

Lösungsvorschläge zur Musterklausur zu Algorithmen und Datenstrukturen

**Aufgabe 1 Sortieren mit Heap Sort**

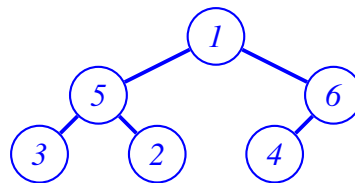
(12 Punkte)

Die sequentielle Liste

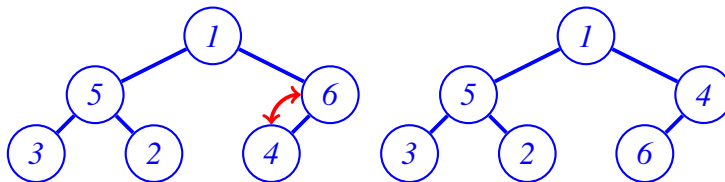
1, 5, 6, 3, 2, 4

soll mit (*Min*-)Heap Sort sortiert werden!

a) Geben Sie den Zustand der Liste während der **buildMinHeap** nach jedem **minHeapify** an!

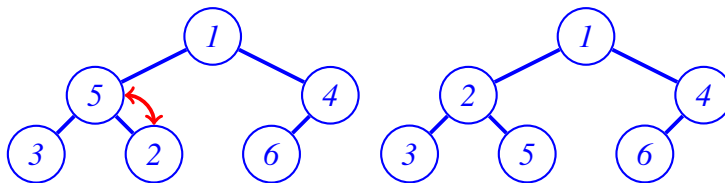


- **minHeapify(4), minHeapify(2), minHeapify(3):**  
 ~> Blätter, nichts zu tun  
 => Liste nach jedem **minHeapify** jeweils: (1, 5, 6, 3, 2, 4)
- **minHeapify(6):**



=> Liste: (1, 5, 4, 3, 2, 6)

- **minHeapify(5):**



=> Liste: (1, 2, 4, 3, 5, 6)

- **minHeapify(1):**

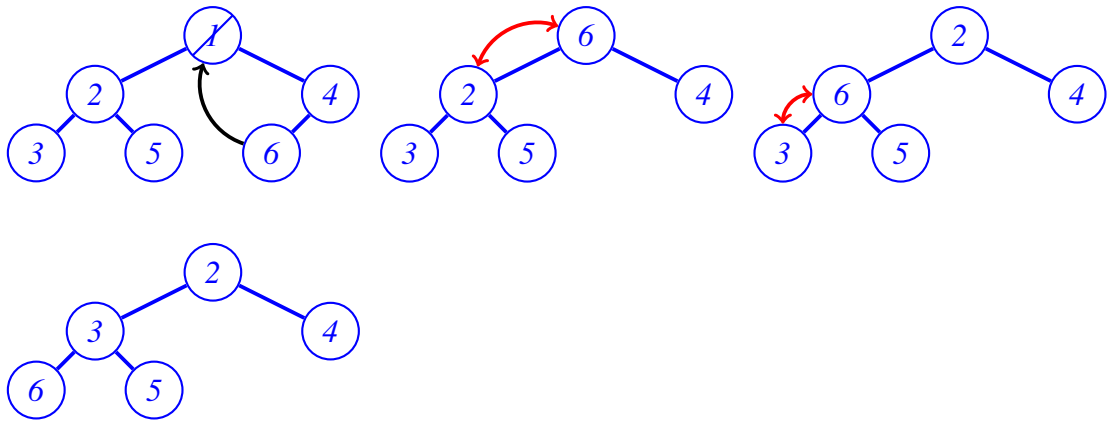
~> nichts zu tun

=> Liste: (1, 2, 4, 3, 5, 6)

**Bewertung:** 6 Punkte für den korrekten Ablauf insgesamt. Je 1 Punkt für korrekte Angabe der Liste.

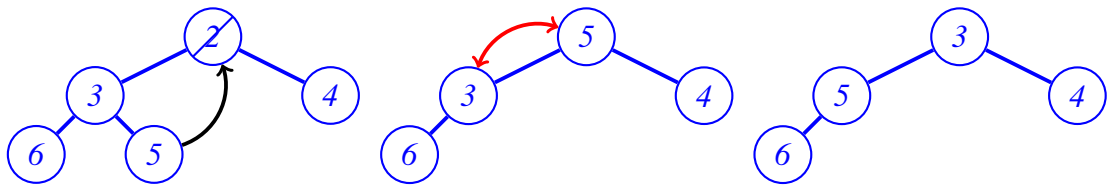
b) Geben Sie den Zustand der Liste während der Sortierung nach jedem **extractMin** an!

