

Algorithmen und Datenstrukturen

Aufgabe 1 LUP-Zerlegung (Beispiellösung)

- a) Für die Matrix A ergibt sich folgender Ablauf (π bezeichnet im Folgenden den Permutationsvektor):

$$\begin{array}{c} \pi \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \pi \\ \hline 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \pi \\ \hline 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \\ 1/4 & -6/4 & 9/2 \\ 1/2 & 2 & 2 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \\ \\ \begin{array}{c} \pi \\ \hline 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \\ 1/4 & -6/4 & 9/2 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \pi \\ \hline 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c} A \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \\ 1/2 & 2 & 2 \\ 1/4 & -3/4 & 6 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

Die Matrizen für A sind dementsprechend:

$$L_A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ 1/4 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \quad U_A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ & 2 & 2 \\ & & 6 \end{pmatrix} \quad P_A = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrix B erhalten wir:

$$\begin{array}{c} \pi \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left\| \begin{array}{c} B \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 12 & 20 & 20 \\ 6 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \pi \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left\| \begin{array}{c} B \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 12 & 20 & 20 \\ 1/2 & -2 & -3 \\ 1/4 & -3 & -4 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \pi \\ \hline 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c} B \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 12 & 20 & 20 \\ 1/4 & -3 & -4 \\ 1/2 & -2 & -3 \end{array} \right) \end{array} \rightsquigarrow \\ \\ \begin{array}{c} \pi \\ \hline 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c} B \\ \hline \left(\begin{array}{ccc} 12 & 20 & 20 \\ 1/4 & -3 & -4 \\ 1/2 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

Die Matrizen für B sind :

$$L_B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/4 & 1 & \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad U_B = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 20 \\ & -3 & -4 \\ & & -1/3 \end{pmatrix} \quad P_B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Anmerkung: Für Inverse $A^{-1} = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2)$ sind zwei Gleichungssysteme $A\mathbf{X}_i = \mathbf{e}_i \forall i \in \{1, 2\}$ zu lösen. Bei Kenntnis der LUP-Zerlegung $PA = LU$ sind dann jeweils zwei Systeme $L\mathbf{Z}_i = P\mathbf{e}_i$ (1) und $U\mathbf{X}_i = \mathbf{Z}_i$ (2) mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution zu lösen.

$i=1$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

$i=2$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

c) Relevant sind zwei Aspekte: Numerische Stabilität und Geschwindigkeit. In der Reihenfolge besser werdender Stabilität und steigenden Zeitaufwands sind die Verfahren:

- Gauß-Elimination/LU-Zerlegung
- Gauß-Elimination mit partiellem Pivoting/LUP-Zerlegung
- QR-Zerlegung und SVD

Die Cholesky-Zerlegung funktioniert nur in Sonderfällen (ist dort aber sehr effizient!) und entfällt hier in der Betrachtung.

Wenn statt einer Elimination ein stabileres Zerlegungsverfahren benutzt wird, werden die Ergebnisse verlässlicher.

Die Verwendung des jeweils äquivalenten Zerlegungsverfahrens lohnt sich dann, wenn die Matrix für n rechtsseitige Vektoren zu lösen ist, da dann der Aufwand einer Zerlegung und n Substitutionen günstiger wird als der von n Eliminationen.

d) Ja, die Spalten einer Permutationsmatrix sind per Konstruktion paarweise orthonormal.

Aufgabe 2 Least Squares Curve Fit (Beispiellösung)

a) Zur Lösung wird die Vandermonde-Matrix aufgestellt, was zu einem überbestimmten System führt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durch Nutzung der Normalengleichung erhält man ein quadratisches System, das genau zu einer Least-Squares-Lösung führt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Damit also $m = 1/2$ und $t = 3/10$, siehe rote Gerade.

b) Eine quadratische Kurve hätte die Struktur $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$. Damit ergibt sich eine größere Vandermonde-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

