Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2018

Dr. Stefanie Demirci

Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Programm heute

Definition Heap

Definition Heap

Sei $G = (V, E)$ ein Binärbaum mit Wurzel $w \in V$. Jeder Knoten $v \in V$ sei mit einem Wert $key(v)$ verknüpft, die Werte seien durch $\leq, \geq$ geordnet.
G heißt Heap, falls er folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- G ist fast vollständig, d.h. alle Ebenen sind vollständig gefüllt, ausser auf der untersten Ebene, die von links her nur bis zu einem bestimmten Punkt gefüllt sein muss.
- G erfüllt die Min-Heap-Eigenschaft bzw. die Max-Heap-Eigenschaft, d.h. für alle Knoten $v \in V$, $v \neq w$ gilt
  - Min-Heap: $key(v.vater) \leq key(v)$
  - Max-Heap: $key(v.vater) \geq key(v)$

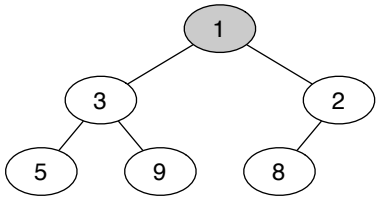
Entsprechend der Heap-Eigenschaft heißt G Min-Heap bzw. Max-Heap.

Bemerkungen zur Heap Definition

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap.

- wir beschränken uns hier auf Min-Heaps, alle Aussagen gelten mit entsprechenden trivialen Änderungen auch für Max-Heaps
- typische Keys von Knoten sind Zahlen, z.B. $key : V \to \mathbb{R}$
  - weiteres Beispiel: Strings als Keys, lexikographisch geordnet
- ein Heap ist kein abstrakter Datentyp!

Min-Heap: Beispiel



- Keys sind hier natürliche Zahlen
- Baum ist fast vollständiger Binärbaum
- Baum erfüllt Min-Heap-Eigenschaft:
  - für alle Knoten v (ausser Wurzel) gilt

$$key(v.vater) \leq key(v)$$

Heap Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Heap mit Wurzel $w \in V$.

- G als Min-Heap bzw. Max-Heap hat immer Element mit kleinstem bzw. größtem Key in Wurzel w
- G ist aber nicht vollständig sortiert (d.h. Traversierung liefert nicht notwendigerweise vollständig sortierte Folge)
- Ist $|V| = n$, so hat G Höhe von $\Theta(\log n)$

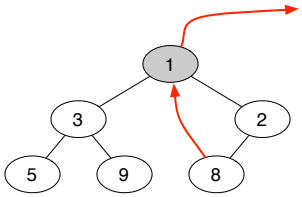
- typische Operation: extrahiere kleinsten (bzw. größten) Key (d.h. Wurzel), kurz: extractMin (bzw. extractMax)
  - anschließendes Problem: Heap-Eigenschaft wiederherstellen, als Operation: minHeapify (bzw. maxHeapify)

Heap: extractMin

Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$.

- Operation extractMin:
  - entferne Wurzel w aus Heap G und liefere $key(w)$ zurück
  - tausche letzten Knoten von G an Stelle von Wurzel
  - stelle Heap-Eigenschaft wieder her mit minHeapify

Output: minimaler Key in G
extractMin(G):
  $min = key(w)$;
  tausche Inhalt von w mit letztem Knoten in G;
  minHeapify(G, w);
  return min;



Heap: minHeapify

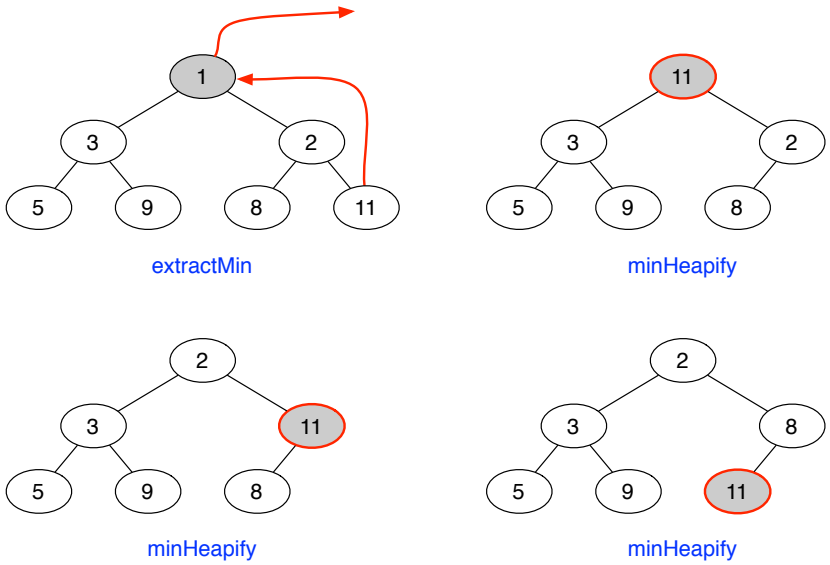
Sei $G = (V, E)$ Min-Heap mit Wurzel $w \in V$ und $|V| = n$.

