

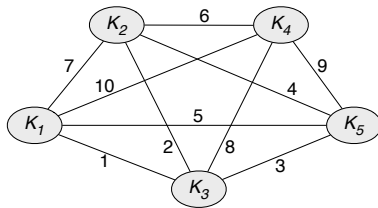
Übersicht: Graphen

Klassen von Graphen:

- ungerichteter Graph
- gerichteter Graph

Zusätzliche Eigenschaften:

- gewichteter Graph



4

Notizen

Definition: Ungerichteter Graph

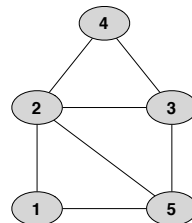
Definition: Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

- V endliche Menge der Knoten
- $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ Menge der Kanten

- auf Englisch:
 - Knoten = vertices
 - Kanten = edges
- es ist $\{u, v\} = \{v, u\}$, d.h. Richtung der Kante spielt keine Rolle

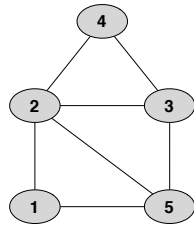
Beispiel:



5

Notizen

Ungerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_u = (V_u, E_u)$
- Knoten $V_u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten $E_u = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$

Notizen

6

Definition: Gerichteter Graph

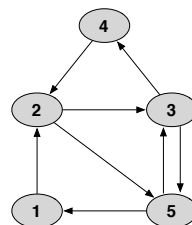
Definition: Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit

- V endliche Menge der Knoten
- $E \subseteq V \times V$ Menge der Kanten

- $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\} = V \times V$
- es ist $(u, v) \neq (v, u)$, d.h. Richtung der Kante spielt eine Rolle
- hier sind Schleifen möglich, d.h. Kanten der Form (u, u) für $u \in V$

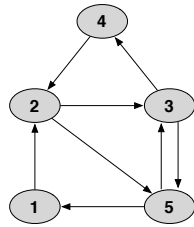
Beispiel:



Notizen

7

Gerichteter Graph: Beispiel



- Graph $G_g = (V_g, E_g)$
- Knoten $V_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kanten
 $E_g = \{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}$

8

Notizen

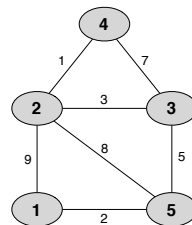
Definition: Gewichteter Graph

Definition: Gewichteter Graph

Ein **gewichteter Graph** ist ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- der Graph G kann gerichtet oder ungerichtet sein
- je nach Anwendung kann ein verschiedener Wertebereich für die Funktion w gewählt werden
 - z.B. \mathbb{R} oder \mathbb{N}_0

Beispiel:



9

Notizen

Eigenschaften von Graphen I

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Ist $(u, v) \in E$ bzw. $\{u, v\} \in E$ für $u, v \in V$, so heißt v **adjazent** zu u .
- Sei G gerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
 - die Anzahl der **eintretenden** Kanten in v heißt **Eingangsgrad** (englisch: indegree) von v ,

$$indeg(v) = |\{v' : (v', v) \in E\}|$$

- die Anzahl der **austretenden** Kanten von v heißt **Ausgangsgrad** (englisch: outdegree) von v ,

$$outdeg(v) = |\{v' : (v, v') \in E\}|$$

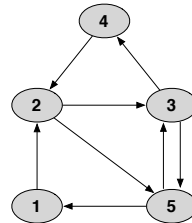
- Sei G ungerichteter Graph, sei $v \in V$ ein Knoten.
 - die Anzahl der eintretenden bzw. austretenden Kanten von v heißt **Grad** (englisch: degree) von v oder kurz $deg(v)$.