- **extractMin = 1, dadurch 6 neue Wurzel und minHeapify(6)**



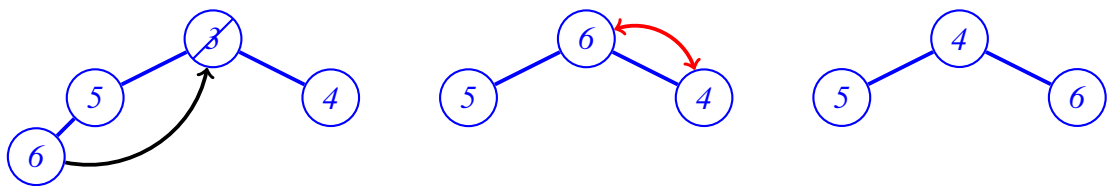
⇒ Liste nach **extractMin**: (2,3,4,6,5 | 1)

- **extractMin** = 2, dadurch 5 neue Wurzel und **minHeapify**(5)



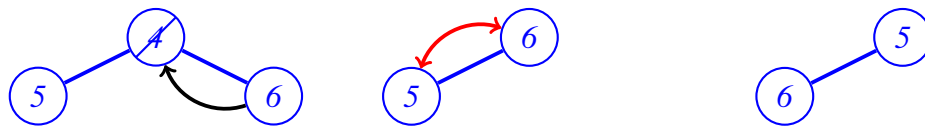
⇒ Liste nach **extractMin**: (3,5,4,6 | 2,1)

- **extractMin** = 3, dadurch 6 neue Wurzel und **minHeapify**(6)



⇒ Liste nach **extractMin**: (4,5,6 | 3,2,1)

- **extractMin** = 4, dadurch 6 neue Wurzel und **minHeapify**(6)



⇒ Liste nach **extractMin**: (5,6 | 4,3,2,1)

- **extractMin** = 5, dadurch 6 neue Wurzel und **minHeapify**(6)



⇒ Liste nach **extractMin**: (6 | 5,4,3,2,1)

- **extractMin** = 6, dadurch Heap leer



⇒ Liste nach *extractMin*: (6,5,4,3,2,1)

**Bewertung:** 6 Punkte für den korrekten Ablauf insgesamt. Je 1 Punkt für korrekte Angabe der Liste.

**Aufgabe 2 KMP-Präfixtabelle**

**(7 Punkte)**

Geben Sie die jeweiligen Präfixtabellen aus dem Knuth-Morris-Pratt Algorithmus zu folgenden Suchmustern an!

a) "ABCABD AF"

-1,0,0,0,1,2,0,0,1

**Bewertung:** 3 Punkte für korrekte Lösung, 1 Punkt Abzug bei einem falschen Eintrag, 0 Punkte nur wenn alles falsch.

b) "ABCABAABABCA"

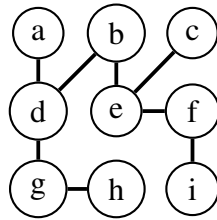
-1,0,0,0,1,2,1,1,2,1,2,3

**Bewertung:** 4 Punkte für korrekte Lösung, 1 Punkt Abzug bei einem oder zwei falschen Einträgen, 0 Punkte nur wenn alles falsch.

**Aufgabe 3 Graphen**

**(8 Punkte)**

Gegeben sei der nebenstehende Graph:



a) Geben Sie die Adjazenzmatrix an!

0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, jeweils 0.5 Punkte pro korrekter Kante.

b) Lässt sich dieser Graph einer bestimmten Unterklasse von Graphen zuordnen, und wenn ja, welcher? Geben Sie ausserdem mindestens drei Eigenschaften dieses Graphen an!

