

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Such-Algorithmen

Gegeben sei eine Menge M von Objekten. Ein **Such-Algorithmus** sucht in M nach Mustern oder nach Objekten mit bestimmten Eigenschaften.

Beispiele:

- Suche von Adresse von Person in Telefonbuch
- Suche nach Webseite mit Google Search
- Suche nach Produkt auf Amazon
- Suche nach ähnlichen Mustern: Viren-Scanner
- Suche nach Mustern: Bilderkennung
- Suche nach Tumoren in medizinischen Bildern von Patienten

Lineare Suche

Gegeben sei Array A der Länge n , das Such-Schlüssel enthält.

- **einfachster Such-Algorithmus:** Durchlaufen des Feldes A bis gewünschter Schlüssel gefunden
- auch genannt: **Lineare Suche**
- **Algorithmus:**

Input: Array $A[1..n]$ mit Schlüsseln, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

linearSearch(A, k):

```
i = 1;
while ( (A[i] != k) && (i <= n) ) {
    i = i + 1;
}
if (i <= n) return i; // fündig geworden
else return 0; // nichts gefunden
```

- auch anwendbar für verkettete Listen

Lineare Suche: Komplexität

5	7	3	9	11	2
---	---	---	---	----	---

Laufzeit $T(n)$ von `linearSearch`:

- **best-case**: sofort gefunden, $T(n) = 1$, d.h. $T(n) = O(1)$
- **worst-case**: alles durchsuchen, $T(n) = n$, d.h. $T(n) = O(n)$
- **im Mittel**: Annahme jede Anordnung der Such-Schlüssel ist gleich wahrscheinlich:

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$$

d.h. $T(n) = O(n)$

- einfacher Algorithmus, aber nicht besonders effizient

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Binäre Suche

2	3	5	7	9	11
---	---	---	---	---	----

Gegeben sei Array A der Länge n, das Such-Schlüssel enthält.

- falls häufiger gesucht wird: Array A **vorsortieren!** $O(n \log n)$
- Such-Algorithmus mittels **Divide & Conquer**
Algorithmen-Muster:
 - **Divide:** vergleiche mittleres Element mit gesuchtem
 - **Rekursion:** falls kleiner, Rekursion auf linker Hälfte
 - **Rekursion:** falls grösser, Rekursion auf rechter Hälfte
 - **Conquer:** falls gleich, liefere Ergebnis

Binäre Suche: Algorithmus rekursiv

Input: Array $A[1..n]$ sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel
low, high: unterer/oberer Index von aktueller Array-Hälfte

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

binarySearch($A, k, low, high$):

if ($low > high$) return 0; // nichts gefunden

middle = $\lfloor (low + high) / 2 \rfloor$;

if ($A[middle] == k$) return middle; // fündig geworden

if ($A[middle] > k$)

return **binarySearch**($A, k, low, middle-1$);

else

return **binarySearch**($A, k, middle+1, high$);

- erster Aufruf mit **binarySearch**($A, k, 1, n$)

Binäre Suche: Algorithmus iterativ

Input: Array $A[1..n]$ sortierter Schlüssel, k gesuchter Schlüssel

Output: Index i mit $A[i] = k$ (sonst 0)

binarySearchIterative(A, k):

low = 1;

high = n;

while (low <= high) {

middle = $\lfloor (low + high) / 2 \rfloor$;

if ($A[middle] == k$) **return** middle; // fündig geworden

if ($A[middle] > k$)

high = middle - 1;

else

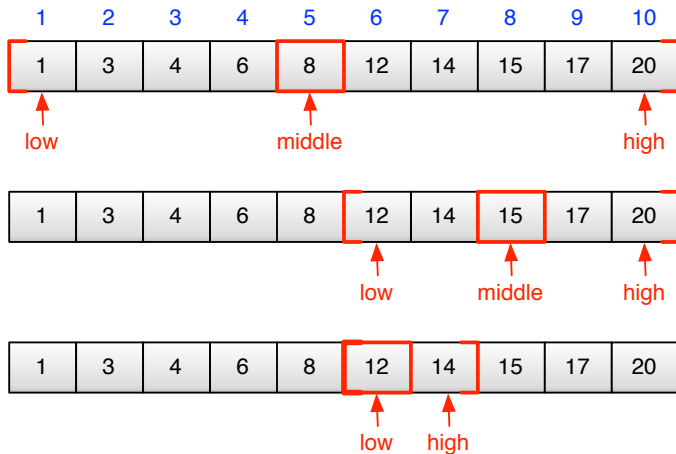
low = middle + 1;

}

return 0; // nichts gefunden

Binäre Suche: Beispiel

- Gesucht: Schlüssel 12



Binäre Suche: Komplexität

- Komplexität: $O(\log n)$
 - errechnet z.B. via Rekursionsbaum wie bei MergeSort
- Beispiel-Laufzeiten:

Algorithmus	$n = 10$	$n = 1000$	$n = 10^6$
Lineare Suche ($n/2$)	≈ 5	≈ 500	≈ 500.000
Binäre Suche ($\log_2 n$)	≈ 3.3	≈ 9.9	≈ 19.9

- sehr effizienter Such-Algorithmus!
- falls sich Daten oft ändern, muss jeweils neu sortiert werden
 - besser: Suchbäume

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Binärer Suchbaum

Definition binärer Suchbaum

Sei $G = (V, E)$ ein **Binärbaum** mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch \leq, \geq geordnet.