Notizen

Eigenschaften von Graphen: Beispiel

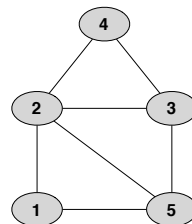
Beispiel gerichteter Graph:

- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 1
- Knoten 1 ist adjazent zu Knoten 5
- $outdeg(2) = 2, indeg(2) = 2$
- $indeg(1) = 1, outdeg(1) = 1$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Knoten 4 ist adjazent zu Knoten 2
- Knoten 2 ist adjazent zu Knoten 4
- $deg(2) = 4$
- $deg(1) = 2$



Notizen

Eigenschaften von Graphen II

Notizen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet).

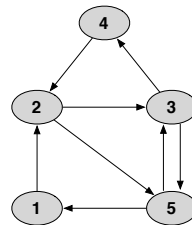
- Seien $v, v' \in V$. Ein **Pfad** von v nach v' ist eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \dots, v_k) \subset V$ mit
 - $v_0 = v, v_k = v'$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ bzw. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, k - 1$ k heißt **Länge** des Pfades.
- Ein Pfad heißt **einfach**, falls alle Knoten des Pfades paarweise verschieden sind.

Gibt es einen Pfad von u nach v , so heißt v **erreichbar** von u .

Eigenschaften von Graphen II: Beispiel

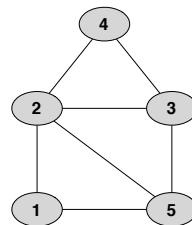
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 2
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Pfad der Länge 3, aber nicht einfach
- 5 ist erreichbar von 1



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(5, 2, 4, 3, 2)$ ist ein Pfad der Länge 4, aber nicht einfach
- $(1, 2, 3, 4)$ ist ein einfacher Pfad der Länge 3
- 3 ist erreichbar von 1



Notizen

Eigenschaften von Graphen III

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- Ein Pfad (v_0, \dots, v_k) heißt **Zyklus**, falls
 - $v_0 = v_k$ und
 - der Pfad mindestens eine Kante enthält
- Ein Zyklus (v_0, \dots, v_k) heißt **einfach**, falls v_1, \dots, v_k paarweise verschieden sind.

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

- Ein Pfad (v_0, \dots, v_k) heißt **Zyklus**, falls
 - $v_0 = v_k$
 - $k \geq 3$
 - v_1, \dots, v_k paarweise verschieden

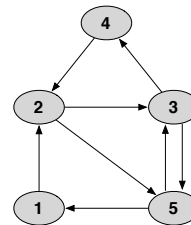
Ein Graph ohne Zyklen heißt **azyklisch**.

Notizen

Eigenschaften von Graphen III: Beispiel

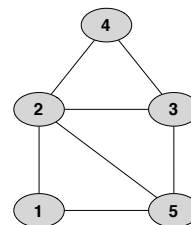
Beispiel gerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 3, 5, 1)$ ist ein Zyklus, aber nicht einfach
- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein einfacher Zyklus



Beispiel ungerichteter Graph:

- $(1, 2, 5, 1)$ ist ein Zyklus
- $(2, 3, 4, 2)$ ist ein Zyklus



Notizen

Eigenschaften von Graphen IV

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph.

- G heißt **stark zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine **starke Zusammenhangskomponente** von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G .
 - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "gegenseitig erreichbar"

Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph.

- G heißt **zusammenhängend**, falls jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine **Zusammenhangskomponente** von G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G .
 - alternativ: Äquivalenzklassen der Knoten bezüglich Relation "erreichbar von"

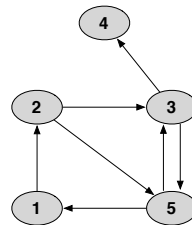
Notizen

16

Eigenschaften von Graphen IV: Beispiel

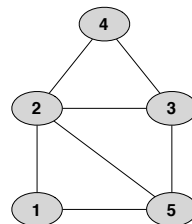
Beispiel gerichteter Graph:

- Graph ist **nicht** stark zusammenhängend (z.B. 3 nicht erreichbar von 4)
- starke Zusammenhangskomponenten: $\{1, 2, 3, 5\}$ und $\{4\}$



Beispiel ungerichteter Graph:

- Graph ist zusammenhängend
- nur eine Zusammenhangskomponente: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$



Notizen

17

Darstellung von Graphen: Adjazenzmatrizen

Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die Adjazenzmatrix von G speichert die vorhandenen Kanten in einer $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

- $A(i, j) = 1$ falls Kante von Knoten v_i zu v_j existiert
- $A(i, j) = 0$ falls keine Kante von Knoten v_i zu v_j existiert

für $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

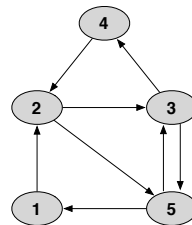
Notizen

18

Adjazenzmatrizen: Beispiele

Beispiel gerichteter Graph:

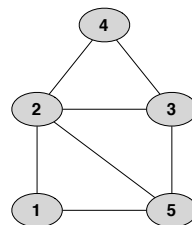
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Notizen

Beispiel ungerichteter Graph:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



19

Adjazenzmatrizen: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzmatrizen zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll wenn der Graph nahezu **vollständig** ist (d.h. fast alle möglichen Kanten tatsächlich in E liegen)
- Speicherkomplexität: $O(|V|^2)$
- bei **ungerichteten** Graphen ist die Adjazenzmatrix **symmetrisch**
- bei **gewichteten** Graphen kann man statt der 1 in der Matrix das Gewicht der Kante eintragen

Notizen

20

Darstellung von Graphen: Adjazenzlisten

Adjazenzliste

Sei $G = (V, E)$ gerichteter Graph. Eine **Adjazenzliste** von G sind $|V| + 1$ verkettete Listen, so daß

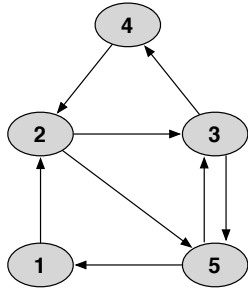
- die erste Liste alle Knoten enthält
- für jeden Knoten v eine Liste angelegt wird mit allen Knoten, die durch eine von v austretende Kante zu erreichen sind

Notizen

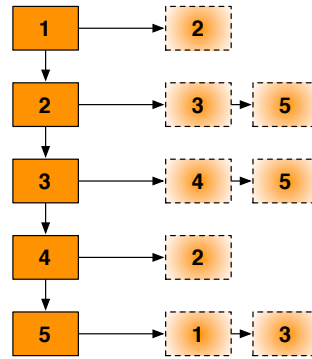
21

Adjazenzliste: Beispiel

Graph:



Adjazenzliste:



Notizen

Adjazenzliste: Eigenschaften

Eigenschaften von Adjazenzlisten zu Graph $G = (V, E)$

- sinnvoll bei dünn besetzten Graphen mit wenigen Kanten
- Speicherkomplexität: $O(|V| + |E|)$
- bei ungerichteten Graphen gleiches Verfahren
 - allerdings muß jede Kante zweimal gespeichert werden
- bei gewichteten Graphen kann man die Gewichte mit in den verketteten Listen der jeweiligen Knoten speichern

Notizen

Komplexität der Darstellungen

Sei $G = (V, E)$ Graph.

| Operation | Adjazenzmatrix | Adjazenzliste |
|-----------------|----------------|----------------|
| Kante einfügen | $O(1)$ | $O(V)$ |
| Kante löschen | $O(1)$ | $O(V)$ |
| Knoten einfügen | $O(V ^2)$ | $O(1)$ |
| Knoten löschen | $O(V ^2)$ | $O(V + E)$ |

- falls Größe im Vorhinein bekannt, kann Knoten löschen/einfügen bei Adjazenzmatrix effizienter implementiert werden
- auch die Adjazenzlisten lassen sich effizienter implementieren, z.B. auf Kosten von Speicher (sequentielle Liste statt verkettete Liste)
- Löschen von Knoten ist immer aufwendig, da auch alle Kanten von/zu diesem Knoten gelöscht werden müssen

24

Notizen

Algorithmen auf Graphen

Ausblick auf Algorithmen auf Graphen:

- Traversierung (Durchlaufen) von allen Knoten
 - Depth-First Search (DFS)
 - Breadth-First Search (BFS)
- kürzester Pfad zwischen Knoten in Graphen
- minimaler Spannbaum (minimum spanning tree, MST)

→ siehe Kapitel 9!