*Der Graph ist ein nicht-vollständiger Binärbaum mit Wurzel b! Als Eigenschaften sind dementsprechend denkbar: Ungerichtet, ungewichtet, nicht vollständig, zyklensfrei, zusammenhängend, Baumhöhe 3, Binärbaum, ...*

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, 1 Punkt für Binärbaum, jeweils 1 Punkt für eine korrekte Eigenschaft.

**Aufgabe 4 AVL-Bäume**

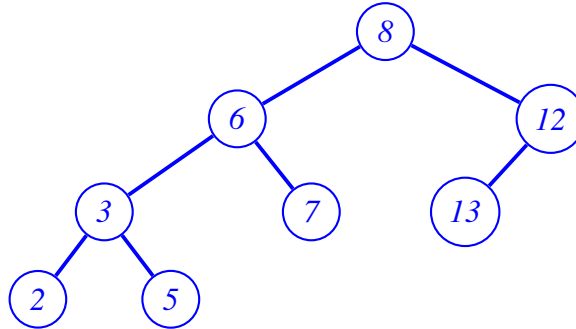
**(8 Punkte)**

a) Repräsentiert das folgende Array einen AVL-Baum?

8, 6, 12, 3, 7, 13, [], 2, 5

Begründen Sie Ihre Antwort und zeichnen Sie die Baumstruktur! Durch welche konkreten Operationen wäre ggf. die AVL-Eigenschaft herzustellen?

*Nein, es ist fast ein AVL-Baum, lediglich  $13 > 12$  verletzt am letzten Blatt die Ordnung!*



*Zur Korrektur vertauschen von Knoten 12 und 13*

**Bewertung:** 6 Punkte insgesamt, davon 4 Punkte für korrekten Baum (jeweils 1 Punkt pro Ebene), 1 Punkt für AVL-Eigenschaft verletzt, 1 Punkt für Korrekturangabe.

b) Kann mittels binärer Suche der **dritt-größte** Wert in einem AVL-Baum gefunden werden (begründen Sie Ihre Antwort!)? Wenn ja, welche Komplexität hat der entsprechende Algorithmus?

*Ja, ein AVL-Baum ist ein binärer Suchbaum, wie er für binäre Suche erforderlich ist.*

*Im Suchbaum ist die geforderte Eigenschaft, dass bei jedem Knoten  $v$  der größte Wert im linken Teilbaum kleiner/gleich (bzw. der kleinste Wert im rechten Teilbaum größer/gleich) dem Wert bei  $v$  selbst ist.*

*Die binäre Suche läuft in  $O(\log n)$ .*

**Bewertung:** 2 Punkte insgesamt, 1 Punkt für binärer Suchbaum, 1 Punkt für  $O(\log n)$ .

**Aufgabe 5 Matrix-Zerlegung**

**(7 Punkte)**

Gegeben sei die folgende Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Definieren die folgenden Matrizen  $U, S, V$  eine gültige SVD-Zerlegung von  $A$ ? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Ja, es handelt sich um eine gültige Zerlegung, da:  $V^T V = I_2$  und orthogonal,  $U^T U = I_2$  und  $A = USV^T$*

*Ausserdem gilt für die Singulärwerte  $4 > 2$ .*

**Bewertung:** 3 Punkte für korrekte Antwort und Begründungen.

*Abzug für:*

- *falsche Schlussfolgerung (es ist keine gültige SVD): -0.5 Punkte*
- *nicht gezeigt dass  $V$  orthogonal und dass  $U^T U = I_2$ : -0.5 Punkte*
- *nicht gezeigt dass  $A = USV^T$ : -0.5 Punkte.*
- *nicht gezeigt dass  $4 > 2$ : -0.5 Punkte.*

b) Betrachten Sie nun die Matrix  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie auf  $B$  die ersten **zwei** Iterationen des *LUP-Algorithmus* aus der Vorlesung in-place durch, und geben Sie dabei zu jeder Iteration jeweils separat die Ergebnisse des Pivottisierungsschrittes und des Teilerlegungsschrittes an.