G heißt **binärer Suchbaum**, falls für alle **inneren Knoten** $v \in V$ gilt

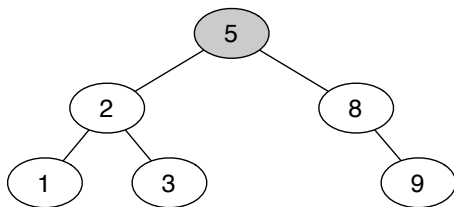
- für alle Knoten x im **linken Teilbaum** $v.left$ gilt

$$key(x) \leq key(v)$$

- für alle Knoten y im **rechten Teilbaum** $v.right$ gilt

$$key(y) \geq key(v)$$

Binärer Suchbaum: Beispiel



- binärer Baum muss **nicht vollständig** sein!
- Repräsentation üblicherweise mit verketteter Liste (geht aber auch als sequentielle Liste)

Binärer Suchbaum: Operationen

Operationen auf binärem Suchbaum:

- **Suchen:** finde Element mit Schlüssel k
- **Minimum/Maximum:** finde Element mit minimalem/
maximalem Schlüssel
- **Einfügen:** füge Element zum Suchbaum hinzu
- **Löschen:** entferne Element aus Suchbaum

Binärer Suchbaum: Suchen (rekursiv)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

search(v , k):

```
if ( $v == \text{null}$ ) return null; // hier gibt es nichts!
```

```
if ( $\text{key}(v) == k$ ) return  $v$ ; // fündig geworden!
```

```
if ( $k < \text{key}(v)$ )
```

```
    search( $v.\text{left}$ ,  $k$ );
```

```
else
```

```
    search( $v.\text{right}$ ,  $k$ );
```

- erster Aufruf mit **search**(w , k)
- falls v kein linkes/rechtes Kind hat, ist das durch null markiert

Binärer Suchbaum: Suchen (iterativ)

Input: Knoten v , dessen Teilbaum untersucht werden soll,
 k gesuchter Schlüssel

Output: Knoten mit gesuchtem Schlüssel,
null falls nicht gefunden

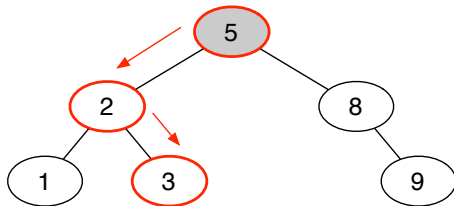
searchIterative(v , k):

```
while ( ( $v \neq \text{null}$ ) && ( $\text{key}(v) \neq k$ ) ) {  
    if ( $k < \text{key}(v)$ )  
         $v = v.\text{left}$ ;  
    else  
         $v = v.\text{right}$ ;  
}  
return  $v$ ;
```

- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Suchen

- **Beispiel:** suche Schlüssel 3



Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum

Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

Output: Knoten mit **minimalem** Schlüssel

minimum(v):

```
while ( $v.left \neq \text{null}$ )
```

```
     $v = v.left$ ;
```

```
return  $v$ ;
```

Input: Wurzel v des zu durchsuchenden Baumes

Output: Knoten mit **maximalem** Schlüssel

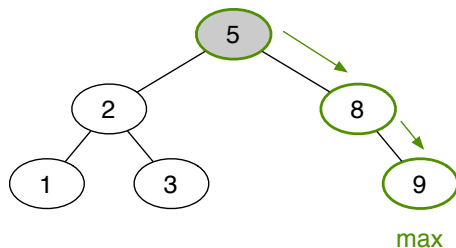
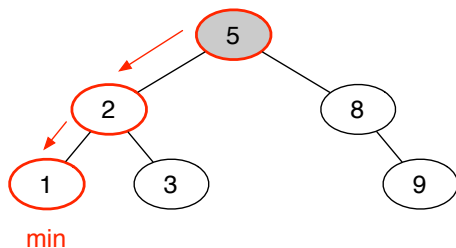
maximum(v):

```
while ( $v.right \neq \text{null}$ )
```

```
     $v = v.right$ ;
```

```
return  $v$ ;
```

Binärer Suchbaum: Minimum/Maximum



- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Einfügen

Input: Wurzel v des Baumes, x einzufügendes Element

insert(v, x):

```
if ( $v == \text{null}$ ) { // Baum leer
```

```
     $v = x$ ; return;
```

```
}
```

```
while ( $v \neq \text{null}$ ) {
```

```
    hilfsKnoten =  $v$ ;
```

```
    if ( $\text{key}(x) < \text{key}(v)$ )
```

```
         $v = v.\text{left}$ ;
```

```
    else
```

```
         $v = v.\text{right}$ ;
```

```
}
```

```
 $x.\text{vater} = \text{hilfsKnoten}$ ;
```

```
if ( $\text{key}(x) < \text{key}(\text{hilfsKnoten})$ )
```

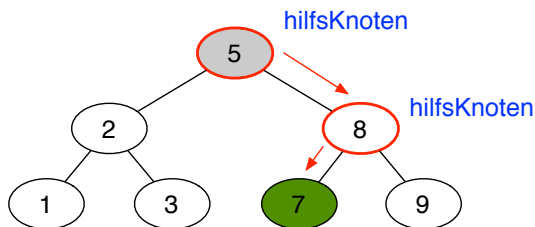
```
     $\text{hilfsKnoten}.\text{left} = x$ ;
```

```
else
```

```
     $\text{hilfsKnoten}.\text{right} = x$ ;
```

Binärer Suchbaum: Einfügen

- Einfügen von Knoten mit Schlüssel 7:



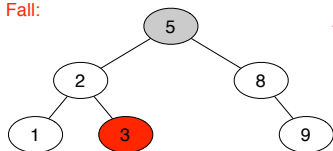
- Komplexität: $O(h)$, wobei h Höhe von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Löschen

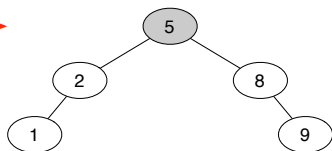
- Löschen von Knoten x in Suchbaum ist etwas komplizierter
- Drei Fälle:
 - ① x ist Blatt: einfach entfernen
 - ② x hat nur ein Kind: setze Kind an Stelle von x
 - ③ x hat zwei Kinder: setze **minimales** Element von **rechtem** Teilbaum an Stelle von x
(alternativ: maximales Element von linkem Teilbaum)
- Komplexität: $O(h)$, wobei h **Höhe** von Suchbaum

Binärer Suchbaum: Löschen

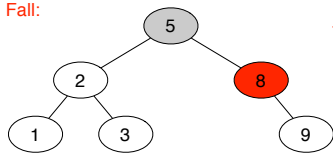
1. Fall:



