT_n wird mittels 2 $DFT_{n/2}$ berechnet.

Notizen

24

Algorithmus: FFT (rekursiv)

Input: Vektor $a = (a_0, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ Zweier-Potenz

Output: $DFT_n(a)$

FFTrekursiv(a):

```
1  if (n == 1) return a;
2   $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ ;
3   $\omega = 1$ ;
4   $a^{[0]} = (a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$ ;
5   $a^{[1]} = (a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1})$ ;
6   $y^{[0]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[0]})$ ; // divide
7   $y^{[1]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[1]})$ ;
8  for k = 0 to n/2 - 1 { // conquer
9     $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ ;
10    $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ ;
11    $\omega = \omega \omega_n$ ; //  $\omega = \omega_n^k$ 
12 }
13 return y;
```

Notizen

25

FFT (rekursiv): Korrektheit und Laufzeit 1

- Zeile 1: DFT von einem Element ist das Element selbst,

$$y_0 = a_0 \omega_1^0 = a_0 \cdot 1 = a_0$$

- Zeilen 6/7: wegen Halbierungslemma ist

$$y_k^{[0]} = A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) = A^{[0]}(\omega_n^{2k})$$

$$y_k^{[1]} = A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) = A^{[1]}(\omega_n^{2k})$$

- Zeile 9: berechnet $y_0, y_1, \dots, y_{n/2-1}$ da

$$y_k = y_k^{[0]} + \omega_n^k y_k^{[1]} = A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_n^{2k}) = A(\omega_n^k)$$

Notizen

26

FFT (rekursiv): Korrektheit und Laufzeit 2

- Zeile 10: berechnet $y_{n/2}, y_{n/2+1}, \dots, y_{n-1}$ da

$$y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega_n^k y_k^{[1]} = y_k^{[0]} + \omega_n^{k+n/2} y_k^{[1]}$$

da $\omega_n^{n/2} = -1$ und damit $\omega_n^{k+n/2} = -\omega_n^k$, und somit weiter

$$\begin{aligned} y_{k+n/2} &= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k}) \\ &= A^{[0]}(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+n/2} A^{[1]}(\omega_n^{2k+n}) = A(\omega_n^{k+n/2}) \end{aligned}$$

da $\omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k}$.

- also tatsächlich $y = DFT_n(a)$
- Laufzeit: ohne Rekursion $\Theta(n)$, Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Notizen

27

Interpolation mit komplexen Einheitswurzeln

Sei A Polynom mit Koeffizienten $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$.

- DFT lässt sich auch als Matrix-Gleichung mit Vandermonde-Matrix V_n mit ω_n -Potenzen als Einträge:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}}_{=:V_n} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=a}$$

- Inverse Operation $a = V_n^{-1}y$ entspricht Interpolation, auch geschrieben als

$$a = IDFT_n(y)$$

Notizen

28

Inverse Diskrete Fourier Transformation

- Es ist also $IDFT_n(y) = V_n^{-1}y$
- V_n^{-1} hat Einträge ω_n^{-kj}/n an Stelle (j, k) für $j, k = 0, \dots, n-1$
- $IDFT_n(y)$ ist also für $j = 0, \dots, n-1$

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}$$

- IFFT lässt sich aus FFT gewinnen durch
 - vertauschen von a und y
 - ersetzen von ω_n durch ω_n^{-1}
 - jedes Element mit $\frac{1}{n}$ multiplizieren
- IFFT Laufzeit also auch $\Theta(n \log n)$

Notizen

Faltungstheorem

Faltungstheorem

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n = 2^m$. Dann ist

$$a * b = IDFT_{2n}(DFT_{2n}(a) \cdot DFT_{2n}(b))$$

- a, b müssen mit Nullen zur Länge $2n$ aufgefüllt werden
- \cdot ist das komponentenweise Produkt zweier Vektoren
- Gesamtlaufzeit: $\Theta(n \log n)$

Notizen

Algorithmus: FFT (rekursiv)