- Operation minHeapify auf Knoten $v \in V$ zur Wiederherstellung der Min-Heap-Eigenschaft
- Voraussetzung: nur Knoten v verletzt Min-Heap-Eigenschaft
- lasse v durch Heap absinken, bis Min-Heap-Eigenschaft wiederhergestellt

Input: Knoten v
minHeapify(G, v):
  if (v ist Blatt) **return**;
  $knoten$ = Minimum (bzgl. key) von v.links und v.rechts;
  if ($key(knoten) < key(v)$) {
    tausche Inhalt von $knoten$ und v;
    minHeapify$(G, knoten)$;
  }

- Komplexität: $O(\log n)$

Beispiel extractMin / minHeapify



Heap erzeugen: buildMinHeap

Gegeben sei Knoten-Liste V mit $|V| = n$ und Keys $key(v)$ für $v \in V$.

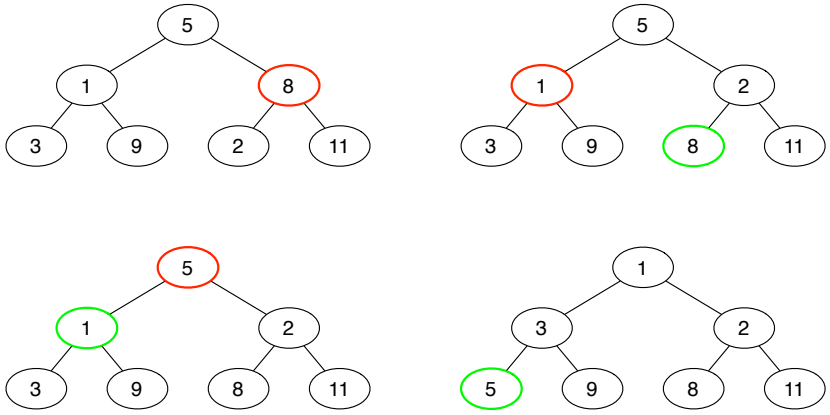
- wie erzeugt man aus V einen Min-Heap $G = (V, E)$?
  - erzeuge irgendwie fast vollständigen Binärbaum aus V
  - wende minHeapify auf alle Knoten $v \in V$ an, von unten nach oben (nicht nötig für unterste Ebene des Baumes!)

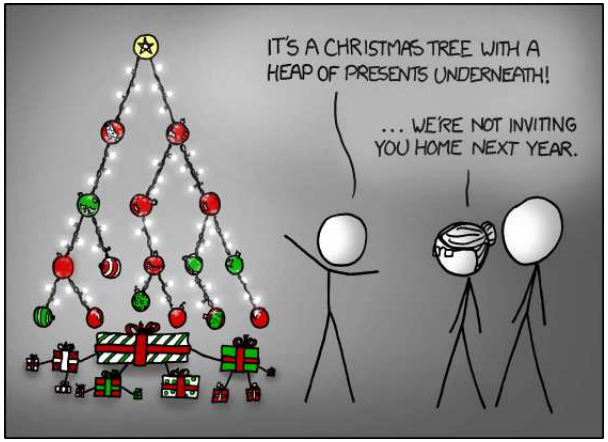
Input: Knoten-Liste V
Output: Min-Heap G
buildMinHeap(V):

G = erzeuge beliebigen fast vollständigen Binärbaum aus V;
for each Knoten v in G von unten nach oben {
  minHeapify(G, v);
}

- Komplexität: $O(n)$ (nicht nur $O(n \log n)$!)

