

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Optimale Steuerung eines Gleiters beim Eintritt in die Marsatmosphäre unter Verwendung nichtglatter Modelle

Diplomarbeit
im Studiengang Technomathematik

von
Andreas Keil

Aufgabensteller: PD Dr. Rainer Callies
Betreuer: PD Dr. Rainer Callies
Abgabetermin: 15. April 2005

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

München, 15. April 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1. Theoretische und numerische Grundlagen	5
1.1. Lösungsansätze und Verfahrenseinteilung	5
1.2. Theorie der optimalen Steuerung	6
1.2.1. Problemstellung	6
1.2.2. Ankopplung der Nebenbedingungen	7
1.2.3. Allgemeine Variation	8
1.3. Mehrzielmethode	11
1.4. Kombiniertes Newton- und Bisektions-Verfahren	13
1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines	13
1.5.1. Von den klassischen Splines zu Funktionen mit niedrigerer Differenzierbarkeit	13
1.5.2. Auswertung von Funktionen in B-Spline-Darstellung	16
1.5.3. Tensorproduktsplines	18
2. Modellbildung	21
2.1. Marsoberfläche, -gravitation und -rotation	21
2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit	21
2.2.1. Dichte	24
2.2.2. Schallgeschwindigkeit	25
2.3. Raumgleiter X-38/CRV	27
2.3.1. Kräfte	28
2.3.2. Aerodynamische Beiwerte	29
2.3.3. Wärmestrom	30
2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen	32
2.4.1. Koordinatensysteme	32
2.4.2. Kinematik	36
2.4.3. Dynamik	37
2.4.4. Zusammenfassung der Bewegungsdifferentialgleichungen	40
3. Optimalsteuerungsproblem	41
3.1. Problemstellung	41
3.1.1. Zielfunktional	41
3.1.2. Nebenbedingungen	41
3.1.3. Steuerbeschränkungen	42
3.2. Ankopplung der Nebenbedingungen	43
3.3. Innere Punktbedingungen	43
3.3.1. Nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit	44
3.3.2. Nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte	45

3.3.3. Punktweise Beschränkung der Höhe	45
3.4. Adjungierte Differentialgleichungen	46
3.5. Optimale Steuerung	48
3.5.1. Anstellwinkel α	49
3.5.2. Querneigungswinkel μ	51
3.5.3. Zusammenfassung der Schaltbedingungen	52
4. Formulierung des Randwertproblems	55
5. Homotopiekette	57
5.1. Errechnung einer Startlösung mit fester Steuerung	58
5.1.1. Allgemeines Vorgehen	58
5.1.2. Konkretisierung der Arbeitsschritte für das vorliegende Problem	59
5.2. Freigabe der Steuerungen	62
5.3. Verfeinerung der Approximationen und Einführung einer Bremsklappe – Referenzlösung	63
5.4. Einführung einer punktwisen Höhenbeschränkung	64
A. Graphen und Stützwerte der Lösungstrajektorien	67
A.1. Startlösung	67
A.2. Referenzlösung	72
B. Nomenklatur und Konstanten	79
Literaturverzeichnis	83

Verzeichnis der Definitionen, Sätze und Probleme

Problem 1.1	Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen	6
Problem 1.2	Freies Problem	7
Definition 1.3	Hamiltonfunktion	7
Definition 1.4	Variationen	8
Satz 1.5	Allgemeine Variation	9
Folgerung 1.6	9
Folgerung 1.7	Hamiltonfunktions-Test	10
Problem 1.8	Mehrpunktrandwertproblem	11
Definition 1.9	Spline	14
Satz 1.10	Dimension des Splineraums	14
Definition 1.11	B-Splines	14
Lemma 1.12	Differenzierung von B-Splines	15
Satz 1.13	Basis des Splineraums	15
Satz 2.1	Zeitableitung in rotierenden Systemen	36
Satz 3.1	49
Definition 5.1	Homotopie	57

Abbildungsverzeichnis

0.1.	3D-Visualisierung der Referenztrajektorie	2
1.1.	Veranschaulichung der Mehrzielmethode	13
1.2.	Zur rekursiven Berechnung von B-Splines	14
1.3.	B-Spline-Basis zur Approximation der Schallgeschwindigkeit	16
1.4.	Tableau zur Auswertung der nicht-negativen B-Splines am Punkt $x \in [\eta_j, \eta_{j+1})$	17
2.1.	Mosaik aus Viking 1 Orbiter-Bildern des Mars	22
2.2.	Atmosphärendaten der Pathfinder-Mission inkl. einer Bodenmessung	23
2.3.	Daten und Approximation der Dichte	24
2.4.	Errechnete Schallgeschwindigkeitsdaten und Approximation	27
2.5.	Schematische Darstellung des X-38-Gleiters	28
2.6.	Verfeinerte Approximation der aerodynamischen Beiwerte	31
2.7.	Experimentelle Aufheizung eines X-38-Modells	32
2.8.	Inertial- und marsfestes System	34
2.9.	Marsfestes und Tangentialsystem	35
2.10.	Tangential- und aerodynamisches System	36
3.1.	Beispiele für verschiedene Verläufe von Schaltfunktionen und zugehörige mögliche Schaltstrukturen	54
5.1.	Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf der Startlösung	61
5.2.	Lösungskurven zur Referenzlösung	65
A.1.	Startlösung – Zustände	68
A.2.	Startlösung – Adjungierte Variablen	69
A.3.	Startlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen	70
A.4.	Startlösung – Sonstige Größen	71
A.5.	Referenzlösung – Zustände	74
A.6.	Referenzlösung – Adjungierte Variablen	75
A.7.	Referenzlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen	76
A.8.	Referenzlösung – Sonstige Größen	77
A.9.	Referenzlösung – 3D-Visualisierung der Trajektorie	78

Tabellenverzeichnis

2.1. Bestandteile der Marsatmosphäre	25
5.1. Randbedingungen für die Startlösung	61
5.2. Randbedingungen für die Referenzlösung	64
B.1. Notation	79
B.2. Variablen	80
B.3. Modellfunktionen	81
B.4. Modellkonstanten	81
B.5. Variable Splineparameter für die nichtglatten Modelle	81
B.6. Verwendete physikalische Konstanten	82

Vorwort

The Eagle has landed

*(Aus Neil Alden Armstrongs erstem
Funkspruch von der Mondoberfläche)*

Zusammenfassung

Dieser erste Funkspruch von der Mondoberfläche wurde von Neil Armstrong gesendet, nachdem er die Landefähre „Eagle“ sicher dort aufgesetzt hatte. Da der Mond keinerlei Atmosphäre hat, wurden Bremsraketen und Steuerdüsen verwendet, um sie abzubremesen. Auf der Erde hingegen ist eine relativ dichte Atmosphäre vorhanden, die es beispielsweise dem Space Shuttle erlaubt, den größten Teil seiner kinetischen Energie mit Hilfe der Luftreibung beim Eintritt abzubauen bzw. in Wärme umzuwandeln.