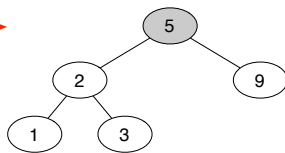
erase →



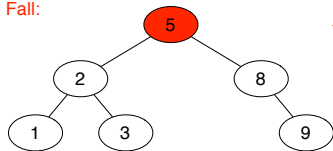
2. Fall:



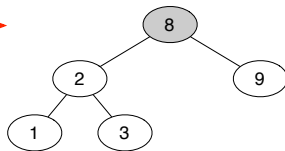
erase →



3. Fall:



erase →



Binärer Suchbaum: Löschen

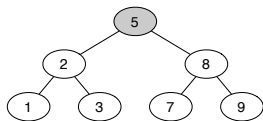
Input: Wurzel v des Baumes, x zu löschendes Element

erase(v, x):

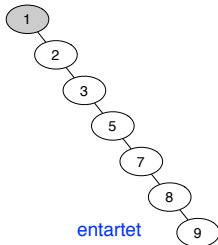
```
if (x ist Blatt) { // 1. Fall
  if (x ist linkes Kind) x.vater.left = null;
  else x.vater.right = null;
} else { // 2. Fall
  if (x.left == null) {
    if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.right;
    else x.vater.right = x.right;
  } else {
    if (x.right == null) {
      if (x ist linkes Kind) x.vater.left = x.left;
      else x.vater.right = x.left;
    } else { // 3. Fall
      kind = minimum(x.right);
      ersetze x durch kind;
    }
  }
}
```

Binärer Suchbaum: Effizienz

- Suchbäume mit n Knoten sind sehr effizient
 - aber nur wenn sie ausgeglichen (“balanciert”) sind!
- best-case Komplexität: $O(\log n)$
- worst-case Komplexität: $O(n)$



ausgeglichen



entartet

- Ausweg: automatisch balancierte Suchbäume (z.B. AVL Bäume, Rot-Schwarz Bäume, B-Bäume)

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

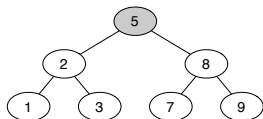
Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

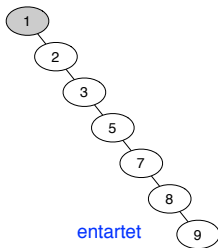
Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Entartete Suchbäume



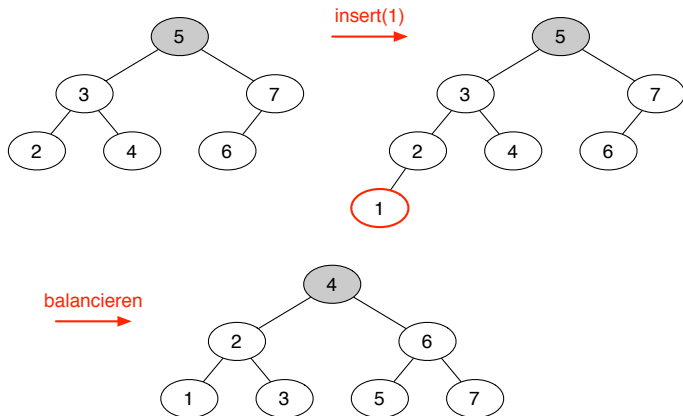
ausgeglichen



entartet

- Wie können Suchbäume **entarten**?
 - Beispiel: einfügen aus sortierter Liste
- **Erwünscht**: Suchbäume, die immer **ausgeglichen** (balanciert) bleiben
 - **AVL-Bäume**, Rot-Schwarz-Bäume, B-Bäume etc.

Beispiel: Balancieren von Suchbaum



- hier müssen zum Balancieren **alle** Knoten bewegt werden → Effizienz-Problem

Ansätze für balancierte Suchbäume

- Binärbaum und gleichzeitig balanciert ist ineffizient
- Idee: Aufweichen eines der beiden Kriterien!

- **Abschwächung** des Kriteriums **balanciert**
 - Beispiel: AVL-Bäume

- **Abschwächung** des Kriteriums **Binärbaum**
 - Mehrweg-Bäume, Beispiel: B-Bäume
 - mehrere Verzweigungen kodiert als Binärbaum, Beispiel: Rot-Schwarz-Bäume

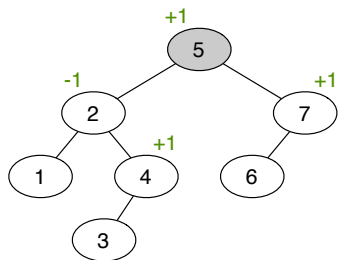
Definition AVL-Baum

Definition AVL-Baum

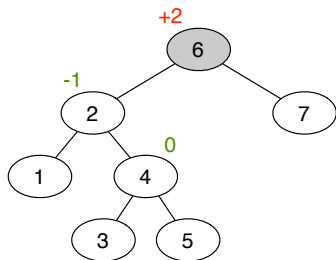
Ein binärer Suchbaum $G = (V, E)$ mit Wurzel $w \in V$ heißt **AVL-Baum**, falls er die **AVL-Bedingung** erfüllt:

- für jeden inneren Knoten $v \in V$ gilt: Höhe von linkem und rechtem Teilbaum von v unterscheidet sich maximal um 1.
- benannt nach G.M. Adelson-Velskii und E.M. Landis (russische Mathematiker)
- AVL-Bedingung nur für Wurzel w ist nicht ausreichend
 - beide Teilbäume der Wurzel können entartet sein

AVL-Baum: Beispiel



AVL-Baum



kein AVL-Baum!