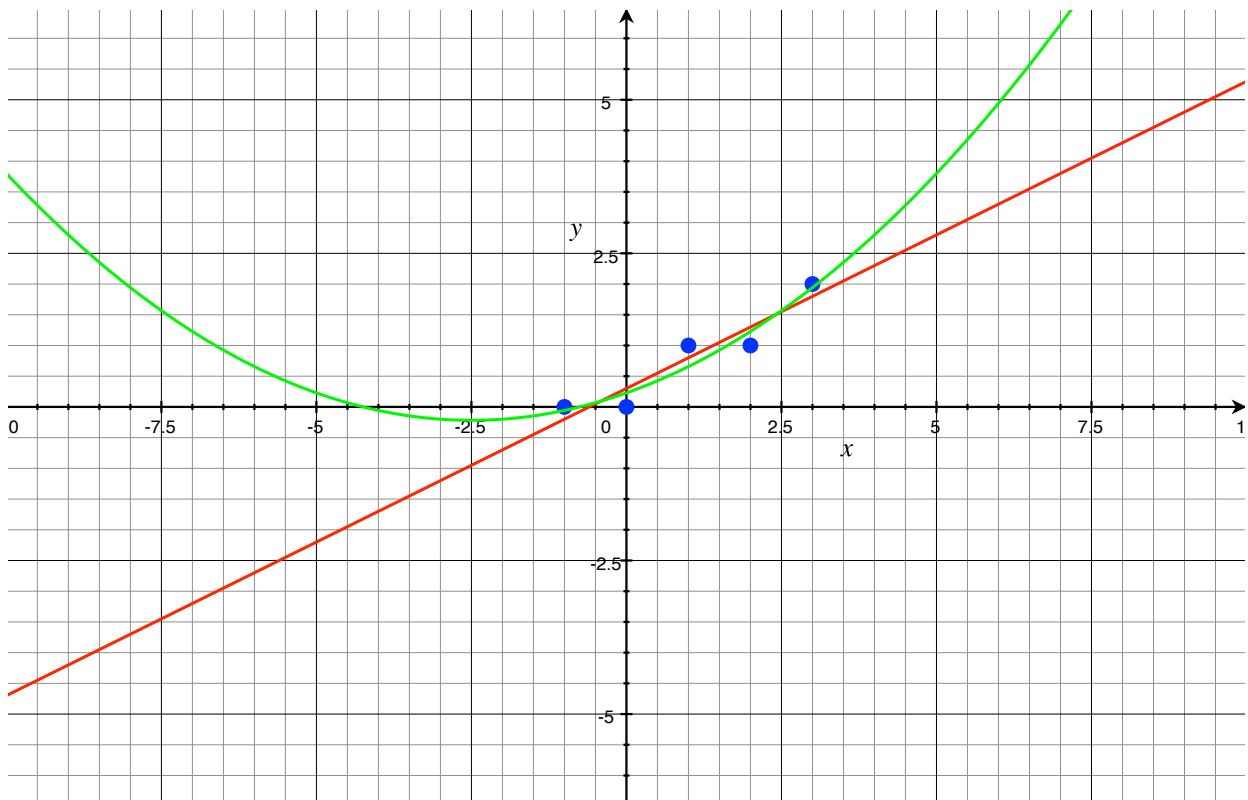
Das weitere Vorgehen entspricht dann wieder dem zuvor beschriebenen, also Lösung der Normalgleichung. Die entsprechenden Werte sind dann $a_0 \approx 0,2286$, $a_1 \approx 0,3571$ und $a_2 \approx 0,0714$, siehe grüne Kurve.

- c) In beiden Fällen hatte man überbestimmte Systeme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und erreichte durch Multiplikation mit der transponierten Matrix A^T die Normalgleichung

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach \mathbf{x} auflösen, und man erhält genau die Pseudo-Inverse A^+ :

$$\mathbf{x} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T}_{=: A^+} \mathbf{b}$$



Aufgabe 3 Pseudoinverse berechnen - SVD (Beispiellösung)

Entsprechend der Vorlesung gilt $A^+ = V \Sigma_+^{-1} U^T$. Mit der gegebenen SVD-Zerlegung ergibt sich:

$$A^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Euklidische Transformationen (Beispiellösung)

Wir haben

$$T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da R invertierbar und damit $\text{rank}(R) = 3$, gilt automatisch $\text{rank}(T) = 4$. Damit ist auch T invertierbar.

Also gilt

$$T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie können wir nun T^{-1} einfach berechnen?

Da

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

gilt auch für das Inverse folgende Struktur:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

mit beliebigem $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A \cdot (R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}) + \mathbf{b} = A \cdot R \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \quad | \text{ Setze } A := R^T \\ &= R^T \cdot R \cdot \mathbf{x} + R^T \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x} + R^T \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \\ \Rightarrow \mathbf{b} &= -R^T \mathbf{t} \end{aligned}$$

Zusammen also:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$