Algorithmen und Datenstrukturen (für ET/IT)

Sommersemester 2018

Dr. Stefanie Demirci

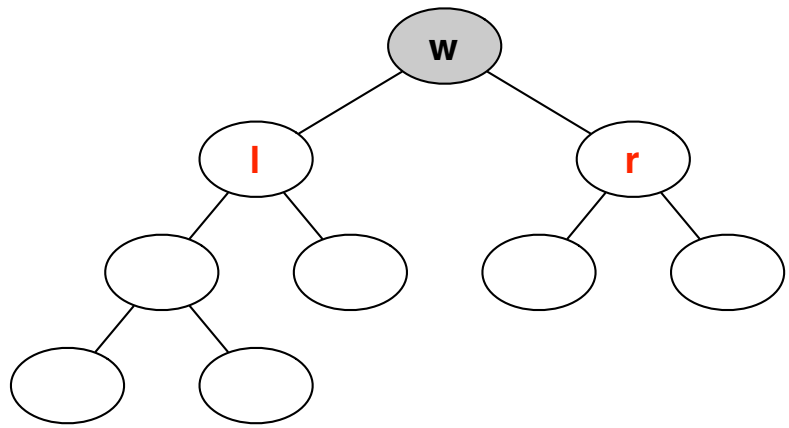
Computer Aided Medical Procedures
Technische Universität München

Wdh: Traversierung von Binärbäumen

Sei $G = (V, E)$ Binärbaum.

In welcher Reihenfolge durchläuft man G?

- Wurzel zuerst
- danach linker oder rechter Kind-Knoten l bzw. r?
- falls l: danach Kind-Knoten von l oder zuerst r?
- falls r: danach Kind-Knoten von r oder zuerst l?



→ falls zuerst in die Tiefe: Depth-first search (DFS)

→ falls zuerst in die Breite: Breadth-first search (BFS)

Wdh: Implementierung DFS Traversierung

Datenstruktur:

- Algorithmus preorder:

```
preorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    besuche(knoten);
    preorder(knoten.links);
    preorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus inorder:

```
inorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    inorder(knoten.links);
    besuche(knoten);
    inorder(knoten.rechts);
```

- Algorithmus postorder:

```
postorder(knoten):
    if (knoten == null) return;
    postorder(knoten.links);
    postorder(knoten.rechts);
    besuche(knoten);
```

- rekursive Algorithmen
- auf Call-Stack basiert

Wdh: Implementierung DFS Traversierung ohne Rekursion

- Datenstruktur:

- Hilfsmittel: Stack von Knoten "knotenStack"

```
postorderIterativ(wurzelKnoten):
    knotenStack.push(wurzelKnoten);
    while ( !knotenStack.isEmpty() ) {
        knoten = knotenStack.top();
        if ( (knoten.links != null) && (!knoten.links.besucht) )
            knotenStack.push(knoten.links);
        else if ( (knoten.rechts != null) && (!knoten.rechts.besucht) )
            knotenStack.push(knoten.rechts);
        else {
            print(knoten);
            knoten.besucht = true;
            knotenStack.pop();
        }
    }
```

Wdh: Implementierung BFS Traversierung

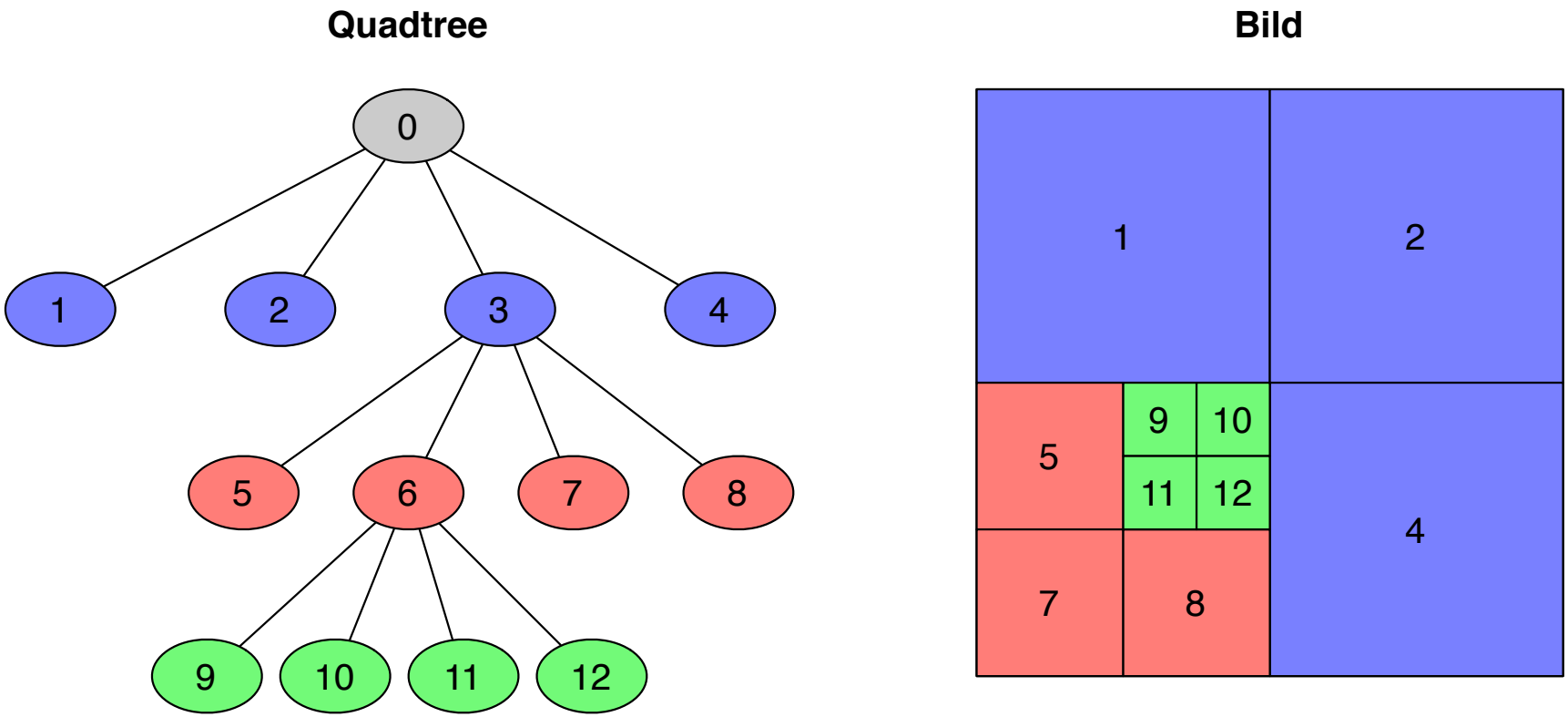
- Datenstruktur:

- Hilfsmittel: Queue von Knoten "knotenQueue"