Beispiel buildMinHeap





http://xkcd.com/835/

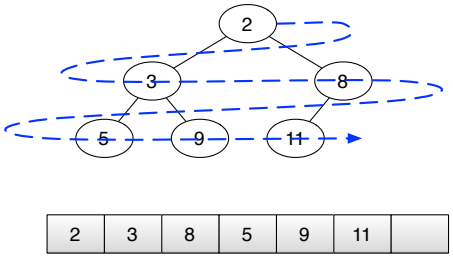
Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste I

- vollständiger Binärbaum Höhe k hat $2^{k+1} - 1$ Knoten

  $\rightarrow$ speichere Knoten von oben nach unten, von links nach rechts in sequentieller Liste (Array)

  $\rightarrow$ maximale Grösse von Array: $2^{k+1} - 1$

- Beispiel fast vollständiger Binärbaum:

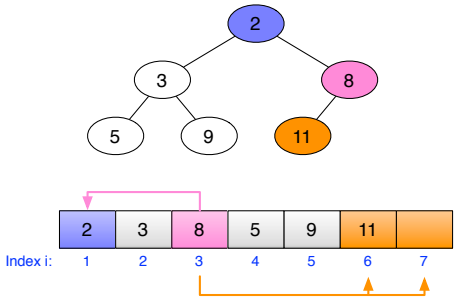


Wiederholung: Binärbaum als sequentielle Liste II

- Wurzel: an Position 1
- Knoten an Position i:
  - Vater-Knoten an Position $\lfloor i/2 \rfloor$
  - linkes Kind an Position $2i$;
  - rechtes Kind an Position $2i + 1$

Pseudocode:

- **vater**(i): **return** $\lfloor i/2 \rfloor$;
- **links**(i): **return** $2i$;
- **rechts**(i): **return** $2i + 1$;



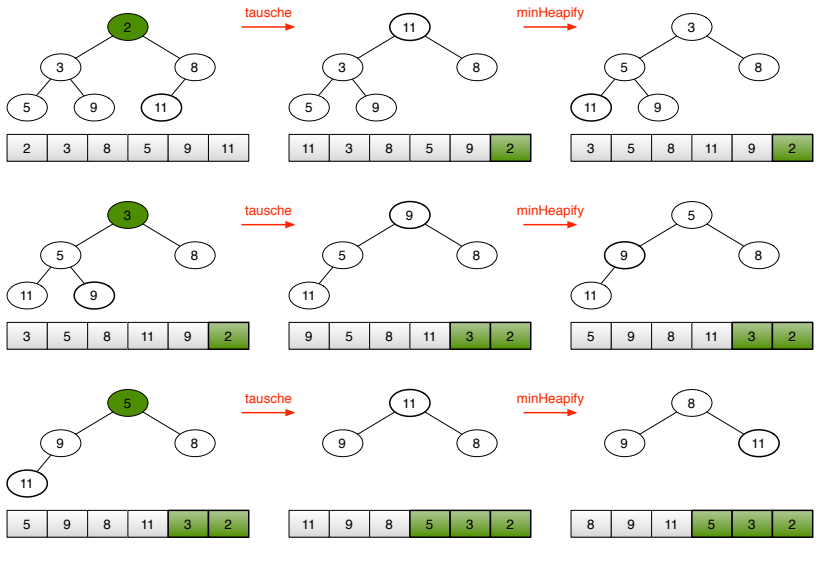
HeapSort

- Sortieren mit Heap
- Idee:
  - Heap erstellen mit **buildMinHeap**
  - wiederhole **extractMin** bis Heap leer
- mit Heap direkt im Eingabefeld:

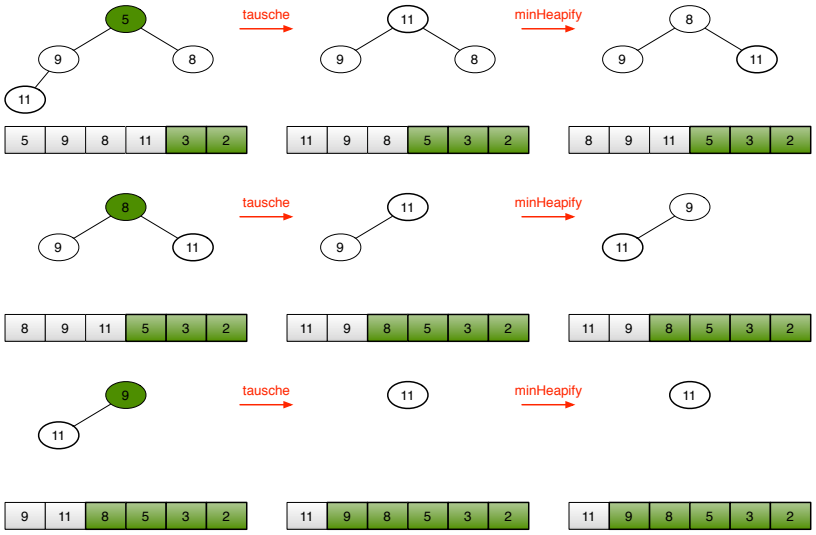
```
Input: Feld A[1..n] der Länge n
HeapSort(A):
    buildMinHeap(A);
    for i=n downto 2 {
       tausche A[1] mit A[i];
       A.length = A.length - 1;
       minHeapify(A, 1);
    }
```

