

Reconstruction de surface et régularisation

F. Brunet^{1,2,3} A. Bartoli² R. Malgouyres¹ N. Navab³

brunet@laic.u-clermont1.fr
 adrien.bartoli@univ-bpclermont.fr
 malgouyres@laic.u-clermont1.fr
 navab@cs.tum.edu

¹LAIC

IUT Clermont-Ferrand
 63172 Aubière CEDEX
 FRANCE

²LASMEA

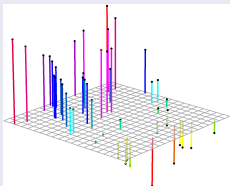
Université Blaise Pascal
 63172 Aubière CEDEX
 FRANCE

³CAMPAR

Technische Universität München
 85748 Garching bei München
 ALLEMAGNE

25 février 2008

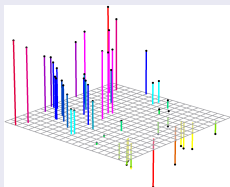
Introduction



Étant donné un ensemble de points « 2.5D » :

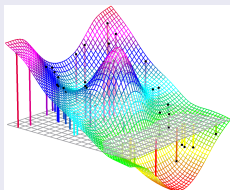
$$(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i$$

Introduction



Étant donné un ensemble de points « 2.5D » :

$$(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i$$



On recherche la surface

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui approxime *au mieux* l'ensemble de points.

- 1 Reconstruction de surface
 - Les données
 - Modèles de surface
 - Reconstruction : une première approche
 - La régularisation

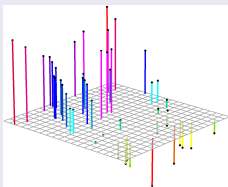
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
 - Validation croisée
 - L-curve

Plan

- 1 Reconstruction de surface
 - Les données
 - Modèles de surface
 - Reconstruction : une première approche
 - La régularisation
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
 - Validation croisée
 - L-curve

Les données « 2.5D »

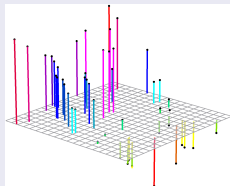
Données
2.5D



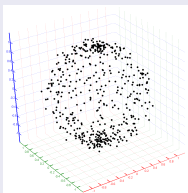
- Centres :
 $(x_i, y_i) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Élévations :
 $z_i \in \mathbb{R}$

Les données « 2.5D »

Données
2.5D



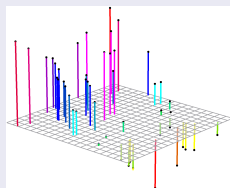
- Centres :
 $(x_i, y_i) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Élévations :
 $z_i \in \mathbb{R}$



- Plus restreint qu'un nuage de points 3D
- Élimine le problème de la *paramétrisation*

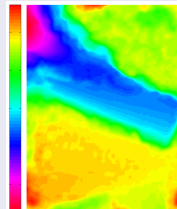
Les données « 2.5D »

Données
2.5D



- Centres :
 $(x_i, y_i) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Élévations :
 $z_i \in \mathbb{R}$

Néanmoins de réelles
applications



Modèles de surface

$$\begin{aligned} f : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y; \mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Modèle de forme connue
- Contrôlé par un *vecteur de paramètres* :
 $\mathbf{p} = [p_1 \ \dots \ p_h] \in \mathbb{R}^h$

Modèles de surface

$$\begin{aligned} f : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y; \mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Modèle de forme connue
- Contrôlé par un *vecteur de paramètres* :
 $\mathbf{p} = [p_1 \ \dots \ p_h] \in \mathbb{R}^h$
- On s'intéresse plus particulièrement aux modèles linéaires :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad \exists \mathbf{v}_{x,y} \in \mathbb{R}^h \quad \text{t.q.} \quad f(x, y; \mathbf{p}) = \mathbf{v}_{x,y}^T \mathbf{p}$$

- Ne présume en rien de la linéarité en (x, y)

Exemple de modèles

Surface de Bézier

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i(m+1)+j+1} B_{i,n}(x) B_{j,m}(y)$$

Base polynomiale de Bézier

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad x \in [0, 1]$$

Exemple de modèles

Produit tensoriel de B-splines

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=-a}^b \sum_{j=-c}^d p_{(i+a)(d+c+1)+j+c+1} N_{i,a+1}(x) N_{j,c+1}(y)$$

Base des B-splines

$$\begin{cases} N_{i,1}(x) = 1 & \text{si } x \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}[\\ N_{i,1}(x) = 0 & \text{si } x \notin [\lambda_i, \lambda_{i+1}[\\ N_{i,k+1}(x) = \frac{x-\lambda_i}{\lambda_{i+k}-\lambda_i} N_{i,k}(x) + \frac{\lambda_{i+k+1}-x}{\lambda_{i+k+1}-\lambda_{i+1}} N_{i+1,k}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de modèles