- linkes Beispiel: AVL-Bedingung überall erfüllt
- rechtes Beispiel: AVL-Bedingung in Wurzel verletzt

AVL Baum: Operationen

- Operationen `search`, `minimum`, `maximum` unverändert von binärem Suchbaum
- Operationen `insert`, `erase` müssen verändert werden, damit die AVL-Bedingung erhalten wird

AVL-Baum: Einfügen

Einfüge-Operation bei AVL-Baum:

- **insert** wie in binärem Suchbaum
- nun kann AVL-Bedingung verletzt sein:
 - $balance = \text{height}(\textit{left}) - \text{height}(\textit{right})$
 - AVL-Bedingung: $balance \in \{-1, 0, +1\}$
 - nach **insert**: $balance \in \{-2, -1, 0, 1, +2\}$
- reparieren der AVL-Bedingung mittels **Rotation** und **Doppelrotation**

Einfügen / Verletzung AVL-Bedingung

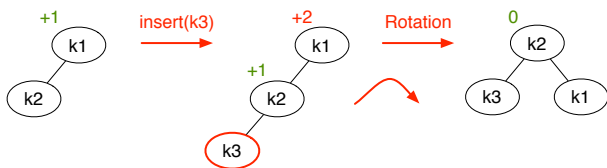
Fallunterscheidung Verletzung AVL-Bedingung bei Einfügen:

- ① Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes
- ② Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes
- ③ Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes
- ④ Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes

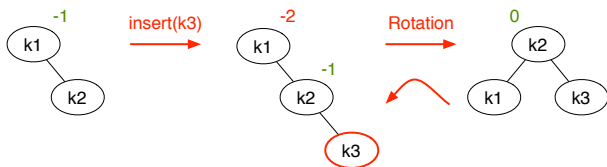
1 und 4 sind symmetrische Fälle, sowie 2 und 3

AVL-Baum: Rotation

- 1 Einfügen in linken Teilbaum des linken Kindes:

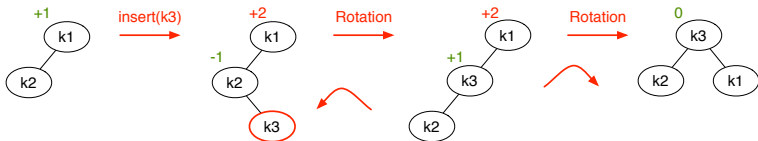


- 4 Einfügen in rechten Teilbaum des rechten Kindes:

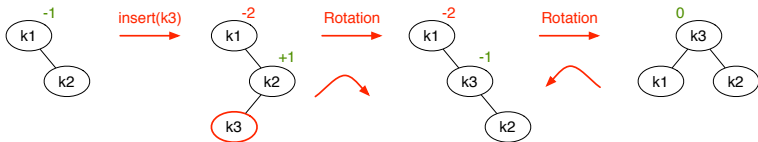


AVL-Baum: Doppelrotation

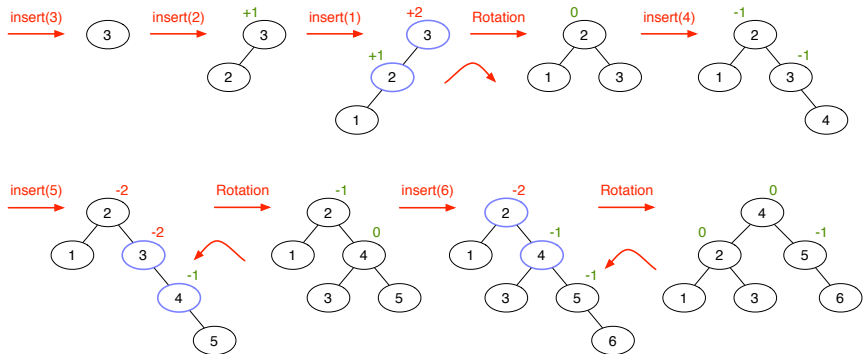
2 Einfügen in rechten Teilbaum des linken Kindes:



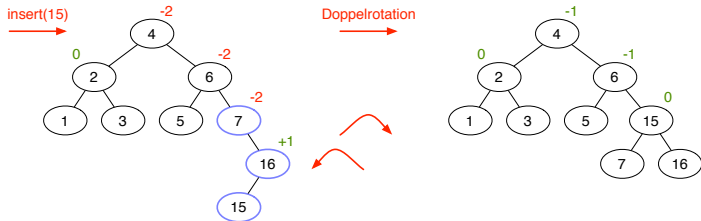
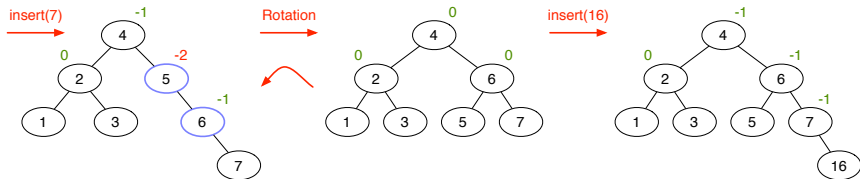
3 Einfügen in linken Teilbaum des rechten Kindes:



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz I



AVL-Baum: Beispiel-Sequenz II

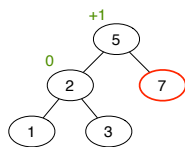


AVL-Baum: Löschen

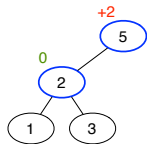
Löschen-Operation bei AVL-Baum:

- `erase` wie in binärem Suchbaum
- Verletzung der AVL-Bedingung in Teilbäumen durch Rotationen reparieren
- bei jedem Eltern-Knoten wieder AVL-Bedingungen reparieren, bis hin zur Wurzel

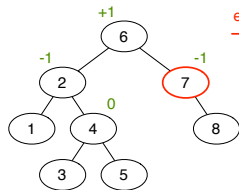
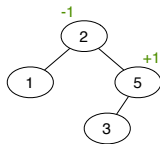
AVL-Baum: Beispiel-Sequenz III



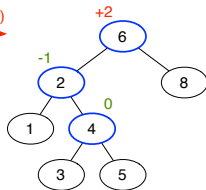
erase(7)



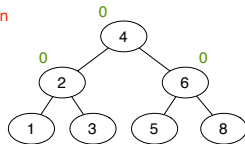
Rotation



erase(7)



Doppelrotation



Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2017

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München



Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Wörterbücher

Wörterbuch

Ein **Wörterbuch** (auch genannt Dictionary oder Assoziatives Array) speichert eine **Menge von Elementen** M . Jedes Element $e \in M$ wird durch einen **Schlüssel** $key(e)$ eindeutig identifiziert.

