

## Algorithmen und Datenstrukturen

### Aufgabe 1      LUP-Zerlegung

- a) Führen Sie die LUP-Zerlegung der Matrizen  $A, B$  gemäß des In-Place-Algorithmus aus der Vorlesung durch. Geben Sie dabei für jeden Schritt Zwischenergebnisse an für Pivotisierung und aktuelle Teilzerlegung. Bitte geben Sie auch explizit die finalen Matrizen  $L, U$  und  $P$  an!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 20 \\ 6 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Gegeben sei die LUP-Zerlegung der Matrix  $A$ . Berechnen Sie damit die Inverse  $A^{-1}$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Lineare Gleichungssysteme lassen sich direkt mit Gauss-Elimination lösen. Unter welchen Umständen sind Zerlegungs-Methoden mit nachfolgender Lösung z. B. via Vorwärts-/Rückwärts-Substitution besser geeignet als Gauss-Elimination?
- d) Sind Permutationsmatrizen orthogonal?

### Aufgabe 2      Least Squares Curve Fit

- a) Gegeben sei die nachfolgende Menge von Punkten  $(x/y)$ . Berechnen Sie die Ausgleichsgerade  $y = mx + t$  im Least Squares Sinn!

$$P = \{(-1/0), (0/0), (1/1), (2/1), (3/2)\}$$

- b) Sei nun auf den gleichen Punkten eine quadratische Ausgleichskurve im Least Squares Sinne gesucht. Wie ändert sich die mathematische Problemformulierung?
- c) Was ist die Pseudo-Inverse, und wie hängt diese mit den vorherigen Problemstellungen zusammen?

### Aufgabe 3 Pseudoinverse berechnen - SVD

Gegeben sei die Matrix  $A$  und die SVD-Zerlegung  $A = U\Sigma V^T$ . Berechnen Sie die Pseudoinverse von  $A$  unter Verwendung der SVD (entsprechend der Vorlesung).

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 4 Euklidische Transformationen

Gegeben sei die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

mit  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , orthogonal ( $R^T = R^{-1}$ ), und  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ . Die Matrix  $R$  stellt hierbei den Rotations-, der Vektor  $\mathbf{t}$  den Translationsanteil von  $T$  dar. Ein Punkt in 3D, hier dargestellt als homogener Vektor  $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ , kann nun mittels  $T$  entsprechend rotiert und verschoben werden:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie kann nun der transformierte Punkt  $\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{pmatrix}$  wieder in seinen Ausgangszustand versetzt werden? Geben Sie eine optimierte Inversionsformel zur Berechnung von  $T^{-1}$  an!