```
breitensuche(wurzelKnoten):
    knotenQueue = leer;
    knotenQueue.enqueue(wurzelKnoten);
    while ( !knotenQueue.isEmpty() ) {
        knoten = knotenQueue.dequeue();
        print(knoten);
        if (knoten.links != null)
            knotenQueue.enqueue(knoten.links);
        if (knoten.rechts != null)
            knotenQueue.enqueue(knoten.rechts);
    }
```

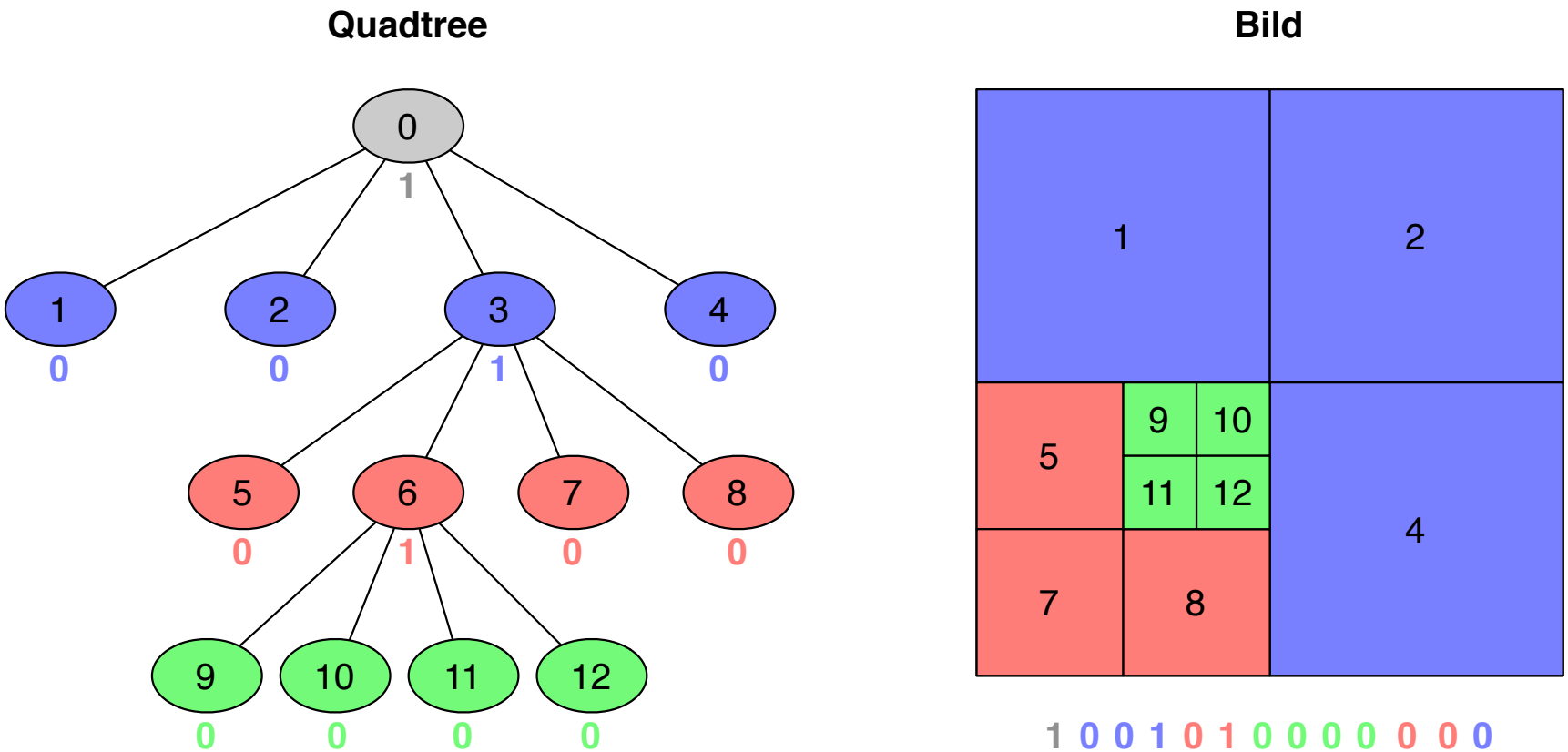
Wdh: Anwendung: Quadtree I

- 4-närer Baum heißt Quadtree



Wdh: Anwendung: Quadtree II

- Codierung des Baumes mit Binärziffern



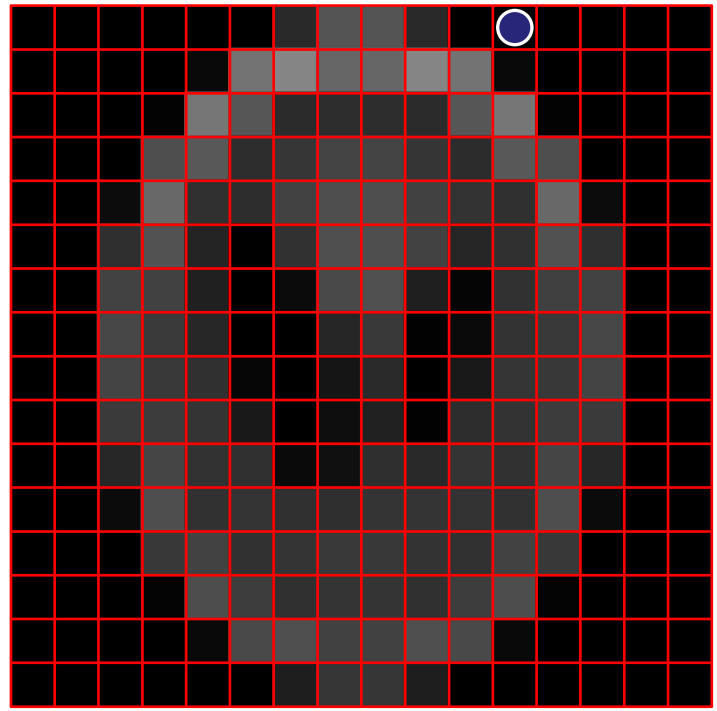
Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche

Bild-Repräsentation mit Pixeln



- Bild als zwei-dimensionales Feld
- einzelnes Element: Pixel *(picture element)*
- hier: jedem Pixel wird ein Grauwert zugewiesen
  - z.B. von 0 bis 255

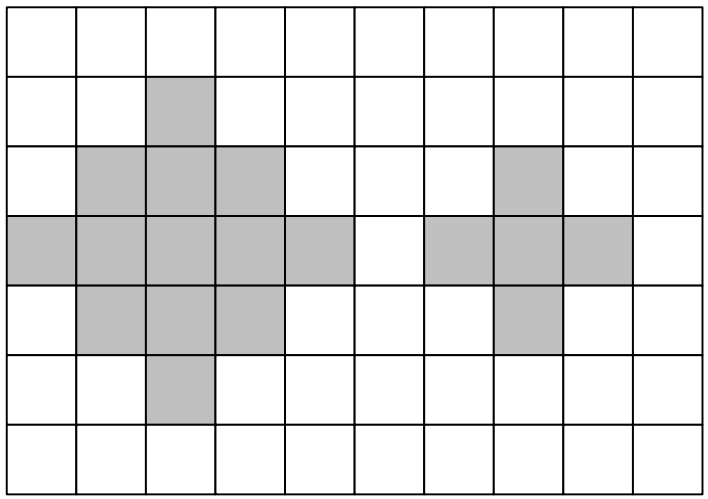
Segmentierung von Bildern

- Segmentierung: Zusammenfassung von inhaltlich zusammenhängenden Regionen gemäß eines Kriteriums

- Beispiel: Segmentierung von Knochen oder Organen

Binäre Bilder

- Binäres Bild: jedes Pixel hat entweder Wert 0 oder 1



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Segmentierungs-Problem: identifiziere die beiden “Sterne”

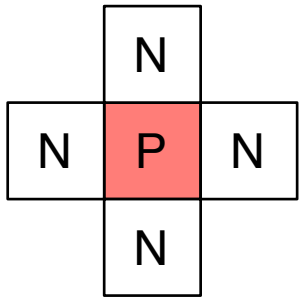
  → Algorithmus?

Problem: Segmentierung von “Sternen”

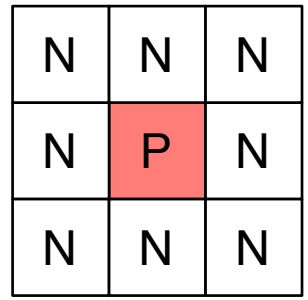