Der Mars wiederum reiht sich – hinsichtlich der Atmosphärendichte – zwischen dem Mond und der Erde ein. Seine Atmosphäre ist so dünn, dass sie gerade noch ausreicht, um einen größeren Teil der kinetischen Energie eines Vehikels durch Luftreibung abzubauen. Dieses Unterfangen gestaltet sich aber aus mehreren Gründen wesentlich schwieriger als auf der Erde:

- Da die Atmosphäre erst in sehr geringer Höhe eine ausreichende Dichte besitzt, muss mit hoher Geschwindigkeit relativ dicht über Grund geflogen werden.
- Die Vorhersage der Luftdichte ist nur mittels Modellen möglich. Unmittelbare Messungen stehen im Allgemeinen nicht zur Verfügung.
- Auf dem Mars werden häufig lokale Stürme beobachtet, die damit nicht nur Dichteschwankungen hervorrufen, sondern durch starke Winde auch das Erreichen eines vorgegebenen Landeplatzes erschweren.

Zumindest das letztgenannte Problem könnte durch Verwendung eines gut manövrierbaren Vehikels abgemildert werden. Daher wird in dieser Arbeit, basierend auf einer Idee von R. Callies [7], erstmals der Eintritt eines sog. „lifting body“, also eines Gleiters, der den Auftrieb über seinen deltaförmigen Rumpf erzeugt, betrachtet. Sein Vorteil gegenüber den, bei bisherigen Marsmissionen verwendeten, Kapseln ist v.a. die erhöhte Querreichweite. Damit soll es gelingen, einen gegebenen Landplatz auch unter ungünstigen Voraussetzungen noch zu erreichen. Dieses Ziel wurde bei der Beagle-Mission im Dezember 2003 offensichtlich nicht erreicht. Der Kontakt zur Landeeinheit konnte nicht hergestellt werden, und die Sonde blieb verschollen.

Da kein Projekt zum Bau eines Marslanders in der gewählten Konfiguration existiert, mussten die für die Steuerung relevanten Daten eines nicht zu diesem Zweck entwickelten Gleiters – der X-38 – verwendet werden. Durch Skalierung der X-38 auf die Größe einer Marssonde kann so ein Modell für die gedachte Landeeinheit erstellt werden.

Wesentlicher Teil dieser Arbeit war nicht nur die Modellierung der physikalischen Eigenschaften des Gleiters, sondern auch der Marsatmosphäre. Dazu wurden Daten der Pathfinder-Mission

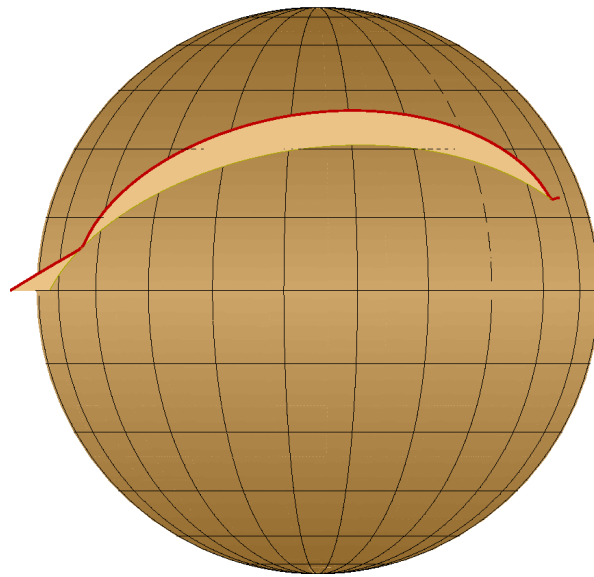


Abbildung 0.1.: 3D-Visualisierung der Referenztrajektorie

verwendet. Für beide Modelle wurden nichtglatte Approximationen gewählt, die eine gesonderte Betrachtung im Formalismus der Optimalsteuerung erfordern.

Die zu bestimmende optimale Steuerung sollte die Aufheizung im Staupunkt minimieren, da dieser Wert die notwendige Isolation beeinflusst. Als Steuerungen standen der Querneigungs- und der Anstellwinkel zur Verfügung. Die Eintrittsbedingungen sehen einen direkten Anflug von einer interplanetaren Bahn vor. Dieser erfolgt mit relativ hoher Geschwindigkeit, um die Reisezeit zwischen Erde und Mars möglichst gering zu halten. Die Endbedingungen wurden so gewählt, dass der Landeplatz von Pathfinder erreicht und die Öffnung eines Fallschirms zum Abbau der Restenergie ermöglicht wird. Es hat sich herausgestellt, dass für die vorgegebenen Steuerbeschränkungen und dem Ziel der Minimierung der Aufheizung eine Trajektorie mit einem stark ausgeprägten Wiederaufstieg (engl. „skip“) optimal ist. Ein Eindruck der Referenzlösung kann in Abbildung 0.1 gewonnen werden.

Als „Nebenprodukt“ dieser Arbeit entstand ein neues Verfahren zur Errechnung einer Startlösung. Es ist zwar nicht universell einsetzbar, war für das vorliegende Problem aber besser geeignet als der Übergang von einem anderen Optimalsteuerungsproblem. Es beruht auf der Beobachtung, dass eine mit fest vorgegebener Steuerung errechnete Zustandstrajektorie als die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems betrachtet werden kann, wenn die Steuerung durch die Problemstellung auf die gewählten Werte festgelegt ist. Daher eignet sich dieses Verfahren insbesondere zur Behandlung von Problemen mit starken Steuerbeschränkungen. Im vorliegenden Fall sollte beispielsweise der Anstellwinkel stark beschränkt werden, um die Verschiebung des Staupunktes in Grenzen zu halten. Das neue Verfahren zur Errechnung einer Startlösung wurde bereits erfolgreich in einer weiteren Diplomarbeit am Lehrstuhl verwendet. Sein Einsatzbereich könnte eventuell auch auf den Übergang von direkten zu indirekten Verfahren erweitert werden.

Struktur der Arbeit

In **Kapitel 1** werden die zur Lösung der Aufgabenstellung verwendeten theoretischen und numerischen Hilfsmittel vorgestellt und kurz erklärt.

Die komplette Modellbildung wird in **Kapitel 2** durchgeführt. Sie umfasst sowohl die Approximation der verwendeten Kennlinien und -felder als auch Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen.

Kapitel 3 enthält die Zusammenfassung der vorliegenden Problemstellung sowie die Anwendung der in Kapitel 1 hergeleiteten Optimalitätsbedingungen auf dieses Problem.