Unterstützte Operationen sind:

- **search(key k)**: finde $e \in M$ mit $key(e) = k$
- **insert(Element e)**: erweitere M um e
- **erase(key k)**: entferne e aus M , wobei $key(e) = k$

Beispiele:

- **Telefonbuch**
 - **Element**: Name, Adresse und Telefonnummer
 - **Schlüssel**: Name
- **Compiler-Symboltabelle**
 - **Element**: Bezeichner und Typ-/Speicher-Informationen
 - **Schlüssel**: Bezeichner

Such-Algorithmen für Wörterbücher

Sei M Wörterbuch mit $|M| = n$.

- M als verkettete Liste mit **linearer Suche**
 - **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$
- M als sortierte verkettete Liste mit **binärer Suche**
 - **search** $O(\log n)$, **insert** $O(n)$, **erase** $O(\log n)$
- M als **AVL-Suchbaum**
 - **search** $O(\log n)$, **insert** $O(\log n)$, **erase** $O(\log n)$
- M als **Hashtabelle**
 - **search** $O(1)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(1)$ **im Mittel!**
 - Worst case: **search** $O(n)$, **insert** $O(1)$, **erase** $O(n)$

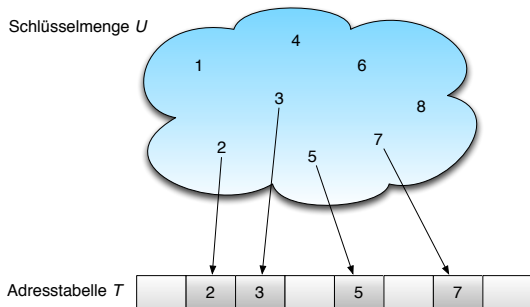
Adresstabellen

Sei M Wörterbuch.

- Setze $U := \{key(e) : e \in M\}$ als Menge aller Schlüssel
- Annahme: $key(e_1) \neq key(e_2)$ für alle $e_1 \neq e_2, e_1, e_2 \in M$

Wörterbuch mit Adresstabelle:

- sequentielle Liste T der Länge $|U|$



Operationen auf Adresstabellen

Adresstabelle T mit Länge $|U|$.

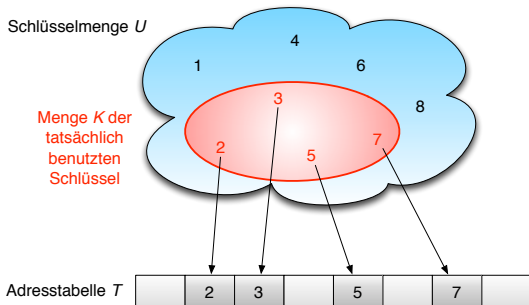
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
Output: Element mit Schlüssel k
search(T, k):
 return $T[k]$;
- **Input:** Tabelle T , Element e
insert(T, e):
 $T[\text{key}(e)] = e$;
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
erase(T, k):
 $T[k] = \text{null}$;

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$

Speicherkomplexität: $O(|U|)$ → Problem falls U groß!

Reduktion von Adresstabellen mittels Hashfunktion

- **Beobachtung:** Menge K der tatsächlich benutzten Schlüssel aus U oft klein

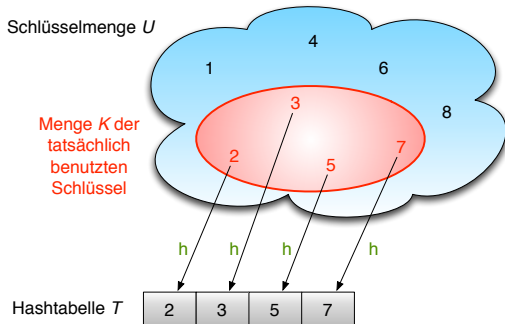


- **Idee:** wende **Hashfunktion** h auf $key(e)$ an, um Adresstabelle auf $|K|$ Elemente zu reduzieren \rightarrow **Hashtabelle**

Hashtabellen

Wörterbuch mit Hashtabelle:

- sequentielle Liste T mit Länge $m := |K|$
- Hashfunktion $h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$



Operationen auf Hashtabellen

Hashtabelle T mit Länge m und Hashfunktion h .

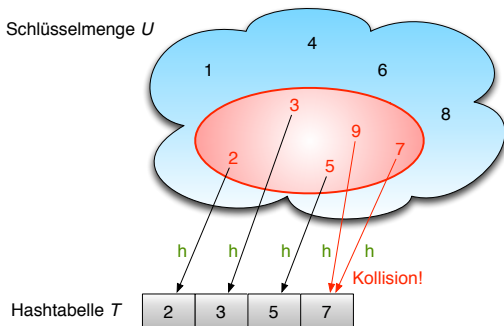
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
Output: Element mit Schlüssel k
search(T, k):
 return $T[h(k)];$
- **Input:** Tabelle T , Element e
insert(T, e):
 $T[h(\text{key}(e))] = e;$
- **Input:** Tabelle T , Schlüssel k
erase(T, k):
 $T[h(k)] = \text{null};$

Alle Operationen: Laufzeit $O(1)$ (sofern h auch $O(1)$)