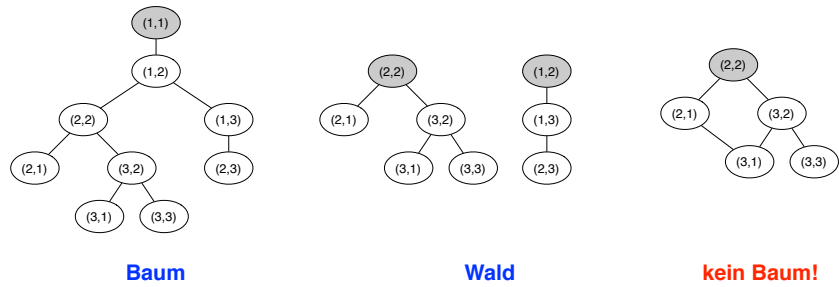
25

Notizen

Definition Wald/Baum

Definition: Wald und Baum

- Ein azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Wald**.
- Ein zusammenhängender, azyklischer ungerichteter Graph heißt auch **Baum**.



Notizen

Eigenschaften von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein **Baum**.

- jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ ist durch einen **einzigsten Pfad** verbunden
- G ist **zusammenhängend**, aber wenn eine Kante aus E **entfernt** wird, ist G nicht mehr zusammenhängend
- G ist **azyklisch**, aber wenn eine Kante zu E **hinzugefügt** wird, ist G nicht mehr azyklisch
- es ist $|E| = |V| - 1$

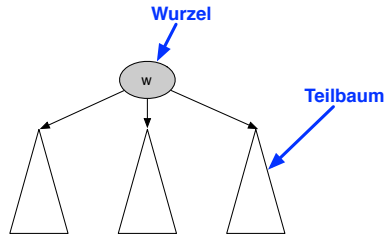


Notizen

Wurzel von Bäumen

Sei $G = (V, E)$ ein Baum.

- genau ein Knoten $w \in V$ wird als **Wurzel** ausgezeichnet
- entfernt man w erhält man einen Wald von **Teilbäumen**



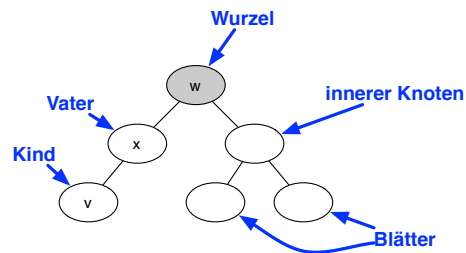
Hinweis: manchmal wird zwischen "freiem" und "gewurzeltem" Baum unterschieden!

Notizen

Weitere Begriffe bei Bäumen I

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

- jeder Knoten $v \in V$ mit $v \neq w$ ist mit genau einer Kante mit seinem **Vaterknoten** $x \in V$ (oder: Vorgänger) verbunden
- v wird dann als **Kind** (oder: Sohn, Nachfolger) von $x \in V$ bezeichnet
- ein Knoten ohne Kinder heißt **Blatt**, alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**

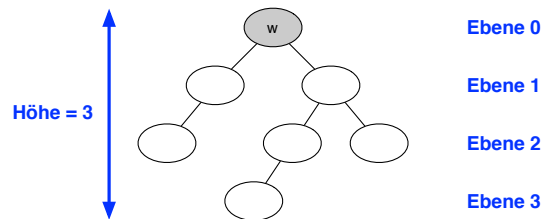


Notizen

Weitere Begriffe bei Bäumen II

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

- Anzahl der Kinder von Knoten $x \in V$ heißt auch **Grad** von x
 - Achtung: der Grad in dem ungerichteten Graph G ist anders definiert!
- Länge des Pfades von Wurzel w zu Knoten $x \in V$ heißt **Tiefe** von x
- alle Knoten gleicher Tiefe bilden eine **Ebene** des Baumes G
- die **Höhe** des Baumes G ist die maximale Tiefe der Knoten von G
 - Achtung: manchmal ist Höhe auch als Anzahl der Ebenen definiert