Fonctions à base radiale

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^h p_i \rho \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right)$$

Base radiale

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \rho(r) \end{aligned}$$

$$\rho(r) = r^2 \log(r) \quad \rho(r) = \exp(-r^2)$$

Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

et un modèle de surface :

$$f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

et un modèle de surface :

$$f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

trouver le vecteur de paramètres $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h$ tel que :

$$\begin{cases} f(x_1, y_1; \mathbf{p}) = z_1 \\ \vdots \\ f(x_n, y_n; \mathbf{p}) = z_n \end{cases}$$

Reconstruction exacte

En supposant que le modèle est linéaire en \mathbf{p}

$$\begin{cases} f(x_1, y_1; \mathbf{p}) = z_1 \\ \vdots \\ f(x_n, y_n; \mathbf{p}) = z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_{x_1, y_1}^T \mathbf{p} = z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{x_n, y_n}^T \mathbf{p} = z_n \end{cases}$$

Le problème revient à résoudre

$$M\mathbf{p} = \mathbf{z}$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x_1, y_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{x_n, y_n}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{h \times n} \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Reconstruction exacte

Mais...

le système linéaire

$$M\mathbf{p} = \mathbf{z}$$

n'a généralement pas de solution exacte.

Un problème de minimisation

On transforme donc notre problème en *problème de minimisation*

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

où \mathcal{E}_d est un terme *d'attache aux données* qui quantifie l'écart entre les données et la surface.

Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données \mathcal{E}_d peut prendre plusieurs formes.

Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données \mathcal{E}_d peut prendre plusieurs formes.

L'erreur uniforme

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i|$$

Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données \mathcal{E}_d peut prendre plusieurs formes.

L'erreur uniforme

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i|$$

La moyenne des résidus au carré

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2$$

Reconstruction par moindres carrés

Si l'on considère la moyenne des résidus au carré comme terme d'attache aux données :

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2$$

La reconstruction de surface peut alors être vu comme un problème de *moindres carrés linéaire*

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \frac{1}{n} \|M\mathbf{p} - \mathbf{z}\|_2^2$$

Reconstruction par moindres carrés

Un problème de moindres carrés linéaire est facilement résolu :

$$\mathbf{p}^* = M^\dagger \mathbf{z}$$

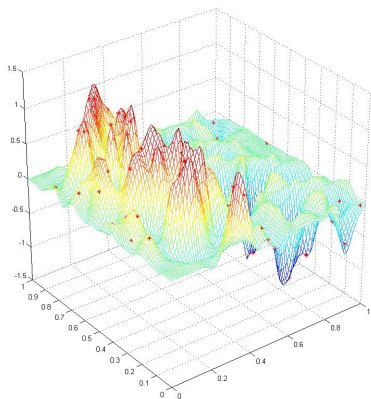
où

$$M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$$

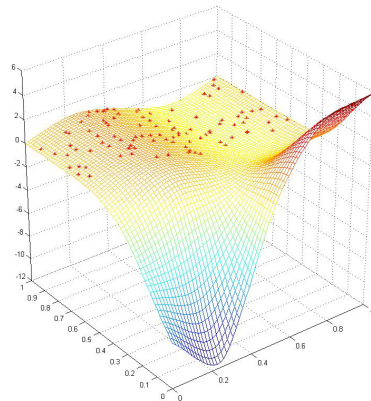
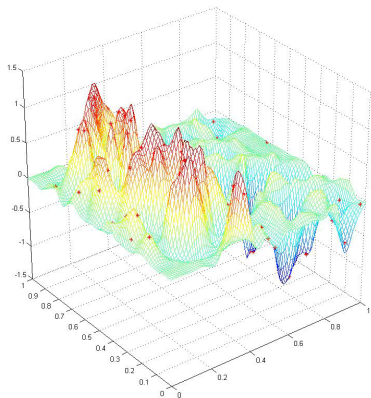
est la matrice pseudo-inverse de M .

Cependant, cette première approche n'est pas suffisante.

Pendant, cette première approche n'est pas suffisante.



Pendant, cette première approche n'est pas suffisante.



Régularisation

On introduit un terme de régularisation \mathcal{E}_r au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

Régularisation

On introduit un terme de régularisation \mathcal{E}_r au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

$\mathcal{E}_r : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}_+$ *quantifie la régularité de la surface.*

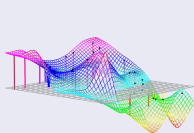
$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

Régularisation

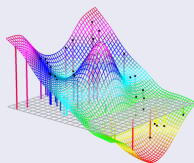
On introduit un terme de régularisation \mathcal{E}_r au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

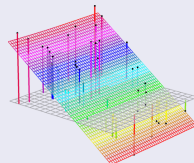
λ : compromis entre attache aux données et régularisation.