Das resultierende Mehrpunkttrandwertproblem wird in **Kapitel 4** noch einmal zusammengefasst.

Die Arbeitsschritte, die bis zur Errechnung Referenzlösung durchgeführt wurden, sind in **Kapitel 5** beschrieben. Dabei wird insbesondere Wert auf die Darstellung des Verfahrens zur Berechnung der Startlösung und Freigabe der Steuerungen gelegt.

Danksagung

Mein besondere Dank gilt Herrn PD Dr. Rainer Callies für die interessante und herausfordernde Aufgabenstellung sowie die Überlassung des Programmpaketes JANUS 1.02.

Dem Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung der Technischen Universität München danke ich für die Überlassung der Aerodynamikdaten der X-38.

Schließlich bin ich meiner Familie, meiner Freundin und allen guten Freunden im Rupiheim dankbar, deren Aufmunterung mir über die schwierigen Phasen meiner Diplomarbeit geholfen.

Kapitel 1

Theoretische und numerische Grundlagen

Zuerst sollen sowohl die theoretischen als auch die numerischen Hilfsmittel erklärt werden, die zur Lösung des vorliegenden Problems verwendet wurden.

1.1. Lösungsansätze und Verfahrenseinteilung

Grundsätzlich können die Ansätze zur numerischen Lösung von Problemen der optimalen Steuerung in die beiden Klassen der *direkten* und *indirekten* Verfahren eingeteilt werden.

Direkte Verfahren basieren auf Parametrisierungen der Funktionenräume (für die Steuerungen und evtl. auch die Zustände), so dass das ursprünglich unendlichdimensionale in ein endlichdimensionales Optimierungsproblem überführt wird. Zur numerischen Lösung kann anschließend ein Verfahren der nichtlinearen Optimierung verwendet werden.

Indirekte Verfahren dagegen verwenden die Variationsrechnung, um Lösungen im ursprünglichen, unendlichdimensionalen Funktionenraum zu finden. Unter der Annahme, dass eine optimale Lösung existiert, wird diese in eine Umgebung eingebettet. Die anschließende Differentiation nach den Einbettungsparametern liefert die notwendigen Bedingungen zur Identifizierung eines Extremums¹. Die Bedingungen der zweiten Variation schränken die Menge der Lösungskandidaten noch weiter ein. Eine analytische Lösung der durch die Anwendung der Optimalitätsbedingungen entstehenden Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen ist nur bei sehr einfachen Aufgabenstellungen möglich. Bei technischen Anwendungen, wie im vorliegenden Fall der Raumfahrt, muss auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden. Hier hat sich die in Abschnitt 1.3 beschriebene Mehrzielmethode als am besten geeignetes Verfahren herausgestellt.

Direkte und indirekte Verfahren haben gemeinsam, dass sie nur lokale Minima finden können. Außerdem entstehen beide durch die Anwendung der gleichen mathematischen Methoden, nämlich Diskretisierung und Auswertung von Optimalitätsbedingungen. Nur die Reihenfolge der Anwendung dieser Methoden unterscheidet die Herleitung direkter und indirekter Verfahren.

Der Vorteil direkter Verfahren liegt in der leichteren Anwendbarkeit: Der Benutzer benötigt keine Kenntnisse der Variationsrechnung oder optimalen Steuerung und umgeht das Problem, bei indirekten Verfahren benötigte, sinnvolle Schätzungen für die Werte der sog. adjungierten Variablen bereitstellen zu müssen. Allerdings wird das mit einem (durch die Parametrisierung verursachten) Genauigkeitsverlust erkaufte, der zum Teil erheblich sein kann.

¹Hinreichende Bedingungen sind zwar bekannt [9], im Allgemeinen aber zu aufwändig für praktische Probleme.

In der vorliegenden Arbeit findet das indirekte Verfahren der Variationsrechnung und optimalen Steuerung Anwendung. Daher beschränken sich alle folgenden Ausführungen auf diese Verfahrensklasse.

1.2. Theorie der optimalen Steuerung

Ein Standardwerk zur Theorie der optimalen Steuerung ist [3]. Die folgende Darstellung ist jedoch im Wesentlichen [9] entnommen.

Die Optimalsteuerung ist ein Spezialfall der Variationsrechnung, bei der die zu optimierenden Funktionen $\varphi : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ in Zustände $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ und Steuerungen $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)^\top$ eingeteilt werden. Zustandsvariablen sind dabei diejenigen Größen, deren Ableitung nur in Nebenbedingungen in Form von expliziten Differentialgleichungen auftritt, Steuervariablen solche, deren Ableitung überhaupt nicht auftritt. Definiert man die Funktionsräume

$\mathcal{C}_c^1([t_0, t_f], \mathbf{R}^n) :=$ Menge aller Funktionen $[t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{R}^n$,
die überall stetig und fast überall stetig differenzierbar sind

$\mathcal{C}_p^0([t_0, t_f], \mathbf{R}^k) :=$ Menge aller Funktionen $[t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{R}^k$,
die bis auf endlich viele Sprungstellen überall stetig sind

$\mathcal{C}_p^1([t_0, t_f], \mathbf{R}^n) :=$ Menge aller Funktionen $[t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{R}^n$,
die bis auf endlich viele Sprungstellen überall stetig differenzierbar sind

so gelte im Folgenden für die Zustände und Steuerungen stets

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C}_c^1([t_0, t_f], \mathbf{R}^n), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{C}_p^0([t_0, t_f], \mathbf{R}^k).$$

1.2.1. Problemstellung

Zunächst wird folgendes Problem betrachtet:

Problem 1.1 (Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen)

Minimiere

$$I(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = g(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt$$

mit (fester oder freier) Anfangs- und Endzeit t_0 bzw. t_f und unter Beachtung der Randbedingungen

$$x_i(t_0) = x_{0,i}, \quad x_j(t_f) = x_{f,j}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad I, J \subset \{1, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

der Differentialgleichungs-Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.2)$$

sowie etwaiger innerer Punktbedingungen der Form

$$k_S(t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+) = 0. \quad (1.3)$$

□

Bemerkung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird nur ein einzelner innerer Punkt bei t_S mit den links- und rechtsseitigen Grenzwerten \mathbf{x}_S^- bzw. \mathbf{x}_S^+ betrachtet, da die Bedingungen für weitere innere Punkte analog formuliert werden können.

Das Optimierungsziel wird durch $g(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f)$ und $\int_{t_0}^{t_f} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt$ definiert, wobei die drei Problemklassen

$$\begin{aligned} \text{Lagrange-Problem} & \quad (g = 0, L \neq 0), \\ \text{Mayer-Problem} & \quad (g \neq 0, L = 0), \\ \text{Bolza-Problem} & \quad (g \neq 0, L \neq 0) \end{aligned}$$

unterschieden werden.