32

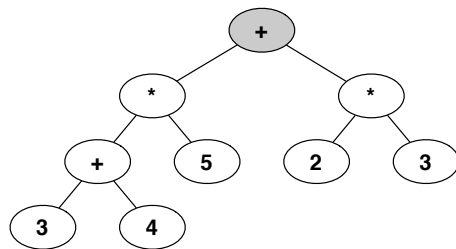
Notizen

Bäume: Beispiele

- arithmetischer Ausdruck

$$(3 + 4) * 5 + 2 * 3$$

repräsentiert als Baum:



- hierarchisches Dateisystem
 - Windows z.B. "C:\\"
 - Unix "/"
- Suchbaum → Kapitel 8

33

Notizen

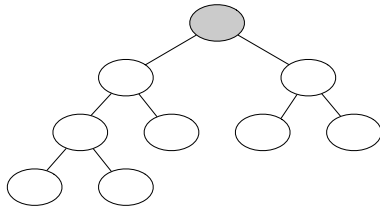
Besondere Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit Wurzel $w \in V$.

- sind die Kinder jedes Knotens in bestimmter Reihenfolge angeordnet, heißt G **geordneter Baum**
- ist die Anzahl n der Kinder jedes Knotens vorgegeben, heißt G **n -ärer Baum**

Wichtiger Spezialfall:

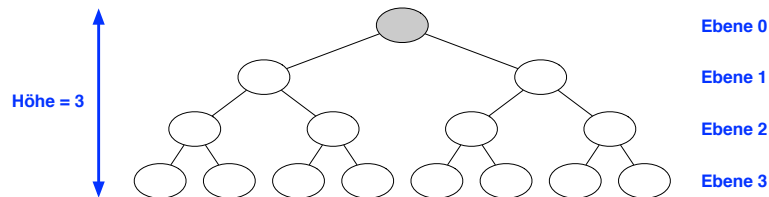
- ist G geordnet und hat jeder Knoten maximal zwei Kinder, heißt G **Binärbaum**



Notizen

34

Beispiel: Binärbaum



Binärbaum mit Höhe 3, 8 Blättern und 7 inneren Knoten.

- Binärbaum heißt **vollständig**, wenn jede Ebene die maximale Anzahl an Knoten enthält
- ein vollständiger Binärbaum der Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten, davon 2^k Blätter
- Beweis per Induktion

Notizen

35

Darstellung von Bäumen: als Graph

Bäume sind Graphen → Darstellung als

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzliste

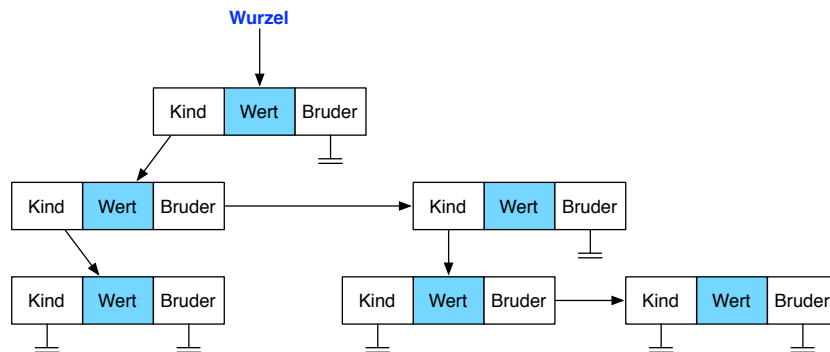
→ leider meist **nicht effizient** (sowohl Laufzeit als auch Speicher)