Input: Vektor $a = (a_0, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ Zweier-Potenz

Output: $DFT_n(a)$

FFTrekursiv(a):

```
1  if (n == 1) return a;
2   $\omega_n = e^{2\pi i/n}$ ;
3   $\omega = 1$ ;
4   $a^{[0]} = (a_0, a_2, a_4, \dots, a_{n-2})$ ;
5   $a^{[1]} = (a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1})$ ;
6   $y^{[0]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[0]})$ ; // divide
7   $y^{[1]} = \text{FFTrekursiv}(a^{[1]})$ ;
8  for k = 0 to n/2 - 1 { // conquer
9     $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$ ;
10    $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$ ;
11    $\omega = \omega \omega_n$ ; //  $\omega = \omega_n^k$ 
12 }
13 return y;
```

Notizen

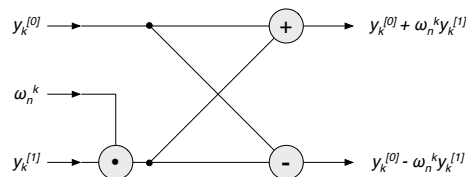
31

FFT effizienter

- **FFTrekursiv** berechnet in Zeile 9,10 zweimal $\omega y_k^{[1]}$
- effizienter mit Hilfsvariable t :

```
for k = 0 to n/2 - 1 {
  t =  $\omega y_k^{[1]}$ ;
   $y_k = y_k^{[0]} + t$ ;
   $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - t$ ;
   $\omega = \omega \omega_n$ ;
}
```

- dieses Schema ist bekannt als **Butterfly-Operation**:



Notizen

32

FFT: weitere Optimierungen

Zusätzlich zu Butterfly-Operationen:

- Entrekursivierung möglich mittels Bitreversierung
- Komplexität immer noch $\Theta(n \log n)$, aber kleinere Konstanten
- Implementierung als parallele Schaltkreise möglich

Notizen

33

FFT: Ausblick

- bisher behandelt: eindimensionale DFT
- auch möglich: mehrdimensionale DFT

Notizen

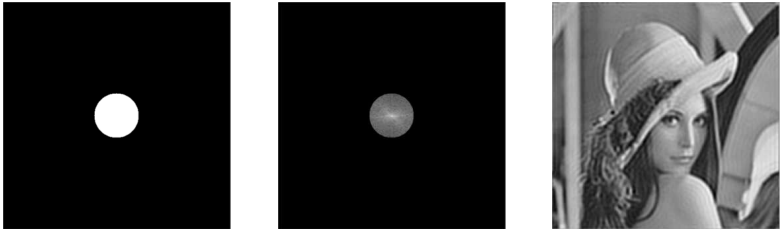
34

FFT: Beispiel 1



Original

DFT



Filter

Filter·DFT

IDFT(Filter·DFT)

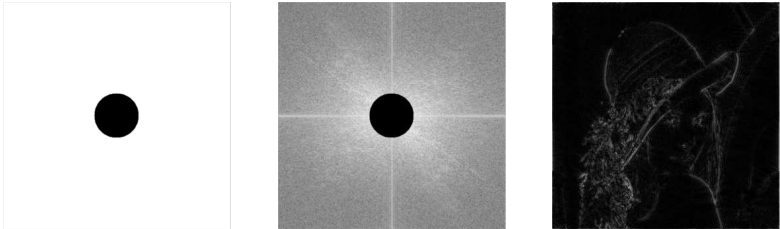
Notizen

FFT: Beispiel 2



Original

DFT



Filter

Filter·DFT

IDFT(Filter·DFT)

Notizen

Zusammenfassung

- 7 Fortgeschrittene Datenstrukturen
- 8 Such-Algorithmen
- 9 Graph-Algorithmen
- 10 Numerische Algorithmen
 - Matrizen
 - Lineare Gleichungen
 - Die LUP-Zerlegung
 - Least Squares Probleme
 - Fast Fourier Transformation

Notizen

Notizen