1.2.2. Ankopplung der Nebenbedingungen

Alle Nebenbedingungen werden mit sog. *Lagrange-Variablen* (auch *Lagrange-Multiplikatoren* genannt) an das Zielfunktional angekoppelt, um wieder ein freies Problem zu erhalten. So wird die Punktbedingung (1.3) mittels eines Lagrange-Parameters

$$\lambda_S \in \mathbf{R}$$

an g und die Differentialgleichungs-Nebenbedingungen (1.2) mit den Lagrange-Funktionen

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}_p^1([t_0, t_f], \mathbf{R}^n)$$

(auch als *adjungierte Variablen* bezeichnet) an L angekoppelt, und man erhält das nunmehr freie Variationsproblem

Problem 1.2 (Freies Problem)

Minimiere

$$\tilde{I}(t_0, \mathbf{x}_0, t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+, \lambda_S, t_f, \mathbf{x}_f, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

mit

$$\tilde{I}(t_0, \mathbf{x}_0, t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+, \lambda_S, t_f, \mathbf{x}_f, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \tilde{g}(t_0, \mathbf{x}_0, t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+, \lambda_S, t_f, \mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) dt,$$

$$\tilde{g}(t_0, \mathbf{x}_0, t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+, \lambda_S, t_f, \mathbf{x}_f) = g(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) + \lambda_S k_S(t_S, \mathbf{x}_S^-, \mathbf{x}_S^+)$$

und

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^\top (\tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}})$$

als Integranden des erweiterten Zielfunktional. □

Definition 1.3 (Hamiltonfunktion)

Problem 1.2 besitzt die sog. Hamiltonfunktion

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \dot{\mathbf{x}}^\top F_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Bemerkung. In der russischen Literatur und ihren Übersetzungen (wie [37]), sowie z.B. auch in [36], wird die Hamiltonfunktion (wie auch die adjungierten Variablen) mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.

1.2.3. Allgemeine Variation

Ausgehend von der Annahme, dass eine optimale Lösung $\varphi^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)^\top$ für Problem 1.2 existiert, wird diese mit Parametern $\epsilon \in \mathbf{R}^{n+k}$ wie folgt in eine Schar eingebettet:

$$\Gamma : \begin{cases} [\tau_0, \tau_f] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] & \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n+k} \\ (\tau, \epsilon) & \mapsto (\chi(\tau, \epsilon), \Phi(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon)) \end{cases}$$

Dabei sind $\tau_0, \tau_f \in \mathbf{R}$ und $\epsilon_0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ feste Parameter. Für die Teilfunktionen der Schar gelte

- χ ist \mathcal{C}^∞ -Funktion bezüglich τ und ϵ und streng monoton zunehmend bezüglich τ .
- Φ ist \mathcal{C}^∞ -Funktion bezüglich ϵ und stückweise \mathcal{C}^1 -Funktion bezüglich χ (da evtl. Knick / Sprung an einer Stelle t_S).

Außerdem gelte

$$\chi(\tau, \mathbf{0}) = t \quad \text{und} \quad \Phi(t, \mathbf{0}) = \varphi^*,$$

so dass $\epsilon = \mathbf{0}$ der optimalen Lösung entspricht und $\Gamma(\tau, \mathbf{0}) = (t, \varphi^*)$ gilt.

Nach Einbettung des Zielfunktional

$$\begin{aligned} J(\epsilon) := \tilde{I} & \left(\chi(\tau_0, \epsilon), \Phi_{1,\dots,n}(\chi(\tau_0, \epsilon), \epsilon), \right. \\ & \chi(\tau_S, \epsilon), \Phi_{1,\dots,n}(\chi(\tau_S^-, \epsilon), \epsilon), \Phi_{1,\dots,n}(\chi(\tau_S^+, \epsilon), \epsilon), \lambda_S, \\ & \chi(\tau_f, \epsilon), \Phi_{1,\dots,n}(\chi(\tau_f, \epsilon), \epsilon), \\ & \left. \chi(\tau, \epsilon), \Phi_{1,\dots,n}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon), \Phi_{n+1,\dots,n+k}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon), \lambda \right) \end{aligned}$$

muss für die Extremale von Problem 1.2 die Bedingung

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\mathbf{0}} = 0 \tag{1.4}$$

erfüllt sein.

Definition 1.4 (Variationen)

Die ersten Variationen von t , x_i ($i = 1, \dots, n$) und \tilde{I} sind durch

$$\begin{aligned} \delta t(\tau) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[\frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_j}(\tau, \epsilon) \right]_{\epsilon=\mathbf{0}} \\ \delta x_i(\tau) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial \chi}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon) \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_j}(\tau, \epsilon) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \epsilon_j}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon) \right]_{\epsilon=\mathbf{0}} \\ \delta \tilde{I} &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[\frac{\partial J}{\partial \epsilon_j}(\epsilon) \right]_{\epsilon=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

definiert.

Mit Hilfe der abkürzenden Schreibweisen von Definition 1.4 erhält man nach Umformung von Bedingung (1.4) folgenden Satz:

Satz 1.5 (Allgemeine Variation)

Unter der Voraussetzung, dass eine optimale Lösung von Problem 1.2 existiert und $F \in \mathcal{C}^2$ gilt², muss die Bedingung

$$\delta \tilde{I} = \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_0} - H \right)_{t=t_0} \cdot \delta t_0 \quad (1.5a)$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_S} + H^- - H^+ \right)_{t=t_S} \cdot \delta t_S \quad (1.5b)$$

$$+ \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_f} + H \right)_{t=t_f} \cdot \delta t_f \quad (1.5c)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{0,i}} + \lambda_i \right)_{t=t_0} \cdot \delta x_{0,i} \quad (1.5d)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{S,i}^-} - \lambda_i^- \right)_{t=t_S} \cdot \delta x_{S,i}^- + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{S,i}^+} + \lambda_i^+ \right)_{t=t_S} \cdot \delta x_{S,i}^+ \quad (1.5e)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{f,i}} - \lambda_i \right)_{t=t_f} \cdot \delta x_{f,i} \quad (1.5f)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} (H_{x_i} + \dot{\lambda}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \Phi_{i,\epsilon_j}(t, 0, \dots, 0) dt \quad (1.5g)$$

$$+ \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_f} H_{u_i} \cdot \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \Phi_{n+i,\epsilon_j}(t, 0, \dots, 0) dt \quad (1.5h)$$

$$= 0 \quad (1.5i)$$

erfüllt sein.