Notizen

Darstellung von Bäumen: verkettete Liste

Darstellung mit angepassten verketteten Listen:

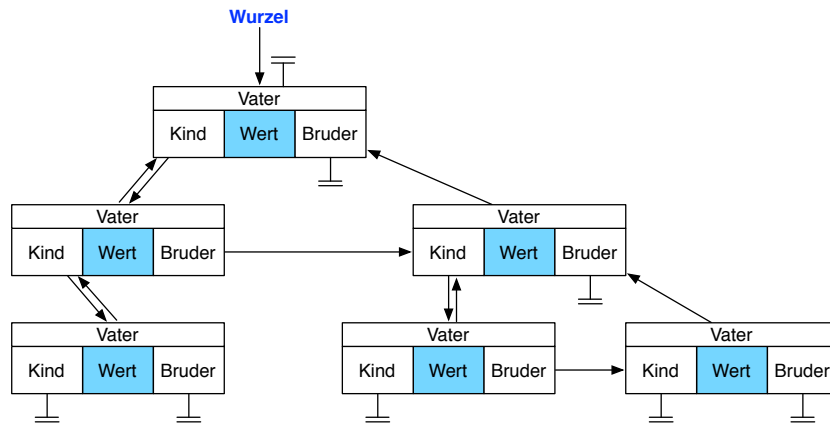


Nachteil: nur Navigation “nach unten” möglich

Notizen

Darstellung von Bäumen: doppelt verkettete Liste

Darstellung mit angepassten doppelt verketteten Listen:

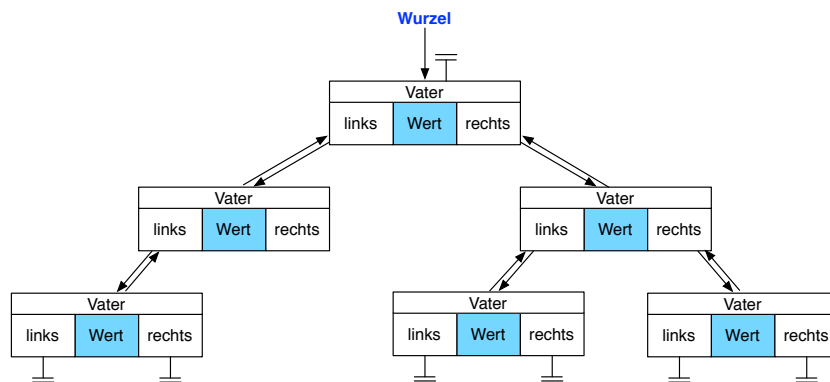


38

Notizen

Darstellung von Binärbäumen

Darstellung direkt mit linkem/rechtem Kind (doppelt verkettet):



39

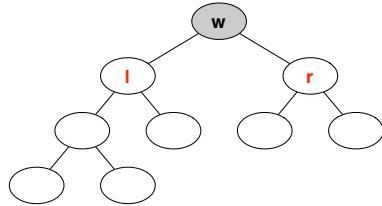
Notizen

Traversierung von Binärbäumen

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

In welcher Reihenfolge durchläuft man G ?

- Wurzel zuerst
- danach linker oder rechter Kind-Knoten l bzw. r ?
- falls l : danach Kind-Knoten von l oder zuerst r ?
- falls r : danach Kind-Knoten von r oder zuerst l ?



- falls zuerst in die Tiefe: Depth-first search (DFS)
- falls zuerst in die Breite: Breadth-first search (BFS)

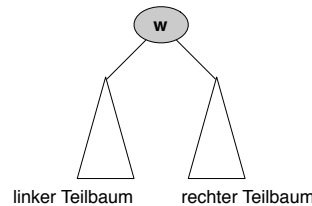
Notizen

DFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Tiefensuche (Depth-first search, DFS) gibt es in 3 Varianten:

- 1 Pre-order Reihenfolge
 - besuche Wurzel
 - durchlaufe linken Teilbaum
 - durchlaufe rechten Teilbaum
- 2 In-order Reihenfolge
 - durchlaufe linken Teilbaum
 - besuche Wurzel
 - durchlaufe rechten Teilbaum
- 3 Post-order Reihenfolge
 - durchlaufe linken Teilbaum
 - durchlaufe rechten Teilbaum
 - besuche Wurzel



Notizen

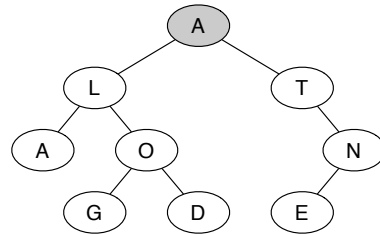
Pre-order Traversierung

Pre-order Reihenfolge:

- besuche Wurzel
- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, A, O, G, D, T, N, E



Notizen

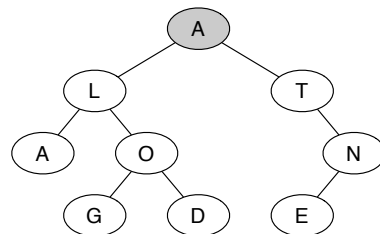
In-order Traversierung

In-order Reihenfolge:

- durchlaufe linken Teilbaum
- besuche Wurzel
- durchlaufe rechten Teilbaum

Beispiel:

A, L, G, O, D, A, T, E, N



Notizen

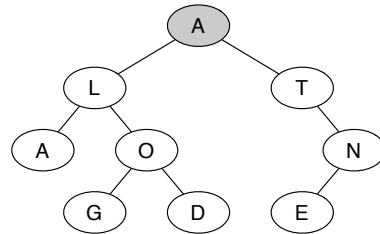
Post-order Traversierung

Post-order Reihenfolge:

- durchlaufe linken Teilbaum
- durchlaufe rechten Teilbaum
- besuche Wurzel

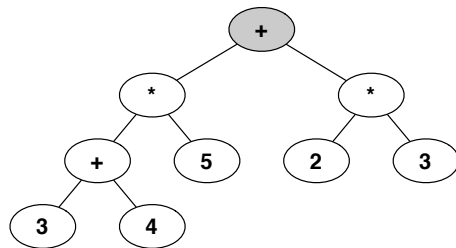
Beispiel:

A, G, D, O, L, E, N, T, A



Notizen

Beispiel: Arithmetischer Term



Traversierung:

- Pre-order: + * + 3 4 5 * 2 3
- In-order: 3 + 4 * 5 + 2 * 3
- Post-order: 3 4 + 5 * 2 3 * +

Notizen

Implementierung DFS Traversierung

Datenstruktur:



- Algorithmus **preorder**:
preorder(knoten):
 if (knoten == null) **return**;
 print(knoten);
 preorder(knoten.links);
 preorder(knoten.rechts);
- Algorithmus **postorder**:
postorder(knoten):
 if (knoten == null) **return**;
 postorder(knoten.links);
 postorder(knoten.rechts);
 print(knoten);
- Algorithmus **inorder**:
inorder(knoten):
 if (knoten == null) **return**;
 inorder(knoten.links);
 print(knoten);
 inorder(knoten.rechts);
- rekursive Algorithmen
- auf Call-Stack basiert

Notizen

Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

- Datenstruktur:



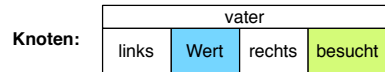
- Hilfsmittel: Stack von Knoten "knotenStack"

```
postorderIterativ(wurzelKnoten):  
  knotenStack.push(wurzelKnoten);  
  while ( !knotenStack.isEmpty() ) {  
    knoten = knotenStack.top();  
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )  
      knotenStack.push(knoten.links);  
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )  
      knotenStack.push(knoten.rechts);  
    else {  
      print(knoten);  
      knoten.besucht = true;  
      knotenStack.pop();  
    }  
  }  
}
```