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- Gegeben: binäres Bild mit 0,1 Werten
- Gesucht: Regionen im Bild mit Wert 1
- Ansatz:
  - fange an bei beliebeigem Pixel mit Wert 1
  - wiederhole: inspiziere unbesuchte Nachbar-Pixel auf Wert 1
  - beende, falls kein weiterer Nachbar mit Wert 1 existiert

Nachbarschaft von Pixeln



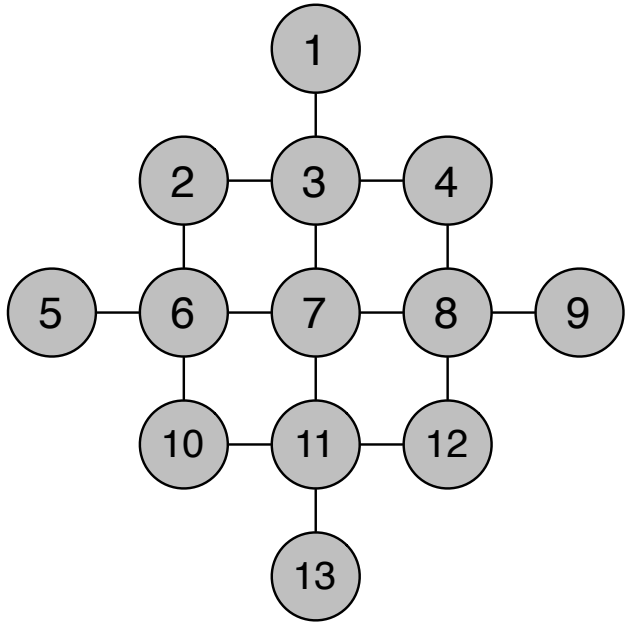
4-Nachbarschaft



8-Nachbarschaft

- 4-Nachbarschaft von Pixel P: alle direkten Nachbar-Pixel, die Kante mit P gemeinsam haben
  - auch genannt: Von-Neumann-Nachbarschaft
- 8-Nachbarschaft von Pixel P: alle direkten Nachbar-Pixel, die Kante oder Ecke mit P gemeinsam haben
  - auch genannt: Moore-Nachbarschaft

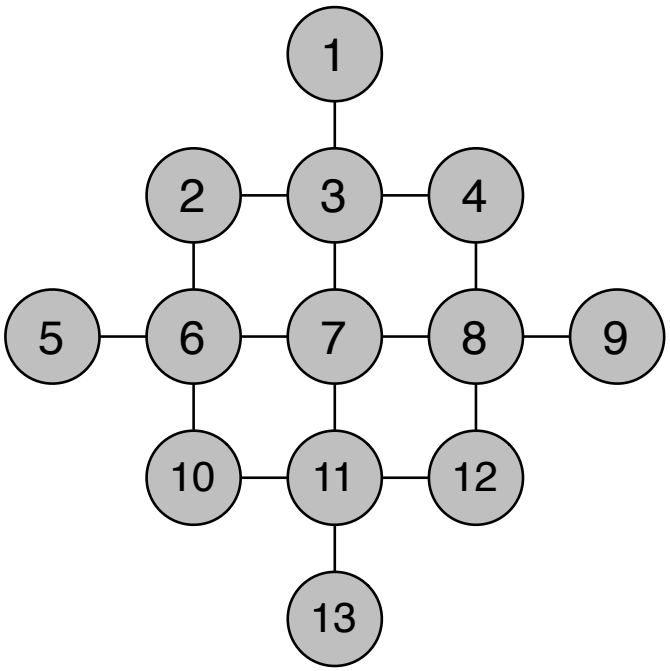
“Stern” als Graph

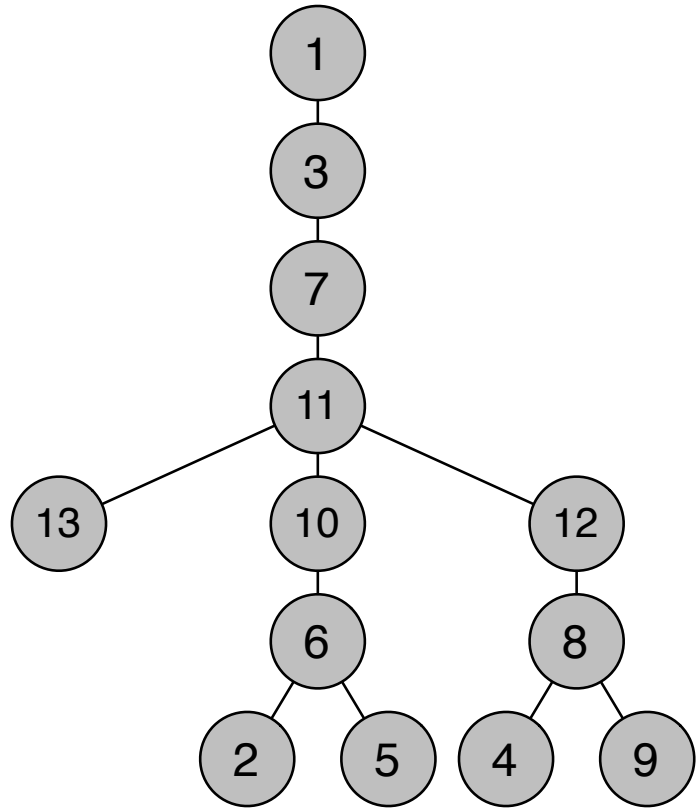


Segmentierungs-Ansatz von linkem “Stern”:

1. starte mit Pixel 1
2. besuche Nachbarn (Schema: oben, unten, links, rechts)

Segmentierungs-Durchlauf als Baum





Ansatz auch genannt: Tiefensuche bzw. Depth-First Search (DFS)

Tiefensuche (DFS)

Sei $G = (V, E)$ Graph (gerichtet oder ungerichtet).

- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten hat Farb-Markierung farbe:
  - weiss = noch nicht besucht
  - grau = besucht, gerade in Bearbeitung
  - schwarz = besucht, fertig bearbeitet
- jeder Knoten hat Vorgänger in Besuch-Reihenfolge pred
- (optional) zusätzliche Knoten-Markierungen d und f