Die einzelnen Variationen „ $\delta \cdot$ “ sind für Variablen, die durch die Problemstellung festgelegt sind, gleich Null. Produkte für feste Variablen müssen folglich nicht beachtet werden. Da die übrigen Variablen unabhängig voneinander variieren können, müssen die zugehörigen Faktoren jeweils für sich verschwinden. Daraus ergeben sich alle Optimalitätsbedingungen erster Ordnung.

Bemerkung. Damit alle zu nicht-festgelegten Variablen gehörenden δ -Terme unabhängig voneinander frei variieren können, müssen eventuelle Kopplungen (z.B. bei gekoppelten Randdaten) mittels eines Lagrangeparameters an das Zielfunktional angehängt werden. Dadurch wird das Problem wieder frei.

Folgerung 1.6

Aus (1.5h) erhält man die Optimalitätsbedingungen

$$H_u = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

und die Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen ergeben sich nach (1.5g) zu

$$\dot{\lambda} = -H_x. \quad (1.7)$$

²Um hinreichende Bedingungen herleiten zu können, müsste mindestens $F \in \mathcal{C}^3$ gelten.

Die Bedingungen (1.5d) und (1.5f) ergänzen die gegebenen Randbedingungen (1.1) um genau so viele Randbedingungen für die adjungierten Variablen wie nötig sind, um das Mehrpunkt-randwertproblem eindeutig zu bestimmen: Für jeden unbestimmten Anfangs- oder Endzustand $x_i(t_0)$ oder $x_i(t_f)$ folgt eine sog. *Transversalitätsbedingung* für die zugehörige adjungierte Variable $\lambda_i(t_0)$ bzw. $\lambda_i(t_f)$.

Wenn an Punkten im Inneren des Intervalls (t_0, t_f) besondere Bedingungen gestellt werden, müssen die Übergangsbedingungen mit Hilfe von (1.5b) und (1.5e) hergeleitet werden. Das gleiche gilt, wenn die Differenzierbarkeitsforderung an F an einem inneren Punkt nicht erfüllt werden kann (da f z.B. abschnittsweise definiert ist).

Die allgemeine Variation (1.5) bildet die Grundlage für viele weitere Folgerungen wie z.B. die Randbedingungen im Falle gekoppelter Randdaten oder das Aufstellen der Sprungbedingungen für Randstücke von Zustandsbeschränkungen.

Folgerung 1.7 (Hamiltonfunktions-Test)

Wegen Folgerung 1.6 und Definition 1.3 gilt im Falle autonomer (zeitunabhängiger) Probleme

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + H_{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + H_{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + H_{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \dot{\mathbf{x}} + 0 + \tilde{\mathbf{f}}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0.$$

Daher ist die Hamiltonfunktion wegen (1.5b) auf dem gesamten Intervall $[t_0, t_f]$ konstant und bei freier Anfangs- oder Endzeit wegen (1.5a) bzw. (1.5c) sogar identisch Null.

Der Hamiltonfunktions-Test eignet sich hervorragend zur Ergebniskontrolle bei der numerischen Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. Er hilft zum einen, Fehler bei der Herleitung oder Programmierung des Randwertproblems zu entdecken, zum anderen zeigt der Test an, wenn eine Zwischenlösung im Verlauf einer Homotopiekette nicht mehr optimal ist und daher verworfen werden muss.

Aus der zweiten Variation

$$\left. \frac{d^2 J}{d\boldsymbol{\epsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0}} = 0$$

folgt die sog. *Legendre-Clebsch-Bedingung*

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ positiv semidefinit,} \tag{1.8}$$

für die Hesse-Matrix der Hamiltonfunktion bezüglich den Steuergrößen \mathbf{u} .

Es ist zu beachten, dass die bisherigen Optimalitätsbedingungen jeweils für die optimale Trajektorie gelten. Sie sind im Einklang mit dem *Minimumprinzip* [37, 36]. Es besagt, dass die Steuerungen so gewählt werden müssen, dass die Hamiltonfunktion minimiert wird:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v}} H(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{1.9}$$

Dieses Kriterium gilt also global für alle zulässigen Steuerungen und nicht nur in einer Umgebung der optimalen Steuerung.

Bemerkung. Wird die Hamiltonfunktion, wie in den Originalarbeiten von Pontryagin, mit umgekehrtem Vorzeichen definiert, so muss sie *maximiert* werden, weshalb in großen Teilen der Literatur vom (*Pontryaginschen*) *Maximumprinzip* die Rede ist.

1.3. Mehrzielmethode

Die Anwendung der oben beschriebenen Optimalitätsbedingungen führen auf *Mehrpunkttrandwertprobleme* folgender Form:

Problem 1.8 (Mehrpunkttrandwertproblem)

Seien

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: [t_0, t_f] \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad \text{hinreichend glatt,} \\ \mathbf{r}_j &: [t_0, t_f] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n_j}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

und die Anfangszeit t_0 gegeben, dann sind die Funktionen $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_p^1([t_0, t_f], \mathbf{R}^n)$, die Endzeit t_f und die inneren Spungstellen $t_1, \dots, t_{m-1} \in (t_0, t_f)$ gesucht, so dass die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (1.10)$$

sowie die Rand- und Übergangsbedingungen

$$\mathbf{r}_m(t_f, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_f) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{r}_j(t_j, \mathbf{y}_j^+, \mathbf{y}_j^-) = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (1.11b)$$

erfüllt sind. □

Bemerkung. „Hinreichend glatt“ bedeutet hier, dass aus numerischen Gründen $\mathbf{f} \in \mathcal{C}_p^N$ mit $N \gtrsim 20$ gelten muss (siehe dazu [8]). Notwendige Bedingungen für die Anzahlen n_j werden in [23] angegeben.

Zur numerischen Lösung von Problem 1.8 hat sich die Mehrzielmethode³ als geeignetes Werkzeug herausgestellt. Eine allgemeine Einführung zur Mehrzielmethode findet sich in der Standardliteratur zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen [42, 13]. Im Wesentlichen beruht sie auf einer Erweiterung des einfachen Schießverfahrens durch weitere Unterteilung des Zeitintervalls in mehrere Abschnitte.

Es müssen die Anfangswerte \mathbf{y}_j^+ , $j = 0, \dots, m-1$ zu den Punkten t_j , $j = 0, \dots, m-1$, sowie die Lage der inneren Punkte t_1, \dots, t_{m-1} und der Endzeit t_f gefunden werden, so dass (1.10) und (1.11) erfüllt sind. Die linksseitigen Grenzwerte an den freien Punkten $t_1, \dots, t_m = t_f$

$$\mathbf{y}_j^- = \mathbf{y}(t_j; t_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}^+), \quad j = 1, \dots, m$$

sind Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_{j-1}) = \mathbf{y}_{j-1}^+, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.12)$$

(siehe Abbildung 1.1).