Speicherkomplexität: $O(m)$

Kollisionen bei Hashtabellen

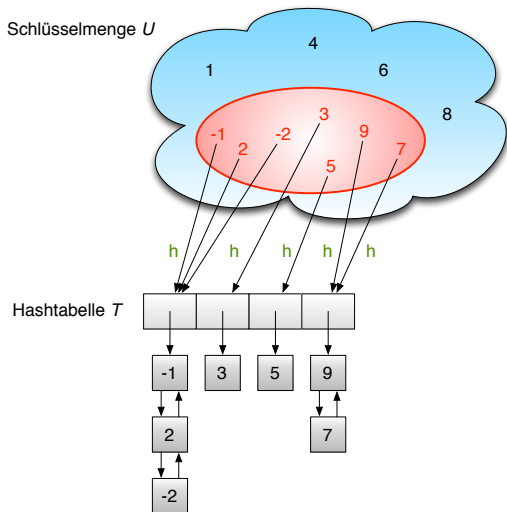
- **Problem:** falls h nicht injektiv \rightarrow **Kollision!**
 - h ist nie injektiv da $|K| < |U|$



- **Offene Fragen:**
 - Strategie zur Kollisionsauflösung
 - Wahl von h

Verkettung zur Kollisionauflösung

- jeder Slot in T enthält anstelle des Elements, die Referenz auf verkettete Liste
- bei **Kollision**: füge Element am Anfang der Liste ein $\rightarrow O(1)$
- **search** und **erase** müssen nun die Liste durchlaufen $\rightarrow O(1)$ gefährdet!



Analyse von Hashing mit Verkettung

Sei T Hashtabelle mit m Slots und n gespeicherten Elementen.

- **Belegungsfaktor** $\alpha = n/m$
 - mittlere Anzahl von Elementen in verketteten Listen
- es kann gezeigt werden:
Anzahl der Listendurchläufe ist $O(1+\alpha)$
- Annahme: es ist $n = cm$ mit c Konstante, dann
 $\alpha = n/m = O(m)/m = O(1)$
- Komplexität von **search** und **erase**:
 - im Mittel: $O(1)$
 - worst case: $O(n)$

Hashfunktionen

Sei U Menge aller Schlüssel, T Hashtabelle mit m Einträgen.

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

- **Anforderungen** an Hashfunktion:
 - einfache Auswertung $O(1)$
 - möglichst wenige Kollisionen
- viele Ansätze, zum Beispiel:
 - Divisionsmethode
 - Multiplikationsmethode
 - universelles Hashing
- **Vereinbarung:** $U = \mathbb{N}_0$ zur Vereinfachung
 - Strings z.B. via ASCII Code auf Zahlen abbilden

Divisionsmethode

Divisionsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die **Divisionsmethode** wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}, \quad h(k) = k \bmod m.$$

- **Beispiel:** $m = 12$, $k = 100$, dann ist $h(k) = 4$.
- **Problem:** geschickte Wahl von m
 - eher schlecht ist $m = 2^p$ (wertet nur die untersten p Bits von k aus)
 - eher gut ist oft eine Primzahl, nicht nahe an Zweierpotenz
 - Beispiel: erwartete Anzahl von Einträgen in Hashtabelle: 2000, gewünschter Belegungsfaktor 3 $\rightarrow m = 701$ geeignete Primzahl

Multiplikationsmethode

Multiplikationsmethode

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Die **Multiplikationsmethode** wählt die Hashfunktion folgendermaßen:

$$h : U \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}, \quad h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor,$$

wobei $A \in (0, 1)$ Konstante.

- Vorschlag von Knuth: $A \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$
- typische Wahl: $m = 2^p$
- **Beispiel:** $m = 2^{14} = 16384$, $A = 2654435769/2^{32}$, und $k = 123456$, dann ist $h(k) = 67$.

Universelles Hashing

- **Problem:** für jede feste Hashfunktion gibt es Eingabesequenzen, die worst-case Laufzeit $O(n)$ verursachen
- **Lösung:**

Universelles Hashing

Sei $U = \mathbb{N}_0$ die Schlüsselmenge, sei T Hashtabelle mit m Einträgen. Sei \mathcal{H} eine endliche Menge von Hashfunktionen:

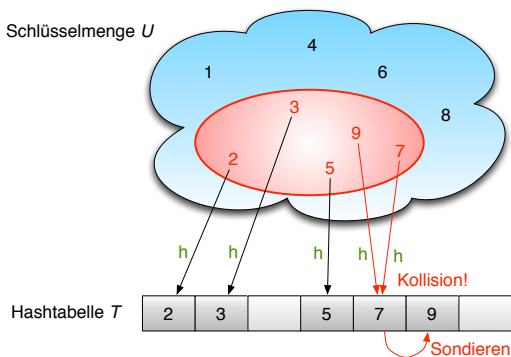
$$\mathcal{H} = \{h : U \rightarrow \{0, \dots, m-1\} \mid h \text{ Hashfunktion}\}.$$

\mathcal{H} heißt **universell**, falls für jedes Schlüsselpaar $k, l \in U$, $k \neq l$, die Anzahl der Hashfunktionen h mit $h(k) = h(l)$ durch $|\mathcal{H}|/m$ nach oben beschränkt ist.

- **Idee:** wähle zufällig ein $h \in \mathcal{H}$
- **Resultat:** Hashing mit Verkettung liefert im Mittel $O(1)$ Laufzeit der Wörterbuch-Operationen

Kollisionsauflösung mit offener Adressierung

- **Idee:** statt Verkettung bei Kollision, suche systematisch nächsten freien Platz in Hashtabelle → **Sondieren**



- **Probleme:**
 - Löschen von Elementen (**erase**) sehr problematisch
 - Falls Hashtabelle T voll, kein **insert** mehr möglich

Offene Adressierung

Sei U Schlüsselmenge, T Hashtabelle mit m Einträgen.