Notizen

Implementierung ohne Rekursion und ohne Stack

- Datenstruktur:



postorderIterativeOhneStack(wurzelKnoten):

```

knoten = wurzelKnoten;
while (true) {
    if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
        knoten = knoten.links;
    else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
        knoten = knoten.rechts;
    else {
        print(knoten);
        knoten.besucht = true;
        if (knoten.vater == null) break;
        else knoten = knoten.vater;
    }
}
    
```

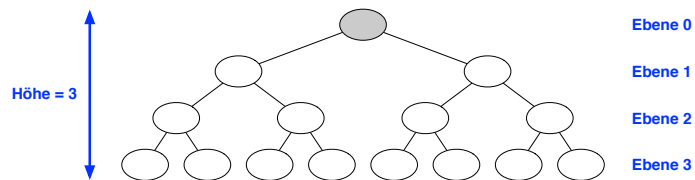
Notizen

BFS Binärbaum

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

Breitensuche (Breadth-first search, BFS):

- besuche Wurzel
- für alle Ebenen von 1 bis Höhe
 - besuche alle Knoten aktueller Ebene



Notizen

Implementierung BFS Traversierung

- Datenstruktur:



- Hilfsmittel: Queue von Knoten "knotenQueue"

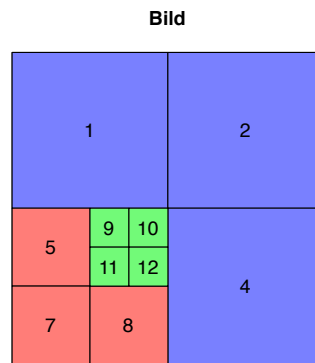
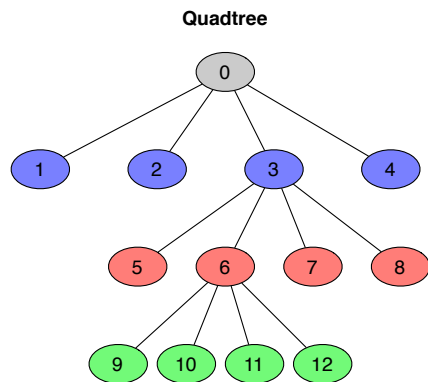
breitensuche(wurzelKnoten):

```
knotenQueue = leer;  
knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);  
while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {  
    knoten = knotenQueue.dequeue();  
    besuche(knoten);  
    if (knoten.links != null)  
        knotenQueue.enqueue(knoten.links);  
    if (knoten.rechts != null)  
        knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);  
}
```

Notizen

Anwendung: Quadtree I

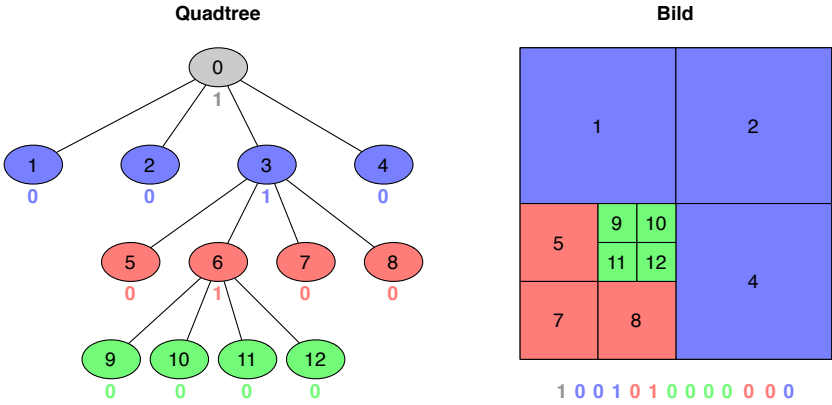
- 4-närer Baum heißt **Quadtree**



Notizen

Anwendung: Quadtree II

- Codierung des Baumes mit Binärziffern



Notizen

Zusammenfassung

- ⑦ Fortgeschrittene Datenstrukturen
 - Graphen
 - Bäume

Notizen