³Der Begriff „Mehrzielmethode“ wurde u.a. von Bulirsch geprägt. Im Deutschen wird außerdem auch die Bezeichnung „Mehrfachschießen“ gebraucht, die sich vom – im englischen Sprachraum verwendeten – Begriff „multiple shooting“ ableitet.

Setzt man diese Definition der \mathbf{y}_j^- in (1.11) ein, so erhält man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \mathbf{r}_m(t_f, \mathbf{y}_0^+, \mathbf{y}(t_f; t_{m-1}, \mathbf{y}_{m-1}^+)) \\ \mathbf{r}_1(t_1, \mathbf{y}_1^+, \mathbf{y}(t_1; t_0, \mathbf{y}_0^+)) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{m-1}(t_{m-1}, \mathbf{y}_{m-1}^+, \mathbf{y}(t_{m-1}; t_{m-2}, \mathbf{y}_{m-2}^+)) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

für die unbekanntenen Anfangswerte und Zeitpunkte

$$\mathbf{z} := (\mathbf{y}_0^+, t_f, \mathbf{y}_1^+, t_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}^+, t_{m-1})^\top \in \mathbf{R}^{m(n+1)}.$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann prinzipiell jedes Verfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme verwendet werden. Hier kommt das modifizierte Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(i)} - \nu^{(i)} \left(\mathbf{DF}(\tilde{\mathbf{z}}^{(i)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}^{(i)})$$

für die Näherungen

$$\tilde{\mathbf{z}} := (\tilde{\mathbf{y}}_0^+, \tilde{t}_f, \tilde{\mathbf{y}}_1^+, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{m-1}^+, \tilde{t}_{m-1})^\top \in \mathbf{R}^{m(n+1)}$$

zur Anwendung, wobei die Jacobimatrix $\mathbf{DF} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}$ durch eine Approximation $\Delta \mathbf{F}$ ersetzt wird. Wird ein geeigneter Startvektor $\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}$ vorgegeben, dann läuft ein Iterationsschritt der Mehrzielmethode folgendermaßen ab:

1. Berechne $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}^{(i)})$ durch numerischen Integration der Anfangswertprobleme (1.12) und Auswertung der \mathbf{r}_j aus (1.11).
2. Berechne die Approximation der Jacobimatrix $\Delta \mathbf{F}$.
3. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\Delta \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}^{(i)}) \Delta \mathbf{z}^{(i)} = -\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{z}}^{(i)})$$

und addiere die so berechnete Korrektur $\Delta \mathbf{z}^{(i)}$:

$$\tilde{\mathbf{z}}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(i)} + \nu^{(i)} \Delta \mathbf{z}^{(i)}$$

Das Verfahren wird abgebrochen und $\tilde{\mathbf{z}}^{(i+1)}$ als Lösung akzeptiert, falls alle Komponenten von $\Delta \mathbf{z}^{(i)}$ kleiner als eine vorgegebene Schranke sind.

Zur Wahl des Relaxationsfaktors $\nu^{(i)} \in (0, 1]$, die von einigen Testfunktionen abhängt, und der Approximation der Jacobimatrix sei auf [8] verwiesen.

Seit Ende der 60er Jahre entstanden immer weiter entwickelte Implementierungen der Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen. Beispielhaft seien BOUNDSOL (Oberle), OPTSOL (Bulirsch), DLOPTR (Deuffhard), BNDSO (Oberle), MUMUS (Hiltmann, [23]) und JANUS (Callies, [8]) genannt. In dieser Arbeit wurde letzteres Programmpaket in der Version 1.02 verwendet. Es ist eine Neuentwicklung, die in den Benutzerschnittstellen dem Paket MUMUS ähnelt, ansonsten aber wesentliche Verbesserungen enthält.

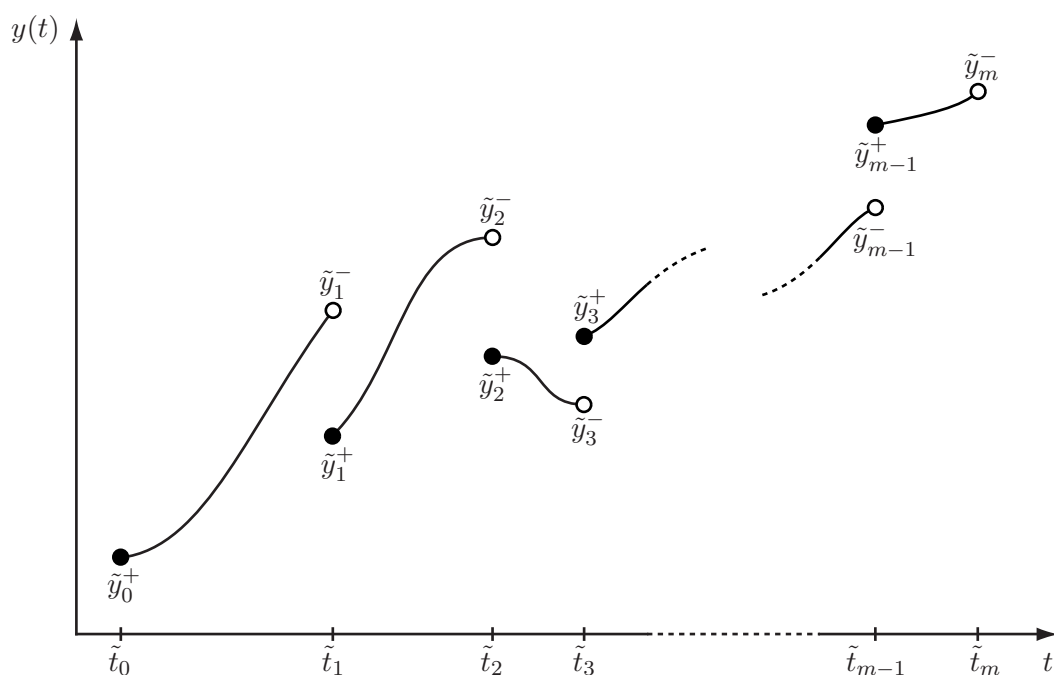


Abbildung 1.1.: Veranschaulichung der Mehrzielmethode

1.4. Kombiniertes Newton- und Bisektions-Verfahren

Zur Lösung der nichtlinearen Bestimmungsgleichung für den Anstellwinkel (3.14) wurde eine Kombination aus Newton- und Bisektionsverfahren verwendet. Dabei wird ein gegebenes Intervall $[A, B]$ (das die gesuchte Nullstelle umfassen muss) solange durch Newton- und Bisektionsschritte verkleinert, bis die vorgegebene Genauigkeit oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht ist. Eine Divergenz ist ausgeschlossen, da in jedem Iterationsschritt sichergestellt ist, dass das Intervall die Nullstelle umfasst. Der Algorithmus ist [38] zu entnehmen.