- min-Heap sortiert in absteigender Reihenfolge
- max-Heap sortiert in aufsteigender Reihenfolge

HeapSort: Beispiel I



HeapSort: Beispiel II



HeapSort Eigenschaften

- sortiert in-place
- Komplexität $O(n \log n)$
  - besser als QuickSort im worst case!
  - in Praxis aber erst bei grossem n
- nicht stabil

Stabilität von Sortierverfahren

Stabilität

Ein Sortierverfahren heißt stabil, wenn es die Reihenfolge von gleichrangigen Elementen bewahrt.

Beispiel:

- unsortierte Liste:

  5 2 3 4 3 (blau vor rot)

- sortierte Liste (stabil):

  2 3 3 4 5 (blau vor rot)

- sortiere Liste (nicht stabil):

  2 3 3 4 5 (rot vor blau)

Sortier-Algorithmen illustriert

Animationen der Sortier-Algorithmen:

☞ `http://www.sorting-algorithms.com`

Sortier-Algorithmen Zusammenfassung

- Insertion Sort
  - in-place, stabil
  - Komplexität $O(n^2)$, best case: $O(n)$
- Selection Sort (Übung)
  - in-place, nicht stabil
  - Komplexität $O(n^2)$
- MergeSort
  - benötigt zusätzlichen Speicher, stabil
  - Komplexität $O(n \log n)$
- QuickSort
  - in-place, nicht stabil
  - Komplexität im Mittel $O(n \log n)$, worst case: $O(n^2)$
- HeapSort
  - in-place, nicht stabil
  - Komplexität $O(n \log n)$

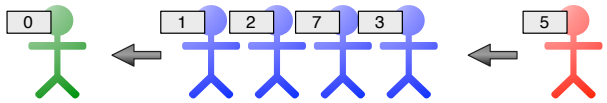
Programm heute

Definition Priority Queue

Definition Priority Queue

Eine Priority Queue ist ein abstrakter Datentyp. Sie beschreibt einen Queue-artigen Datentyp für eine Menge von Elementen mit zugeordnetem Schlüssel und unterstützt die Operationen

- Einfügen von Element mit Schlüssel in die Queue,
- Entfernen von Element mit minimalem Schlüssel aus der Queue,
- Ansehen des Elementes mit minimalem Schlüssel in der Queue.



- entsprechend gibt es auch eine Priority Queue mit Entfernen/Ansehen von Elememt mit maximalem Schlüssel

Definition Priority Queue (abstrakter)

Priority Queue P ist ein abstrakter Datentyp mit Operationen

- insert(P, x) wobei x ein Element
- extractMin(P) liefert ein Element
- minimum(P) liefert ein Element
- isEmpty(P) liefert `true` or `false`
- initialize liefert eine Priority Queue Instanz

und mit Bedingungen

- isEmpty(initialize()) == `true`
- isEmpty(insert(P, x)) == `false`
- minimum(initialize()) ist nicht erlaubt (Fehler)
- extractMin(initialize()) ist nicht erlaubt (Fehler)

(Fortsetzung nächste Folie)

Definition Priority Queue (abstrakter)

Fortsetzung Bedingungen Priority Queue P:

- minimum(insert(P, x)) liefert zurück
  - falls P == initialize(), dann x
  - sonst: min(x, minimum(P))
- extractMin(insert(P, x))
  - falls x == minimum(insert(P, x)), dann liefert es x zurück und hinterlässt P im Originalzustand
  - sonst liefert es extractMin(P) zurück und hinterlässt P im Zustand insert(extractMin(P), x)

(entsprechend für die Priority Queue mit maximalem Schlüssel)