  - Zeitmarke, wann Knoten entdeckt: d (discovered)
  - Zeitmarke, wann Knoten fertig bearbeitet: f (finalized)

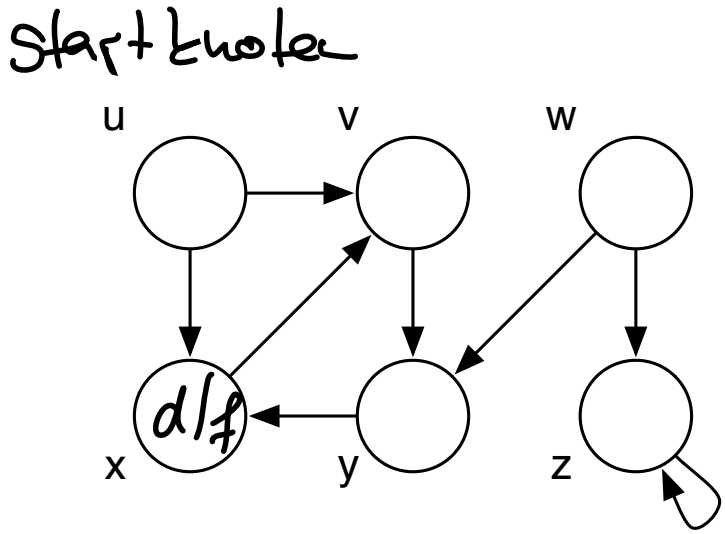
Algorithmus DFS

Input: Graph $G = (V, E)$
Output: Vorgänger-Liste pred,
Markierungen d, f

DFS(G):
  for each (Knoten $v \in V$) {
    farbe[v] = weiss;
    pred[v] = null;
  }
  zeit = 0;
  for each (Knoten $v \in V$) {
    if (farbe[v] == weiss)
      DFSvisit(v);
  }

DFSvisit(v):
  farbe[v] = grau; // v war weiss
  zeit = zeit + 1;
  d[v] = zeit;
  for each (Knoten $u \in$ adj[v]) {
    if (farbe[u] == weiss) {
      pred[u] = v;
      DFSvisit(u);
    }
  }
  farbe[v] = schwarz; // v ist fertig
  zeit = zeit + 1;
  f[v] = zeit;

DFS: Beispiel-Ablauf 1



Adj. liste

u -> v -> x

v -> y

w -> y -> z

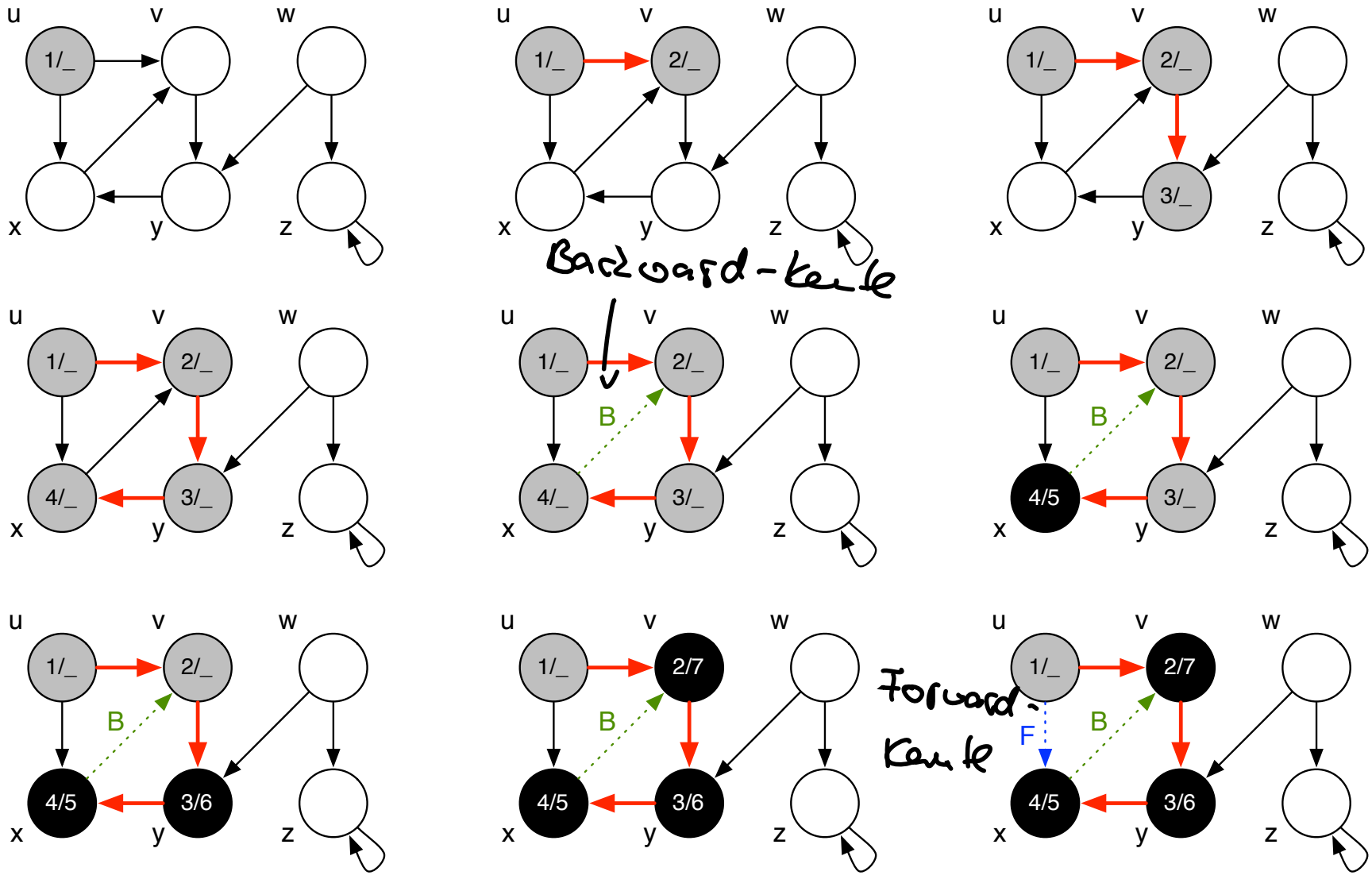
x -> v

y -> x

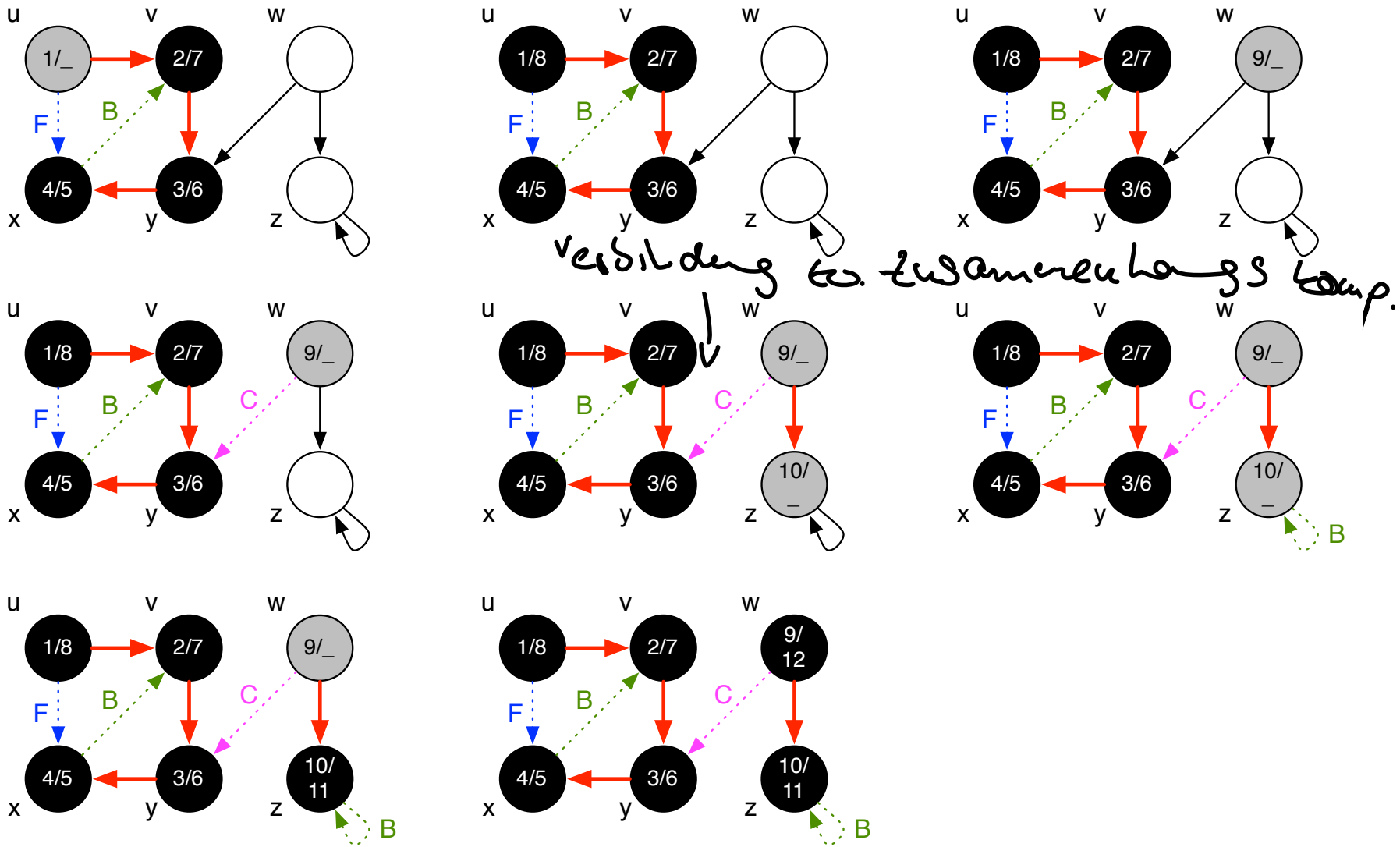
z -> z

- Knoten u, v, w, x, y, z
- farbe direkt im Knoten markiert
- d/f im Knoten notiert
- pred markiert durch rote Kanten

DFS: Beispiel-Ablauf 2



DFS: Beispiel-Ablauf 3



Spannwald mit DFS

Sei $G = (V, E)$ Graph.

- Spannbaum: Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
  - existiert nur für zusammenhängende Graphen
- Spannwald: Teilgraph $G' = (V, E')$, dessen Zusammenhangskomponenten jeweils Spannbäume der Zusammenhangskomponenten von G sind

Spannwald mit DFS

Sei $G = (V, E)$ Graph.