- erweitere Hashfunktion zu

$$h : U \times \{0, \dots, m - 1\} \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}$$

- fordere, daß **Sondierungssequenz**

$$(h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m - 1))$$

eine Permutation von $(0, \dots, m - 1)$ ist

→ jeder Slot in T ist mögliches Ziel für Schlüssel k

- viele mögliche Sondierungssequenzen, zum Beispiel:
 - lineares Sondieren
 - quadratisches Sondieren
 - doppeltes Hashing

Hashing: Ausblick

- nachträgliche **Änderung der Tabellengröße** aufwendig
 - erfordert neue Tabelle und neue Hashfunktion
 - Übertragen aller Elemente (und Berechnung neuer Hashfunktion) nötig
- ist U statisch, so ist **perfektes Hashing** möglich
 - auch im worst-case sind alle Operationen $O(1)$
 - umgesetzt durch zwei Ebenen von universellem Hashing
 - Zeitgewinn erkauft durch zusätzlichen Speicherbedarf von $O(n)$

Programm heute

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

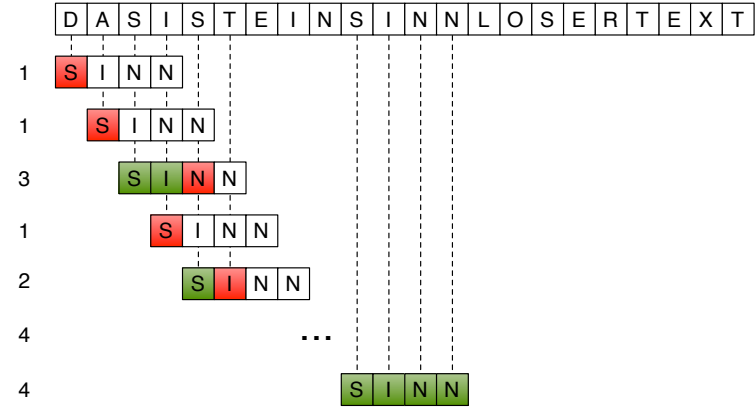
Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten

Suchen in Zeichenketten

- **Problem:** finde Teilwort in (langem) anderen Wort
- auch genannt: **String-Matching**
- Beispiele:
 - Suche Text in Textverarbeitung / Web-Browser
 - Suche Text in Dateien auf Festplatte (z.B. Spotlight, Windows Search)
 - Suche Text im Internet (z.B. Google)
- **Maß der Effizienz:** Anzahl der Vergleiche zwischen Buchstaben der Worte

Brute-Force Suche



16 Vergleiche

Notationen

- Zu durchsuchender Text:
 - $text[0..n - 1]$
 - Länge n
- gesuchtes Muster = Pattern:
 - $pat[0..m - 1]$
 - Länge m
- **Problem:** finde Position i , so daß $pat == text[i..i + m - 1]$

Brute-Force Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* Länge *n*,
gesuchtes Muster *pat* Länge *m*

Output: Index *i* von Match (oder -1 falls nicht gefunden)

bruteForceSearch(*text*, *pat*):

```
for i = 0 to n - m {  
    j = 0;  
    while ( (j < m) && (pat[j] == text[i + j] ) )  
        j = j + 1;  
    if (j ≥ m) return i; // fündig geworden  
}  
return -1; // nichts gefunden
```

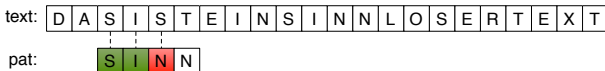
- Komplexität: $O((n - m)m) = O(nm)$

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus

Knuth-Morris-Pratt Algorithmus (kurz: *KMP*)

- **Idee:** verbessere Brute-Force Algorithmus durch Ausnutzung der bereits gelesenen Information bei einem Mismatch
- Mismatch an Stelle j von pat impliziert

$$pat[0..j - 1] == text[i..i + j - 1]$$



- **Vorverarbeitungsschritt:** analysiere vor Suche das Muster pat , speichere mögliche Überspringungen in **Feld *shift***

Alphabet und Wörter

Wörter

Ein **Alphabet** Σ ist eine endliche Menge von Symbolen. Ein **Wort** w der Länge n über Σ ist eine endliche Folge von Symbolen

$$w = w_1 \cdots w_n, \quad w_i \in \Sigma, \quad i = 1, \dots, n.$$

Beispiel:

- Alphabet $\Sigma = \{ a, \dots, z, A, \dots, Z \}$
 - Wörter: Daten, Algorithmen, aabb
 - keine Wörter: über, t35t
- Alphabet $\Sigma = \{ 0, \dots, 9, A, B, C, D, E, F \}$
 - Wörter: 09FF, ABC, A3E
 - keine Wörter: 1f, 1gH

Das **leere Wort** wird mit ε bezeichnet.

Präfix und Suffix von einem Wort

Präfix, Suffix

Sei $w = w_1 \cdots w_n$ Wort der Länge n über einem Alphabet Σ .

- Das Wort w' heißt **Präfix** von w , falls $w' = w_1 \cdots w_l$ für $0 \leq l \leq n$.
- Das Wort w' heißt **Suffix** von w , falls $w' = w_l \cdots w_n$ für $1 \leq l \leq n + 1$.

Beispiele für Wort $w = \text{Algorithmen}$:

- Präfixe von w sind: A, Alg, Algorit, Algorithmen
- Suffixe von w sind: n, men, gorithmen, Algorithmen

Rand von einem Wort

Rand

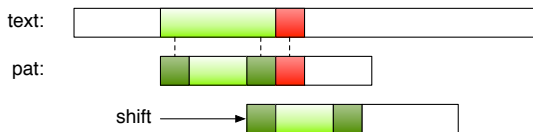
Sei w ein Wort über einem Alphabet Σ . Ein Wort r heißt **Rand** von w , falls r sowohl Präfix als auch Suffix von w ist.

Ein Rand r von w heißt **eigentlicher Rand**, wenn $r \neq w$ und wenn es außer w selbst keinen längeren Rand gibt. Der eigentliche Rand von w wird mit $\partial(w)$ bezeichnet.