Priority Queue: Implementationen I

- mit sortierten Feldern (als sequentielle oder verkette Liste)
  - insert legt Element an richtiger Stelle in sortierter Liste ab mit $O(n)$ Komplexität
  - minimum, extractMin als $O(1)$ Operation
- mit unsortierten Feldern (als sequentielle oder verkettete Liste)
  - insert hängt Element einfach an Ende an mit $O(1)$
  - minimum, extractMin suchen nach Element mit kleinstem Schlüssel mit $O(n)$

$\rightarrow$ beides nicht sonderlich effizient (je nach Abfolge der Operationen aber ok)

Priority Queue: Implementationen II

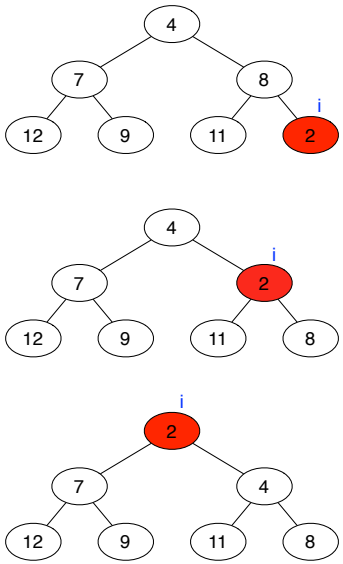
Priority Queue P als min-Heap $G = (V, E)$ mit Wurzel w:

- minimum von P liefert Wurzel w zurück
  - Komplexität $O(1)$
- extractMin von P entspricht extractMin von G
  - Komplexität $O(\log n)$
- insert von P erfordert ein klein wenig Extra-Aufwand:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A), Element x
insert(A, x):
füge Element x an Ende von Heap A ein;
i = Index von letztem Element;
while ((i != 1) && (A[**vater**(i)] > A[i])) {
tausche A[i] mit A[**vater**(i)];
i = **vater**(i);
}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: insert Beispiel



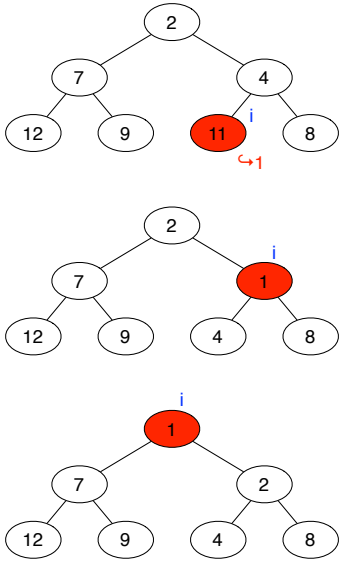
Priority Queue: dynamisches Anpassen von Keys

- manchmal ändert sich der "Priorität" von Schlüsseln
  - Beispiel Algorithmen dafür in Kapitel 9!
- Operation decreaseKey verringert Schlüssel von bestimmten Element

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element mit Index i, neuer Schlüsselwert wert
decreaseKey(A, i, wert):
if (wert $>$ A[i]) **error** "neuer Schlüssel größer als alter!"
A[i] = wert;
while ((i != 1) && (A[**vater**(i)] $>$ A[i])) {
tausche A[i] mit A[**vater**(i)];
i = **vater**(i);
}

- Komplexität $O(\log n)$

Priority Queue: decreaseKey Beispiel



Priority Queue: decreaseKey / insert

- mit Operation decreaseKey läßt sich insert anders formulieren:

Input: Priority Queue P (als min-Heap mit seq. Liste A),
Element x
insert(A, x):
A.length = A.length + 1;
A[A.length] = ∞;
decreaseKey(A, A.length, x);

Priority Queue: Ausblick

- Priority Queue mit Heap: insert und decreaseKey sind $O(\log n)$
- dies läßt sich mit Fibonacci-Heap bzw. Radix-Heap verbessern auf (amortisiert) $O(1)$

$\rightarrow$ Effiziente Algorithmen in Informatik

Priority Queues und Sortieren

- mit Priority Queues lassen sich Sortier-Algorithmen implementieren
- Schema:
  - alle Elemente in Priority Queue einfügen
  - der Reihe nach alle Elemente mit extractMin / extractMax entfernen
- Beispiele:
  - Priority Queue mit Heap: HeapSort
  - Priority Queue mit sortierter sequentieller Liste: Insertion Sort
  - Priority Queue mit unsortierter sequentieller Liste: Selection Sort

Zusammenfassung