- Spannbaum: Teilgraph $G' = (V, E')$, der ein Baum ist und alle Knoten von G enthält.
  - existiert nur für zusammenhängende Graphen
- Spannwald: Teilgraph $G' = (V, E')$, dessen Zusammenhangskomponenten jeweils Spannbäume der Zusammenhangskomponenten von G sind
- DFS erzeugt Spannwald
  - Knoten sind V, Kanten E' ergeben sich aus pred
  - im Beispiel-Ablauf: Knoten V sind schwarz, Kanten E' sind rot
- DFS erlaubt Markierung spezieller Kanten:
  - Rückkanten im Spannwald (markiert mit B)
  - Vorwärtskanten im Spannwald (markiert mit F)
  - Cross-Kanten im Spannnwald (markiert mit C)

Komplexität von DFS

- **DFS** erste Schleife wird $|V|$ mal durchlaufen: $\Theta(|V|)$
- **DFSvisit** wird für jeden Knoten genau einmal aufgerufen (zweite Schleife in **DFS**, rekursiver Aufruf in **DFSvisit**)
- innere Schleife in **DFSvisit** wird $|\text{adj}(v)|$ mal aufgerufen

$$\sum_{v \in V} |\text{adj}(v)| = \Theta(|E|)$$

gilt nur für gerichtete Graphen!

- Gesamtlaufzeit: $\Theta(|V| + |E|)$

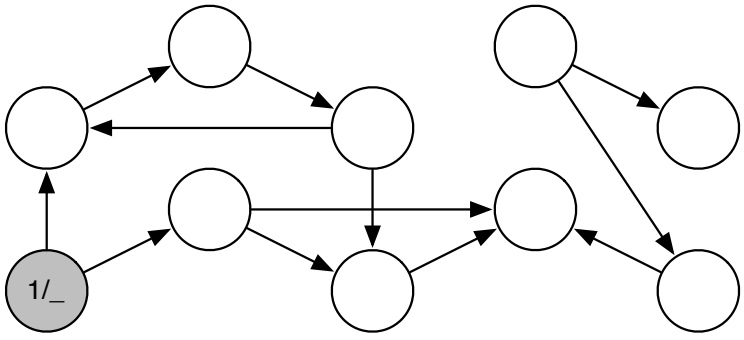
- Implementierung gleicher Komplexität auch nicht-rekursiv möglich (mit Stack)

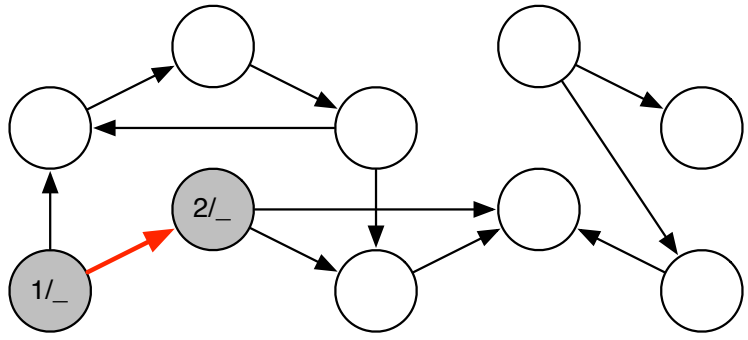
Anwendungen von DFS

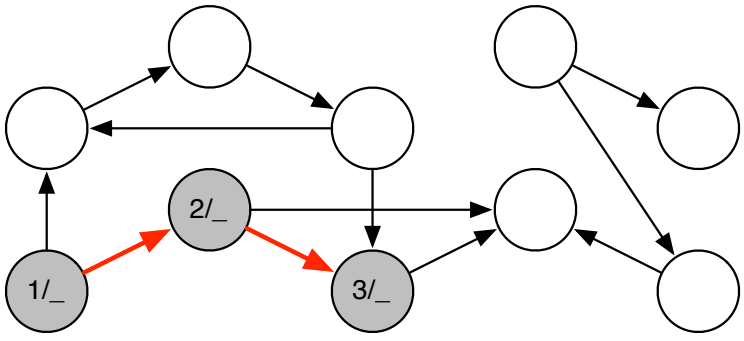
- Test auf Zusammenhang von Graphen
  - rufe **DFSvisit** nur für einen Knoten auf (statt für alle)
  - falls nicht alle Knoten dadurch besucht: nicht zusammenhängend!