$\lambda = 0.0002$

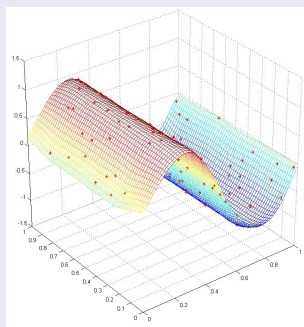
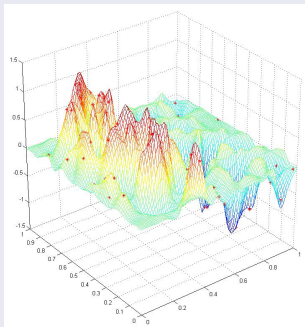


$\lambda = 0.005$

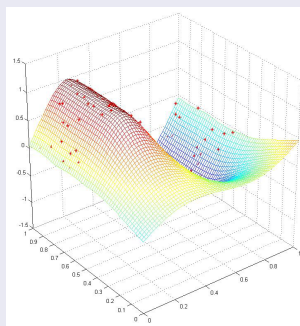
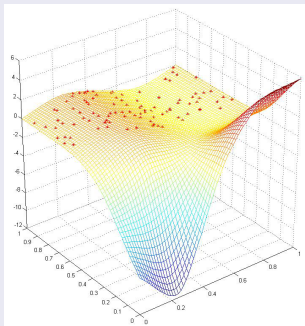


$\lambda = 0.99$

Exemple



Exemple



Résolution du problème régularisé

De la même manière que pour l'attache aux données :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \|\mathbf{M}\mathbf{p} - \mathbf{z}\|_2^2\end{aligned}$$

On peut approximer le terme de régularisation sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \\ &\approx \|\mathbf{R}\mathbf{p}\|_2^2\end{aligned}$$

Résolution du problème régularisé

Le problème de reconstruction de surface régularisée peut alors s'écrire de manière équivalente comme :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left\| \begin{bmatrix} M \\ \frac{\lambda}{1-\lambda} R \end{bmatrix} \mathbf{p} - \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

qui a pour solution :

$$\mathbf{p}^* = \left(M^T M + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T \mathbf{z}$$

Plan

- 1 Reconstruction de surface
 - Les données
 - Modèles de surface
 - Reconstruction : une première approche
 - La régularisation
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
 - Validation croisée
 - L-curve

Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve

Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve
- Ces méthodes sont souvent très coûteuses

Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve
- Ces méthodes sont souvent très coûteuses
- Leur optimisation est parfois difficile

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal λ^* en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal λ^* en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

λ^* va donc être le minimiseur d'une nouvelle fonction de coût $V : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0, 1[} V(\lambda)$$

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal λ^* en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

λ^* va donc être le minimiseur d'une nouvelle fonction de coût $V : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0, 1[} V(\lambda)$$

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left(\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

Qu'est ce qu'une surface bien reconstruite ?

C'est une surface qui *généralise correctement*.

La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

Qu'est ce qu'une surface bien reconstruite ?

C'est une surface qui *généralise correctement*.

- La validation croisée tente de quantifier cette capacité à généraliser.

Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation λ donné

Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation λ donné
- Ajuster la surface en omettant le i -ième point

Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation λ donné
- Ajuster la surface en omettant le i -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis

Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation λ donné
- Ajuster la surface en omettant le i -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis
- Répéter pour tous les points de l'ensemble de données

Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation λ donné
- Ajuster la surface en omettant le i -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis
- Répéter pour tous les points de l'ensemble de données
- Faire la moyenne de tous les écarts élevés au carré

Validation croisée : principe

De manière plus concise :

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}_\lambda^{[i]}) - z_i)^2$$

où $\mathbf{p}_\lambda^{[i]}$ est le vecteur de paramètres optimal pour l'ensemble de points réduit.

Validation croisée : principe

De manière plus concise :

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}_\lambda^{[i]}) - z_i)^2$$

où $\mathbf{p}_\lambda^{[i]}$ est le vecteur de paramètres optimal pour l'ensemble de points réduit.

Il n'est pas possible d'utiliser directement cette formule !

Le calcul de

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0,1[} V(\lambda)$$

serait bien trop coûteux.