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Pivottisierung} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Teilerlegung} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|ccc|c} 3 & & & & \\ \hline 2 & 0.5 \{ -2 / -4 \} & 0 \{ 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \} & 1 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) \} & -1.5 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot 3 \} \\ \hline 1 & -0.5 \{ 2 / -4 \} & -1 \{ -2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2 \} & 0 \{ 1 - (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) \} & 4.5 \{ 3 - (-\frac{1}{2}) \cdot 3 \} \\ \hline 4 & 0.5 \{ -2 / -4 \} & -2 \{ -1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \} & 1 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) \} & 8.5 \{ 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \} \end{array} \right) \\
 \text{Pivottisierung} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0.5 & -2 & 1 & 8.5 \\ 1 & -0.5 & -1 & 0 & 4.5 \\ 2 & 0.5 & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \text{Teilerlegung} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{c|cc|cc|c} 3 & & & & \\ \hline 4 & 0.5 & -2 & 1 & 8.5 \\ \hline 1 & -0.5 & 0.5 \{ (-1) / (-2) \} & -0.5 \{ 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \} & 0.25 \{ 4.5 - \frac{1}{2} \cdot 8.5 \} \\ \hline 2 & 0.5 & 0 \{ 0 / (-2) \} & 1 \{ 1 - 0 \cdot 1 \} & -1.5 \{ -1.5 - 0 \cdot 8.5 \} \end{array} \right)
 \end{array}$$

In geschweiften Klammern  $\{ \dots \}$  ist dabei stets die Berechnungsvorschrift angegeben zur leichteren Nachvollziehbarkeit. Dies wird in der Fragestellung nicht erwartet!

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, jeweils 1 Punkt für korrekte Teilerlegung und Pivottisierung.

### Aufgabe 6 Least-Squares

(8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Datenpunkte:

$$\{(-2/5), (0/1), (1/2)\}$$

- a) Berechnen Sie unter Angabe der Rechenschritte die quadratische Least-Squares-Ausgleichskurve  $F(x)$ ! Wie lautet der Fachausdruck für die Ausgangs-Matrix?

*Berechnung via Vandermonde-Matrix  $V$ :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: V} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{y}}$$

*Lösung via Gauss-Elimination des erweiterten Systems  $(V|\mathbf{y})$ :*

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{I \leftrightarrow II} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & -2 & 4 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{II-I, III-I} \\ \rightsquigarrow & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{II+2 \cdot III} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{II/6, II \leftrightarrow III} \\ \rightsquigarrow & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{II-III} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ & & \Rightarrow F(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

*Man hätte die Elimination natürlich auch vorher, also bei Dreiecksform, abrechnen können, und ab dort mittels eines Substitutionsverfahrens fortfahren.*

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, 1 Punkt für korrektes Aufstellen der Matrix-Gleichung, 1 Punkt für Name Vandermonde-Matrix, 1 Punkt für korrektes Lösen, 1 Punkt für korrekte Schlussfolgerung  $F(x) = x^2 + 1$ .

- b) Zusätzlich zu den gegebenen Datenpunkten sollen nun weitere (potentiell verrauschte) Datenpunkte hinzukommen. Was für eine Art von Lösung würde man nun berechnen, und geben Sie dafür auch eine Formel an. Wie würde man diese Art von Lösung dann tatsächlich berechnen? Geben Sie auch hierfür eine Formel sowie ihren Namen an.

*Bei mehr Punkten wird das System  $V\mathbf{a} = \mathbf{y}$  überbestimmt. Daher berechnet man nun eine Least squares Lösung:*

$$\min_{\mathbf{a}} \|V\mathbf{a} - \mathbf{y}\|^2$$

*Die Lösung berechnet sich dann durch die Normalengleichung:*

$$V^T V \mathbf{a} = V^T \mathbf{y}$$

**Bewertung:** 4 Punkte insgesamt, 1 Punkt für Least-Squares Lösung, 1 Punkt für korrekt Formel dazu, 1 Punkt für Normalengleichung, 1 Punkt für korrekte Formel

**In einer echten Klausur sollten Sie von den erreichbaren Punkten mindestens die Hälfte erzielen, in diesem Beispiel also 27 Punkte.**