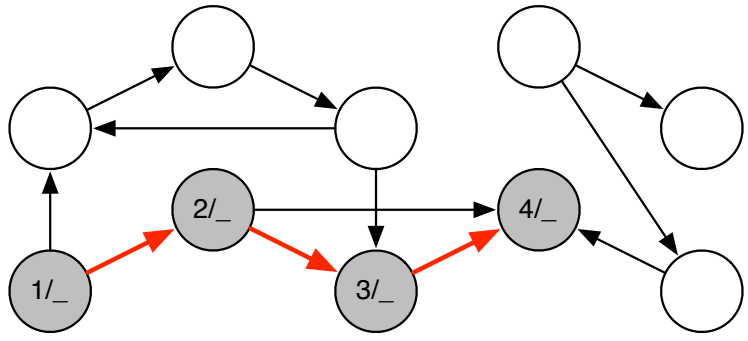
- Test auf Zyklenfreiheit in Graphen
  - Zyklus entdeckt falls Rückkante B gefunden
  - Rückkante B: in **DFSvisit** Schleife ist Zielknoten bereits grau

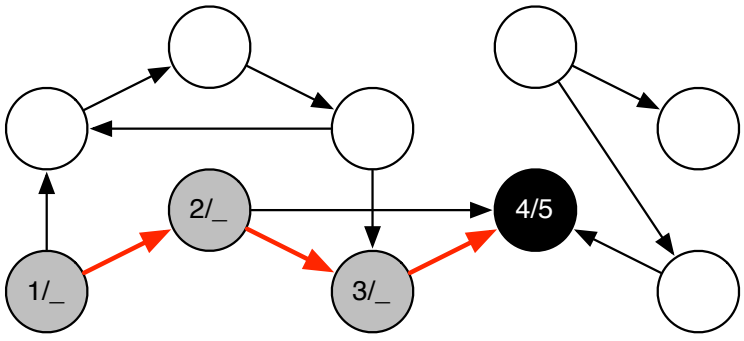
Beispiel DFS 1

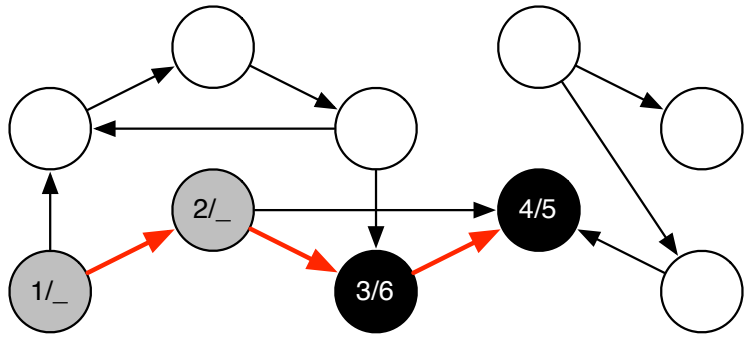




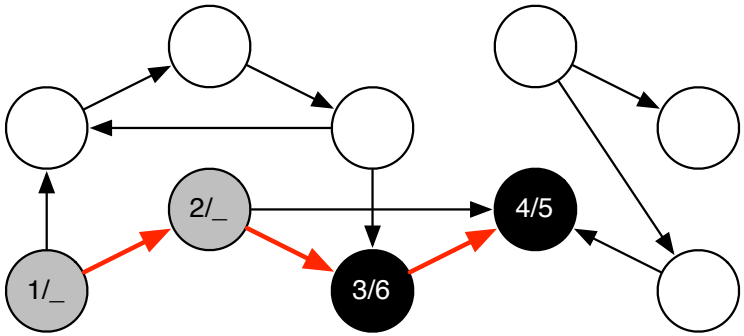


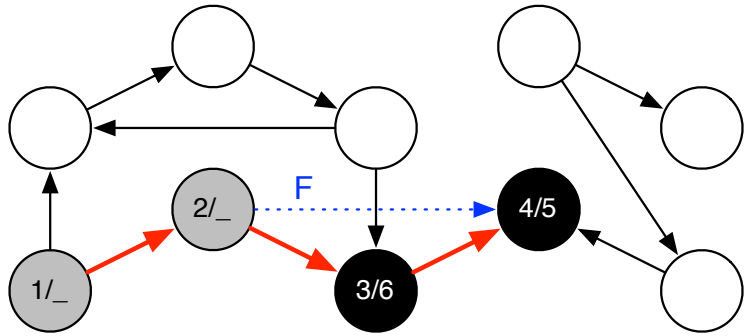


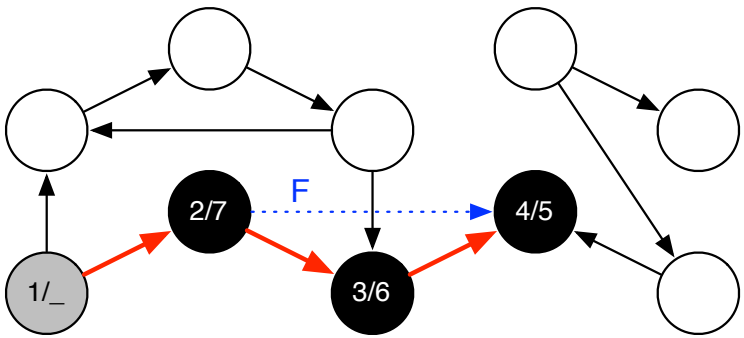


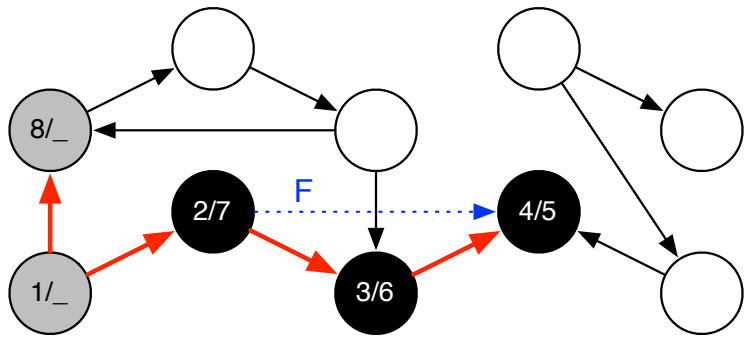


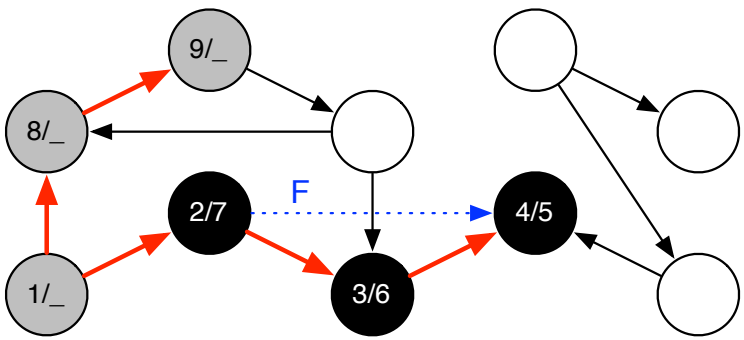
Beispiel DFS 2

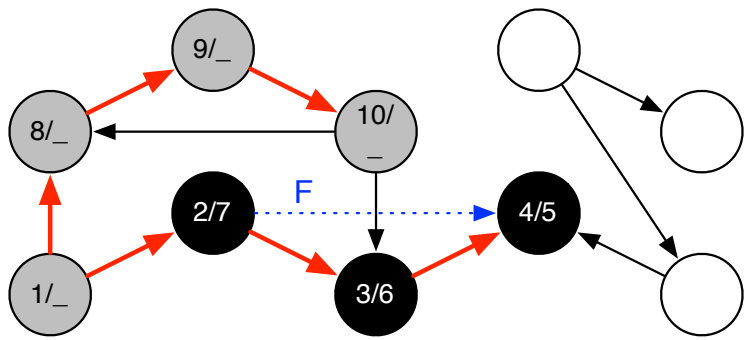




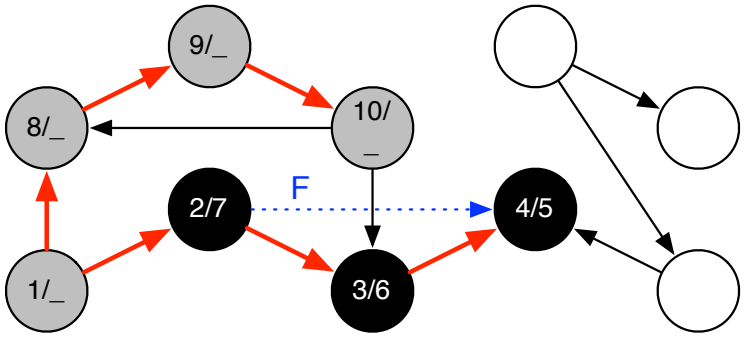


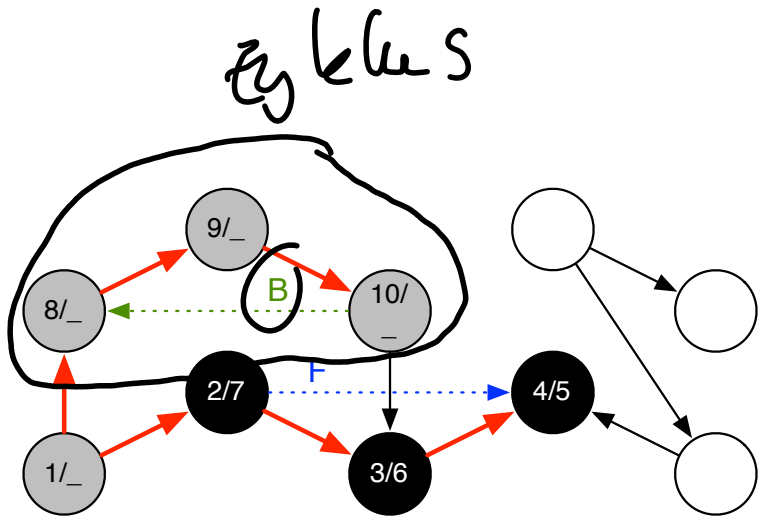


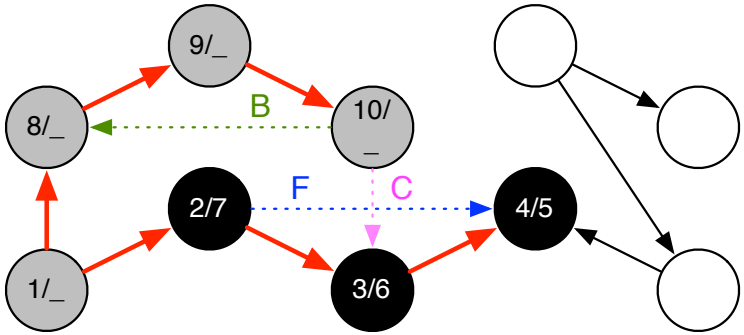


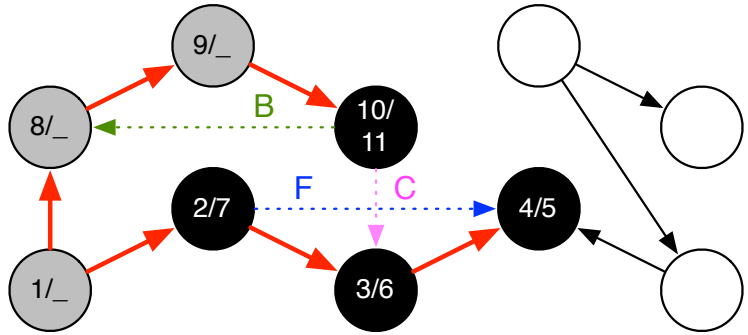


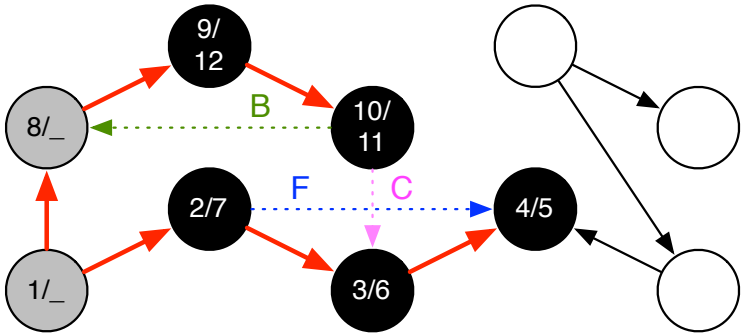
Beispiel DFS 3

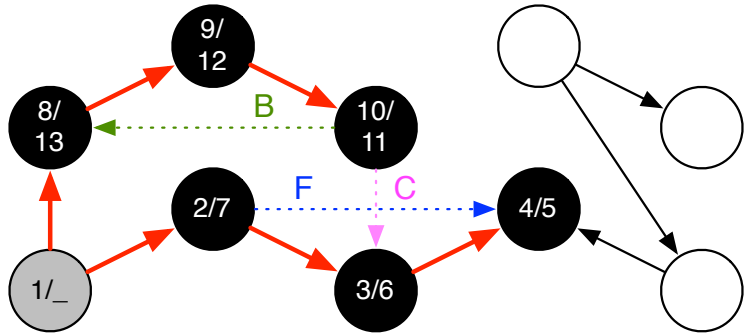




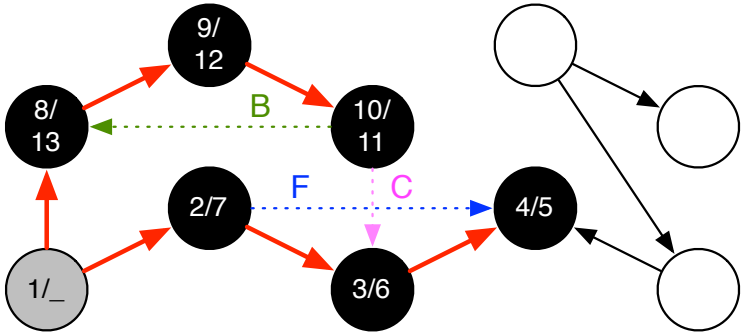


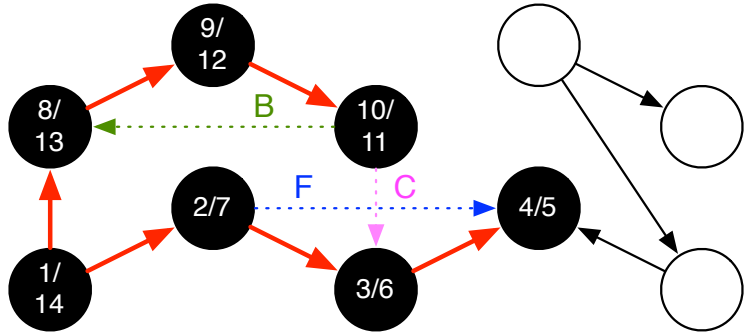


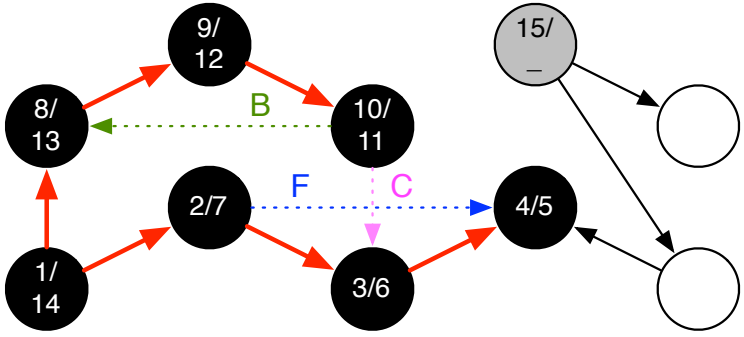


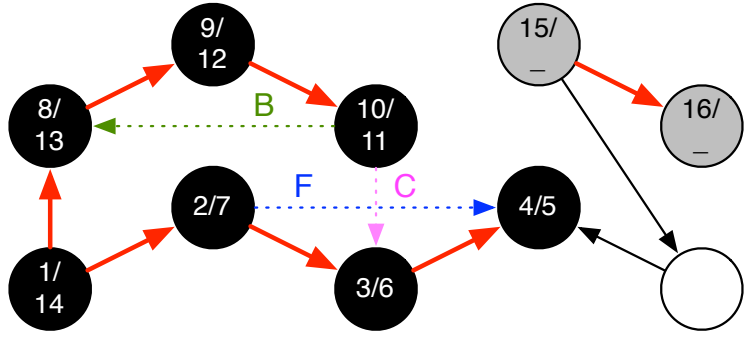


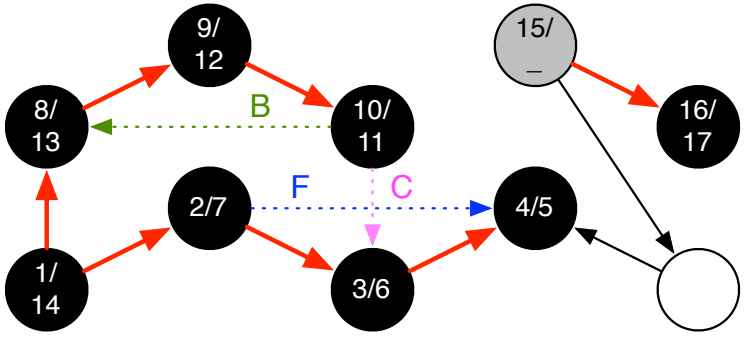
Beispiel DFS 4

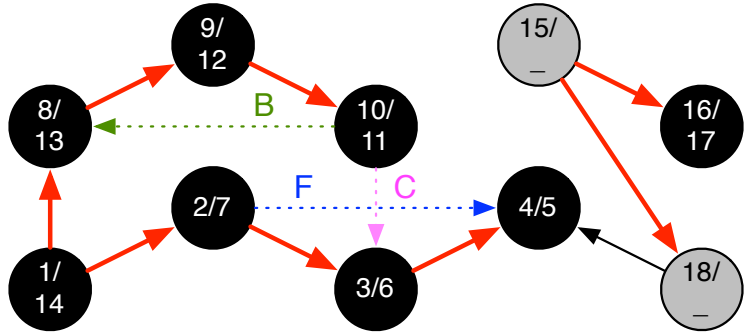




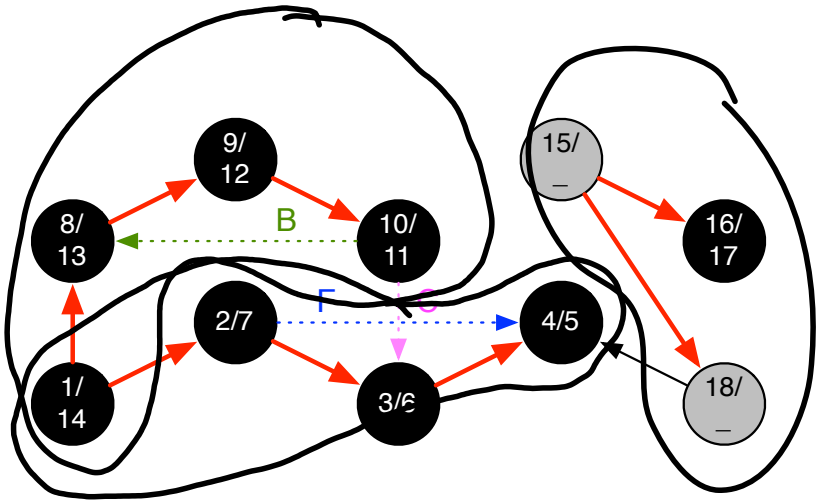


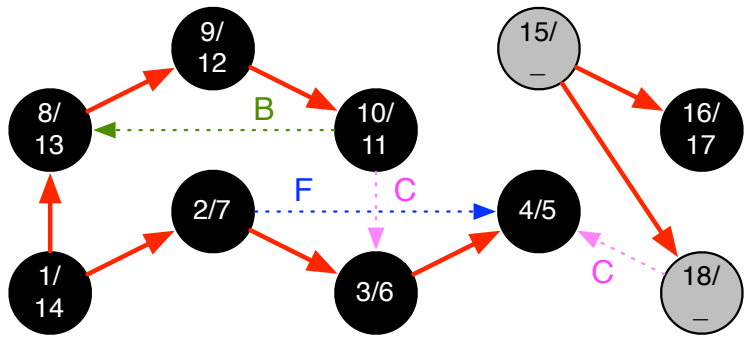


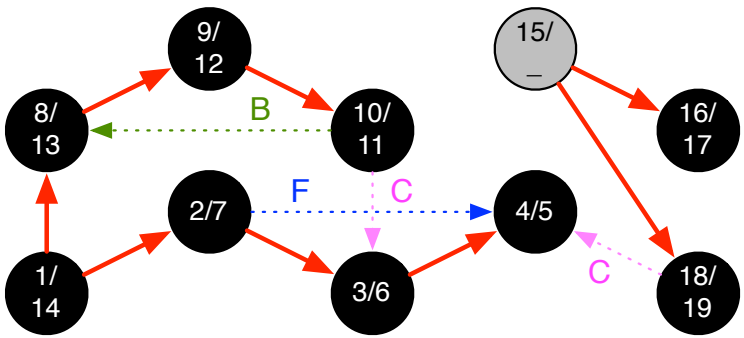


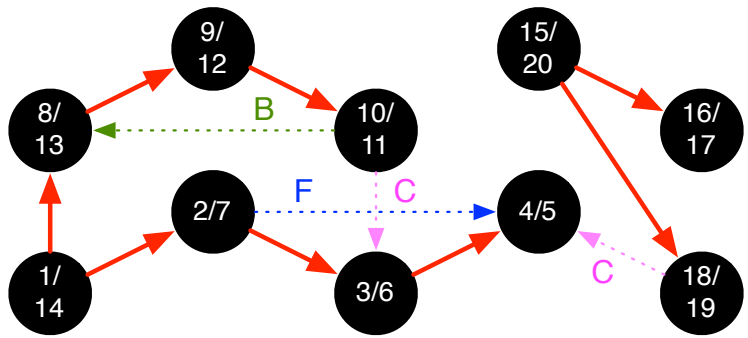


Beispiel DFS 5









Programm heute

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche

Breitensuche im “Stern”-Beispiel

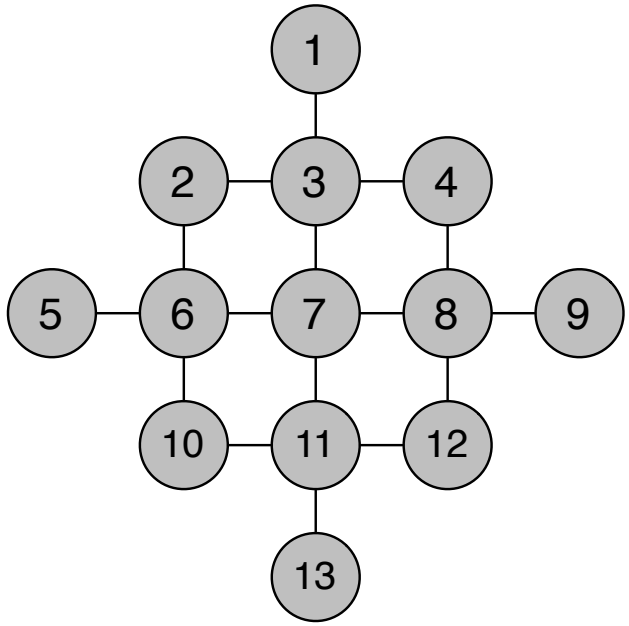
- Segmentierung von “Sternen”

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- neuer Ansatz:
  - anstatt direkt nächsten Nachbar ansteuern, erst alle aktuellen Nachbarn abarbeiten

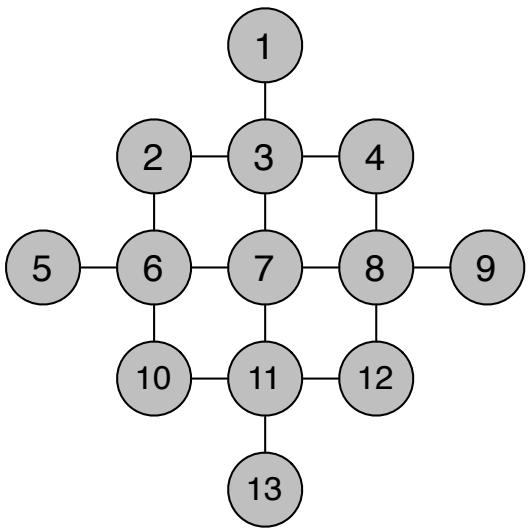
    $\rightarrow$ Breitensuche

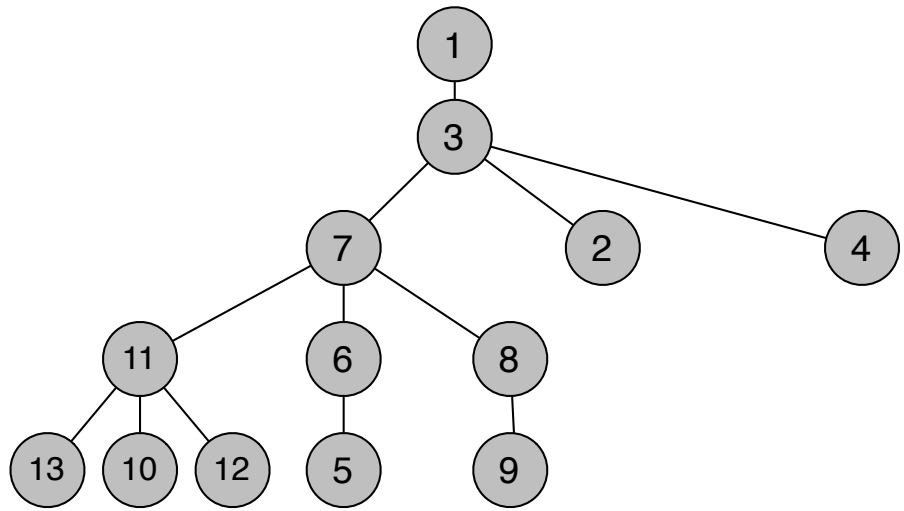
Breitensuche im “Stern”-Beispiel: Ablauf



1. starte mit Pixel 1
2. besuche alle Nachbarn von aktuellem Pixel (Schema: oben, unten, links, rechts)
3. arbeite die Nachbarn der Nachbarn in selber Reihenfolge ab

Breitensuche im “Stern”-Beispiel: als Baum





Ansatz: Breitensuche bzw. Breadth-First Search (BFS)

Breitensuche (BFS)

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph (gerichtet oder ungerichtet).

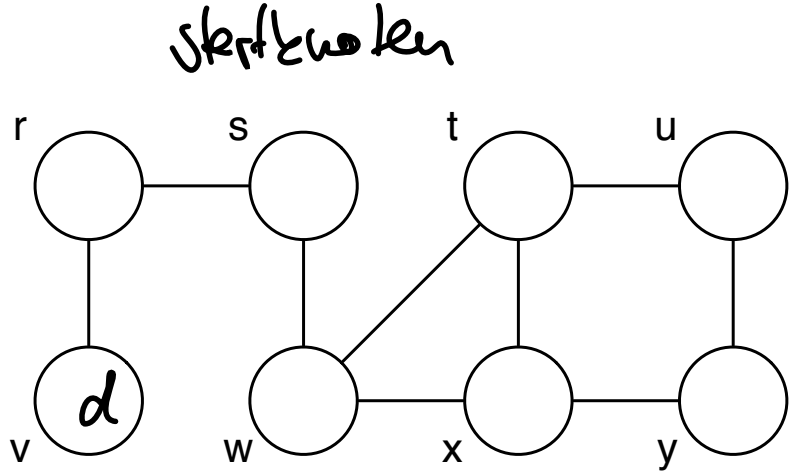
- Startknoten $s \in V$
- Graph repräsentiert mit Adjazenzliste adj
- jeder Knoten hat Farb-Markierung farbe:
  - weiss = noch nicht besucht
  - grau = besucht, gerade in Bearbeitung
  - schwarz = besucht, fertig bearbeitet
- jeder Knoten hat Vorgänger in Besuch-Reihenfolge pred
- (optional) zusätzliche Knoten-Markierung d
  - Distanz (in Anzahl von Kanten) von Startknoten s
- Hilfsmittel: Queue Q

Algorithmus BFS

Input: Graph $G = (V, E)$, Startknoten $s \in V$
Output: Vorgänger-Liste pred, Markierung d
BFS(G, s):