Validation croisée

[Wahba, 1979]

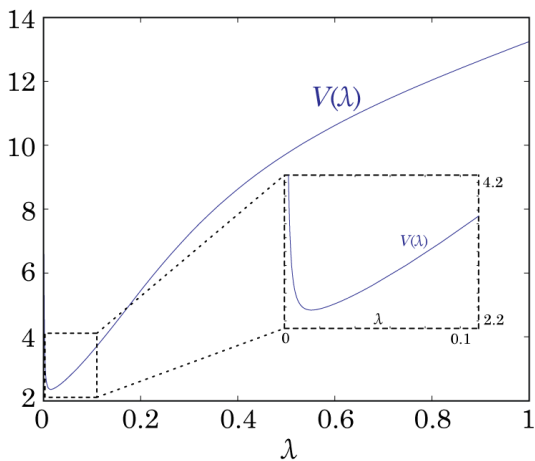
$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \left\| \text{diag} \left(\frac{1}{1 - \text{diag}(H)} \right) (I - H)\mathbf{z} \right\|_2^2$$

où H est la « hat matrix » :

$$H = M \left(M^T M + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}^* &= \left(M^T M + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{z}} &= M \mathbf{p}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\mathbf{z}} = H \mathbf{z}$$

Exemple



Validation croisée

Bonne approche pour

- de petits ensembles de données
- les cas monodimensionnels

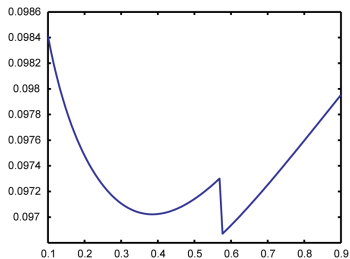
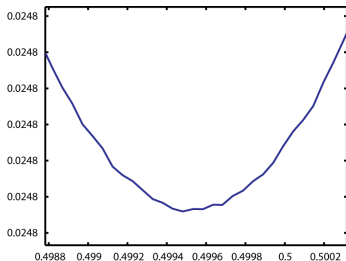
Bien souvent très (trop) coûteux

- inversion de matrices
- perte des matrices éparse

Validation croisée

Difficile à optimiser

- oscillations aux petites échelles
- cas pathologiques



L-curve

Ce que l'on cherche

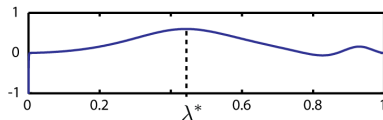
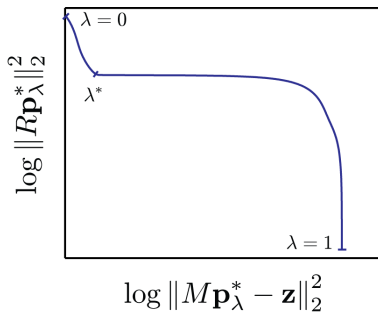
Un bon *compromis* entre attache aux données et régularisation.

- $\mathcal{E}_d(\mathbf{p}_\lambda^*)$ ne doit pas être trop grand
- $\mathcal{E}_r(\mathbf{p}_\lambda^*)$ ne doit pas être trop grand non plus

L-curve

Idee [Lawson et Hanson, 1974]

Mettre en relation l'attache aux données et la régularité.



L-curve : plus formellement

$$\rho(\lambda) = \log \|M\mathbf{p}_\lambda^* - \mathbf{z}\| \quad \eta(\lambda) = \log \|R\mathbf{p}_\lambda^*\|$$

$$\left\{ (\rho(\lambda), \eta(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in [0, 1[\right\}$$

$$\kappa(\lambda) = 2 \frac{\rho'(\lambda)\eta''(\lambda) - \rho''(\lambda)\eta'(\lambda)}{(\rho'(\lambda)^2 + \eta'(\lambda)^2)^{3/2}}$$

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda \in [0, 1[} \kappa(\lambda)$$

L-curve

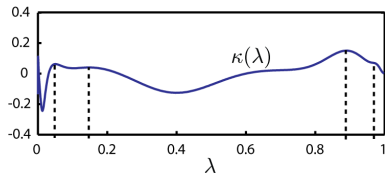
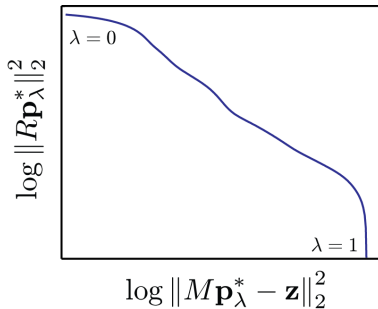
Bien plus rapide que la validation croisée

- pas de matrice à inverser (dans le critère)
- exploitation des matrices éparse

Très souvent « pathologique »

- nombreux maxima

L-curve



Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)

Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)
- Les méthodes actuelles fonctionnent bien pour de petits ensemble de données

Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)
- Les méthodes actuelles fonctionnent bien pour de petits ensemble de données
- De nouvelles approches rapides sont possibles en exploitant le compromis entre attache aux données et régularisation.