Das für das Verfahren benötigte Startintervall wird durch iterative Halbierung des gesamten für α zulässigen Bereichs erzeugt.

1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines

Splines werden in der Standardliteratur zur Numerik behandelt [14]. Die Erweiterung auf Tensorproduktsplines zur Approximation bivariater Daten wird z.B. in [15] beschrieben. Die folgende Darstellung ist größtenteils den beiden genannten Werken entnommen.

1.5.1. Von den klassischen Splines zu Funktionen mit niedrigerer Differenzierbarkeit

Im Folgenden werden sowohl Splines als auch deren Erweiterung auf Funktionen mit noch geringerer Differenzierbarkeitsordnung an den inneren Knoten betrachtet. Letztere werden dann

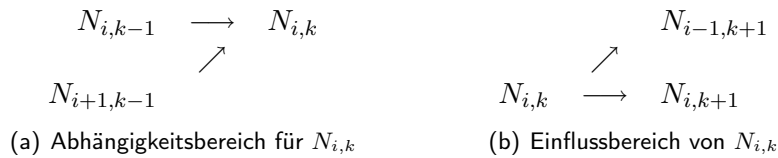


Abbildung 1.2.: Zur rekursiven Berechnung von B-Splines

in Kapitel 2 zur Approximation von uni- und bivariaten Funktionen verwendet.

Definition 1.9 (Spline)

Eine Spline der Ordnung k (Grad $k - 1$) bezüglich des Gitters

$$a = t_0 < \dots < t_{g+1} = b$$

ist eine Funktion $s \in C^{k-2}[a, b]$, die auf jedem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, g$ mit einem Polynom maximal k -ter Ordnung übereinstimmt.

Satz 1.10 (Dimension des Splineriums)

Der Raum aller Splines der Ordnung k bezüglich eines Gitters $a = t_0 < \dots < t_{g+1} = b$ hat die Dimension $k + g$.

Beweis. Die Anzahl der Freiheitsgrade zur Konstruktion einer solchen Spline ist nach oben durch $(g+1)k - g(k-1) = k + g$ beschränkt, da auf jedem der $g + 1$ Teilintervalle k Koeffizienten zu bestimmen sind, gleichzeitig aber an jedem der g inneren Knoten $k - 1$ Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein müssen. Außerdem lassen sich $k + g$ linear unabhängige Basisfunktionen finden (siehe Satz 1.13), so dass die Dimension des Splinesraums auch nach unten durch $k + g$ beschränkt ist. ■

Solch eine Basis lässt sich z.B. aus den sog. *B-Splines* konstruieren, die als Verallgemeinerung der charakteristischen Funktion eines Intervalls angesehen werden können:

Definition 1.11 (B-Splines)

Sei $\eta_1 \leq \dots \leq \eta_n$ eine beliebige Folge von Knoten. Dann sind die B-Splines $N_{i,k}(x)$ der Ordnung k für $i = 1, \dots, n - k$ rekursiv erklärt durch

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [\eta_i, \eta_{i+1}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - \eta_i}{\eta_{i+k-1} - \eta_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\eta_{i+k} - x}{\eta_{i+k} - \eta_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x).$$

Um in dieser Definition auch mehrfache (zusammenfallende) Knoten und damit verschwindende Nenner zu berücksichtigen, soll hierbei die Konvention $0/0 = 0$ gelten.

Abbildung 1.2 veranschaulicht die Abhängigkeiten der Rekursionsformel aus Definition 1.11.

Per Induktion ergeben sich aus Definition 1.11 bereits folgende Eigenschaften der B-Splines:

- $\text{supp } N_{i,k} = [\eta_i, \eta_{i+k}]$ (lokaler Träger)
- $N_{i,k} \geq 0$ (Nichtnegativität)
- $N_{i,k}$ ist ein stückweises Polynom der Ordnung k bezüglich der Intervalle $[\eta_j, \eta_{j+1}]$.

Außerdem kann durch eine explizite Darstellung der B-Splines mit Hilfe von abgebrochenen Potenzen und dividierten Differenzen (die hier nicht betrachtet werden soll) folgende Aussage über ihre Differenzierbarkeitseigenschaften getroffen werden:

Lemma 1.12 (Differenzierung von B-Splines)

Ist η_j ein r -facher Knoten, d.h.

$$\eta_{j-1} < \eta_j = \dots = \eta_{j+r-1} < \eta_{j+r},$$

so ist $N_{i,k}$ an der Stelle $\eta_j = \dots = \eta_{j+r-1}$ mindestens $(k - r - 1)$ -mal stetig differenzierbar. Ist $N_{i,k}$ an der Stelle x mindestens einmal stetig differenzierbar, so gilt für die Ableitung

$$N'_{i,k}(x) = (k - 1) \left(\frac{N_{i,k-1}(x)}{\eta_{i+k-1} - \eta_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(x)}{\eta_{i+k} - \eta_{i+1}} \right).$$

Mit diesen Eigenschaften ist es nun möglich, die im Beweis zu Satz 1.10 angekündigte Basis zu erstellen:

Satz 1.13 (Basis des Splineraums)

Wählt man den Knotenvektor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$ mit $n = 2k + g$ so, dass man je k -fache Endknoten

$$\eta_1 = \dots = \eta_k = t_0 \quad \text{und} \quad \eta_{k+g+1} = \dots = \eta_{2k+g} = t_{g+1}$$

sowie g einfache innere Knoten

$$\eta_{k+1} = t_1 < \dots < \eta_{k+g} = t_g$$

hat, so sind die dadurch festgelegten B-Splines

$$N_{1,k}, \dots, N_{k+g,k}$$

eine Basis für den $(k + g)$ -dimensionalen Raum der Splines der Ordnung k bezüglich des Gitters $\eta_k = t_0 < \dots < \eta_{k+g+1} = t_{g+1}$.