```
for each (Knoten v ∈ V) { // Initialisierung
    farbe[v] = weiss; pred[v] = null; d[v] = ∞;
}
farbe[s] = grau; d[s] = 0;
Q = initialize(); Q.enqueue(s);
while ( !Q.isEmpty() ) {
    u = Q.dequeue();
    for each (v ∈ adj[u]) { // besuche alle Nachbarn
        if (farbe[v] == weiss) {
            farbe[v] = grau; d[v] = d[u] + 1; pred[v] = u;
            Q.enqueue(v);
        }
    }
    farbe[u] = schwarz; // u ist erledigt
}
```

BFS: Beispiel-Ablauf 1

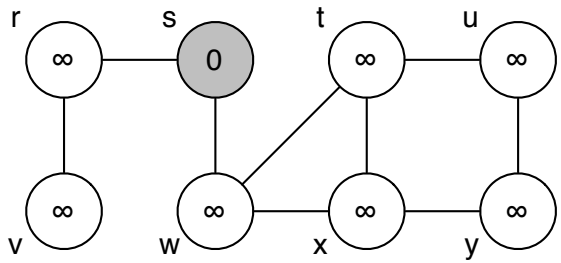


Adj. Liste

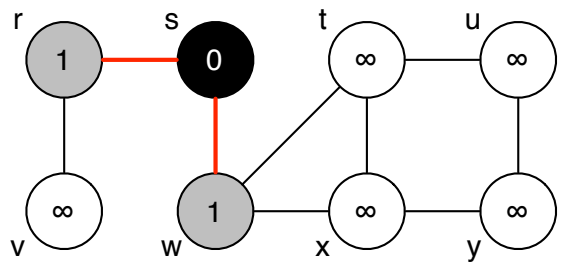
S -> W -> r

- Knoten r, s, t, u, v, w, x, y
- farbe direkt im Knoten markiert
- d im Knoten notiert
- pred markiert durch rote Kanten
- Startknoten s

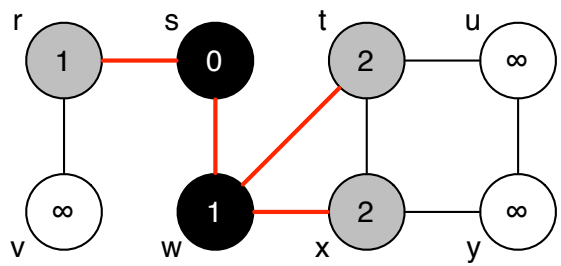
BFS: Beispiel-Ablauf 2



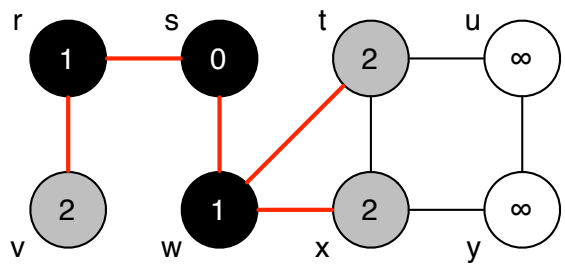
Q: s



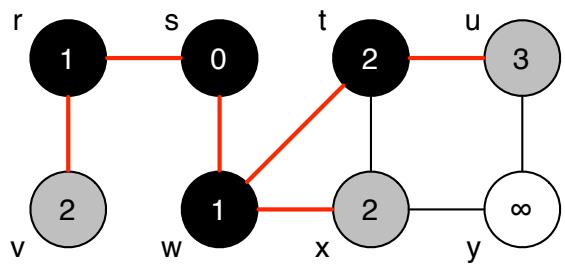
Q: w r



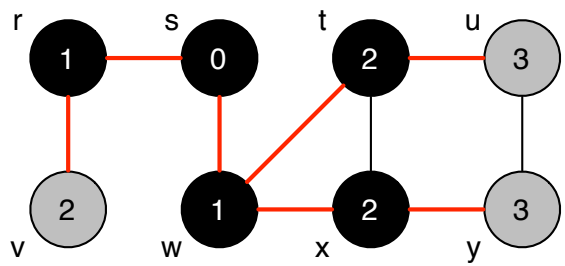
Q: r t x



Q: t x v

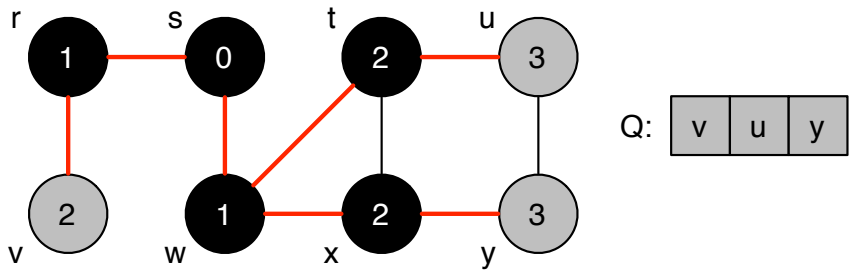


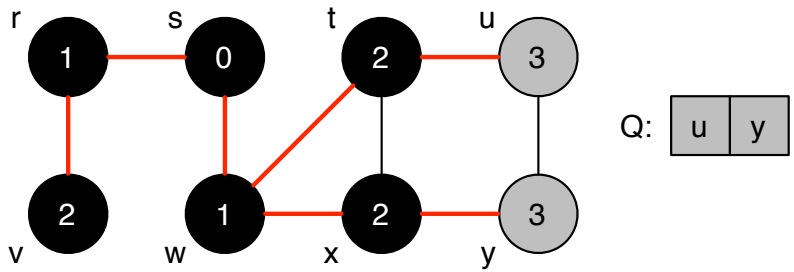
Q: x v u

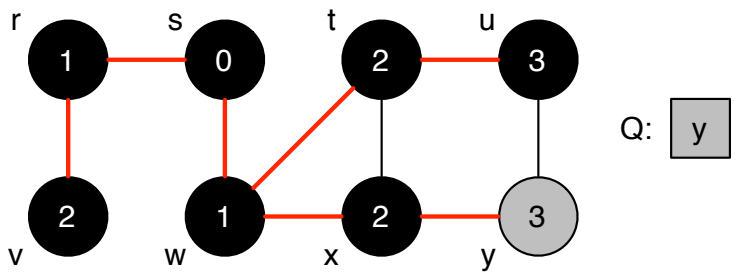


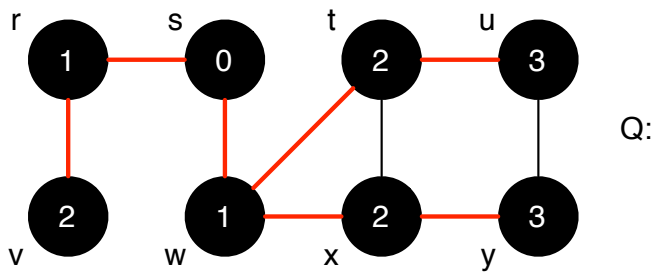
Q: v u y

BFS: Beispiel-Ablauf 3









BFS Eigenschaften

Sei $G = (V, E)$ Graph.

- BFS erzeugt Spannbaum $G' = (V, E')$
  - Knoten sind V, Kanten E' ergeben sich aus pred
  - im Beispiel-Ablauf: Knoten V sind schwarz, Kanten E' sind rot

- ausgehend von Startknoten s wird nur Zusammenhangskomponente von Graph durchsucht!
- falls G nicht zusammenhängend, wird kein Spannwald berechnet!

- falls Stack statt Queue in BFS: DFS-artiger Algorithmus
  - Unterschied: nur in Zusammenhangskomponente

Komplexität von BFS

- **BFS** erste Schleife (for) wird $|V|$ mal durchlaufen: $\Theta(|V|)$
- zweite geschachtelte Schleife (while und for) wird im schlechtesten Fall je einmal für jeden Knoten in Adjazenzliste aufgerufen

$$\sum_{v \in V} |\text{adj}(v)| = \Theta(|E|)$$

- Gesamtlaufzeit: $\Theta(|V| + |E|)$

Anwendungen von BFS

- Besuche alle Knoten in Zusammenhangskomponente von Graph
  - ausgehend von Startknoten s
- Berechne Länge der kürzesten Pfade (d.h. Anzahl von Kanten)
  - ausgehend von Startknoten s
  - kürzeste Pfade selbst erfordern Modifikation des Algorithmus

Zusammenfassung

7. Fortgeschrittene Datenstrukturen

8. Such-Algorithmen

9. Graph-Algorithmen
   - Tiefensuche
   - Breitensuche