Beispiel: Wort $w = \text{aabaabaa}$ hat folgende Ränder:

- ε
- a
- aa
- aabaa ← **eigentlicher Rand**
- aabaabaa = w

Überspringen beim Suchen



- **Idee:** verschiebe Pattern so, dass im bereits geprüften Bereich wieder Übereinstimmung herrscht
 - dazu müssen Präfix und Suffix dieses Bereichs übereinstimmen
→ **eigentlicher Rand**

Shift-Tabelle

Shift-Tabelle

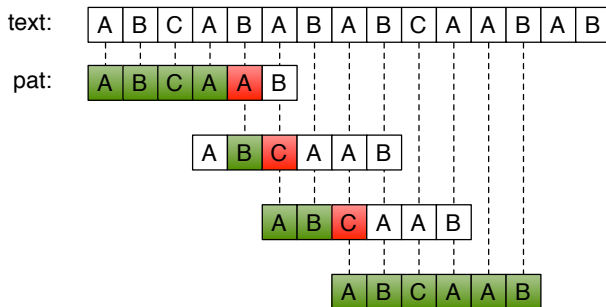
Sei $pat = s_0 \cdots s_{m-1}$ ein Wort der Länge m . Die **Shift-Tabelle von pat** gibt die Länge des eigentlichen Randes des Präfixes der Länge j von pat an. Sie hat folgende Gestalt:

$$shift[j] = \begin{cases} -1 & \text{für } j = 0 \\ |\partial(s_0 \cdots s_{j-1})| & \text{für } j \geq 1 \end{cases}$$

wobei $j = 0, \dots, m - 1$.

- Ist das Präfix der Länge j gematcht, und an Stelle j ein Mismatch, so ist der Shift $j - shift[j] > 0$ korrekt

KMP Algorithmus: Beispiel I



j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

KMP Algorithmus

Input: zu durchsuchender Text *text* der Länge *n*,
gesuchtes Muster *pat* der Länge *m*

Output: Index *i* von Match (oder -1 falls nicht gefunden)

KMPSearch(*text*, *pat*):

initShift(*pat*); // Initialisierung shift Tabelle, siehe später

i = 0; *j* = 0;

while (*i* ≤ *n* - *m*) {

while (*text*[*i* + *j*] == *pat*[*j*]) {

j = *j* + 1;

if (*j* == *m*)

return *i*; // fündig geworden

 }

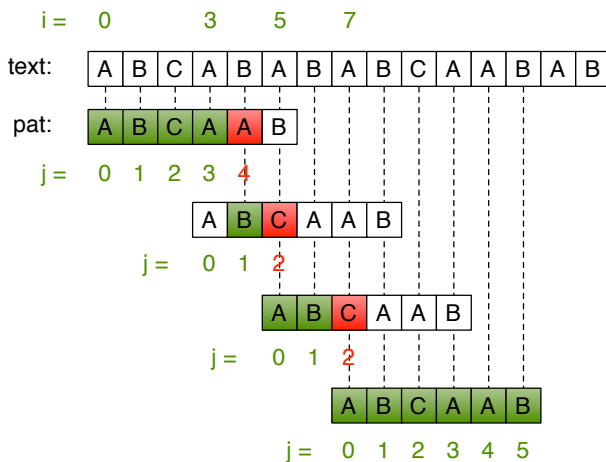
i = *i* + (*j* - *shift*[*j*]); // *j* - *shift*[*j*] ist immer > 0

j = max(0, *shift*[*j*]);

}

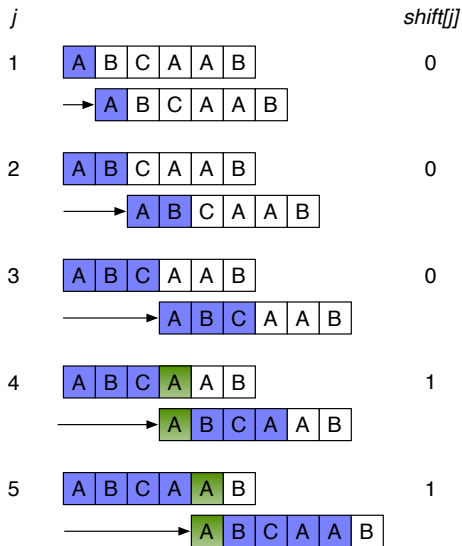
return -1; // war wohl nix

KMP Algorithmus: Beispiel II



j	0	1	2	3	4	5
$shift[j]$	-1	0	0	0	1	1

Shift Tabelle Beispiel I



KMP Algorithmus: Shift Tabelle

Input: Muster pat der Länge m

initShift(pat):

$shift[0] = -1;$

$shift[1] = 0;$

$i = 0;$

for $j = 2$ **to** m {

 // hier ist: $i == shift[j - 1]$

while ($i \geq 0$ && $pat[i] \neq pat[j - 1]$)

$i = shift[i];$

$i = i + 1;$

$shift[j] = i;$

}

KMP Algorithmus: Komplexität

Komplexität von KMP:

- KMPSearch:
 - erfolglose Vergleiche (äußere while-Schleife): maximal $n - m + 1$ Vergleiche
 - erfolgreiche Vergleiche (innere while-Schleife): insgesamt maximal n Vergleiche
 - insgesamt: maximal $2n - m + 1$ Vergleiche
- initShift:
 - erfolgreiche Vergleiche (for-Schleife): maximal $m - 1$ Vergleiche
 - erfolglose Vergleiche (while-Schleife): maximal m Vergleiche
 - insgesamt: maximal $2m - 1$ Vergleiche
- insgesamt: maximal $2n + m$ Vergleiche, also $O(n + m)$
- Platzbedarf: $O(m)$

Ausblick: Suchen in Zeichenketten

- Brute-Force Algorithmus
 - Komplexität: $O(mn)$
- Knuth-Morris-Pratt Algorithmus
 - Komplexität: $O(m + n)$
- Rabin-Karp Algorithmus: Suchen mit Hash-Funktion
 - Komplexität im Mittel: $O(m + n)$
 - Komplexität worst-case: $O(mn)$
- Boyer-Moore Algorithmus: Suchen rückwärts
 - Komplexität: $O(n)$
 - Komplexität best-case: $O(n/m)$
- Reguläre Ausdrücke mit endlichen Automaten
- Suche nach ähnlichen Zeichenketten

Zusammenfassung

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

7 Fortgeschrittene Datenstrukturen

8 Such-Algorithmen

Lineare Suche

Binäre Suche

Binäre Suchbäume

Balancierte Suchbäume

Suchen mit Hashtabellen

Suchen in Zeichenketten