Beweis. Da die B-Splines $N_{1,k}, \dots, N_{k+g,k}$ zum gewählten Knotenvektor $\boldsymbol{\eta}^{2k+g}$ laut obigen Folgerungen stückweise Polynome mit $(k - 2)$ -facher Differenzierbarkeit an den inneren Knoten sind, sind sie selbst Splines der Ordnung k bezüglich des Gitters $\eta_k < \dots < \eta_{k+g+1}$. Weil ihre Anzahl $k + g$ mit der Dimension des Splineraums übereinstimmt und sie linear unabhängig sind (zum Beweis dazu sei auf [14] verwiesen), bilden sie eine Basis des Splineraumes. ■

Erlaubt man bei der Wahl des Knotenvektors $\boldsymbol{\eta}$ auch mehrfache innere Knoten, so erweitert man den Raum der durch die zugehörigen B-Splines darstellbaren Funktionen auch auf solche mit weniger als $(k - 2)$ -facher Differenzierbarkeit an diesen Stellen. In diesem Raum

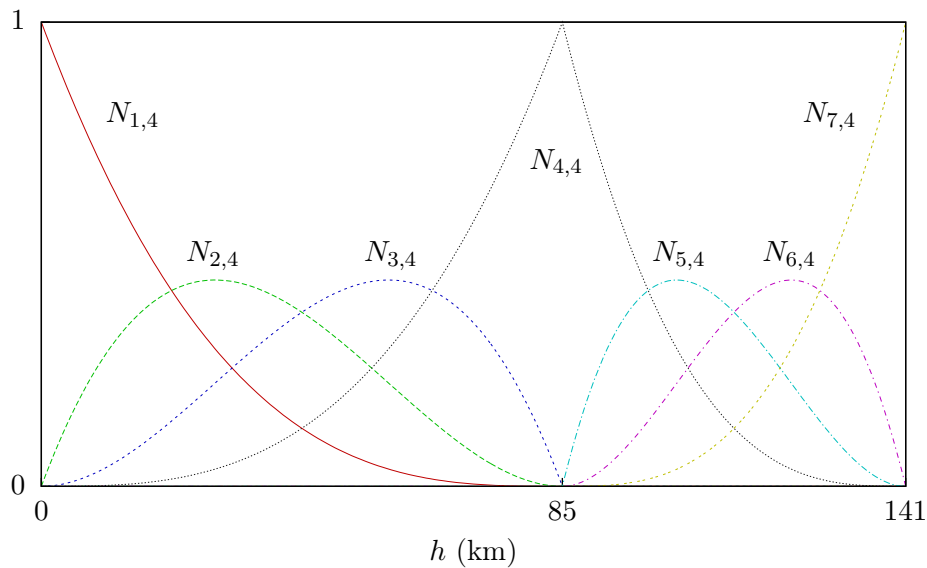


Abbildung 1.3.: B-Spline-Basis $N_{i,4}(h)$, $i = 1, \dots, 7$ bezüglich den je vierfachen Randknoten 0 km und 141 km sowie dem dreifachen inneren Knoten 85 km zur Approximation der Schallgeschwindigkeit durch stückweise kubische Polynome, die am inneren Knoten stetig aber nicht stetig differenzierbar sind

werden die Approximationen in Kapitel 2 durchgeführt. So wurde für die Approximation der Schallgeschwindigkeit beispielsweise die Basis aus Abbildung 1.3 verwendet.

Die Verwendung einer solchen B-Spline-Basis zur Datenapproximation ist aus mehreren Gründen vorteilhaft. So besitzen Funktionen

$$s = \sum_{i=1}^{k+g} c_i N_{i,k} \quad (1.13)$$

in B-Spline-Darstellung eine geringe Sensitivität gegenüber Störungen in den Koeffizienten c_i . Außerdem werden in solch einer Darstellung die gewünschten Differenzierbarkeitseigenschaften implizit durch die Wahl der Basis erreicht. Diese beiden Eigenschaften zusammen erlauben z.B. eine Rundung der Koeffizienten auf wenige gültige Ziffern, ohne dadurch die Approximation zu sehr zu zerstören. Bei einer Approximation durch stückweise Polynome müssten zudem die geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften in Form von Gleichungsnebenbedingungen in die Optimierung eingebracht werden. Die Approximation in B-Spline-Darstellung führt dagegen auf ein einfaches lineares Ausgleichsproblem ohne Nebenbedingungen.

1.5.2. Auswertung von Funktionen in B-Spline-Darstellung

Folgendes Schema zur Auswertung von (1.13) nutzt die Lokalität der B-Splines aus und vermeidet außerdem die mehrfache Berechnung von Zwischenergebnissen: Um s an der Stelle x auszuwerten, werden zunächst die beiden benachbarten Knoten η_j und η_{j+1} so bestimmt,

							\vdots
						\vdots	0
				\vdots	0	$N_{j-k+1,k}(x)$	\vdots
			\vdots	\cdots	$N_{j-k+2,k-1}(x)$	\vdots	\vdots
		\vdots	0	\cdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	0	$N_{j-2,3}(x)$		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	$N_{j-1,2}(x)$	$N_{j-1,3}(x)$		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$N_{j,1}(x) = 1$	$N_{j,2}(x)$	$N_{j,3}(x)$	\cdots	$N_{j,k-2}(x)$	$N_{j,k-1}(x)$	$N_{j,k}(x)$	
0	0	0	\cdots	0	0	0	
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Abbildung 1.4.: Tableau zur Auswertung der nicht-negativen B-Splines am Punkt $x \in [\eta_j, \eta_{j+1})$

das

$$x \in [\eta_j, \eta_{j+1})$$

gilt. Damit hat man automatisch die einzige B-Spline der Ordnung 1 gefunden, die in x nicht verschwindet, nämlich $N_{j,1}$. Wendet man nun Definition 1.11 an, um die B-Splines der Ordnung 2 und höher zu berechnen, so sieht man leicht (vgl. Abbildung 1.2(b)), dass die Anzahl der nicht verschwindenden B-Splines jeweils gleich der Ordnung dieser B-Splines ist. Die stufenweise Auswertung der B-Splines wird wie in Abbildung 1.4 dargestellt durchgeführt. Für die Auswertung von $s(x)$ muss dann lediglich noch das Skalarprodukt der nicht-verschwindenden B-Splines (die in der letzten Spalte des Tableaus stehen) mit den entsprechenden Koeffizienten c_{j-k+1}, \dots, c_j berechnet werden:

$$s(x) = \sum_{i=j-k+1}^j c_i N_{i,k}(x) \tag{1.14}$$

Um (1.14) ν -mal zu differenzieren, gibt es unter Verwendung von Lemma 1.12 grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Ableitung der B-Spline-Basisfunktionen $N_{i,k} \rightarrow N_{i,k}^{(\nu)}$ und anschließende Linearkombination mit den Koeffizienten c_i .
- Umrechnung der Koeffizienten $c_i \rightarrow c_i^{(\nu)}$ und Linearkombination mit den B-Splines $N_{i,k-\nu}$ entsprechender niedrigerer Ordnung.

Diese beiden Ansätze führen auf die Darstellungen

$$s^{(\nu)}(x) = \sum_{i=j-k+1}^j c_i N_{i,k}^{(\nu)}(x) \tag{1.15}$$

bzw.

$$s^{(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (k-i) \sum_{i=j-k+1+\nu}^j c_i^{(\nu)} N_{i,k-\nu}(x) \quad \text{mit} \quad c_i^{(l)} = \begin{cases} c_i, & \text{falls } l=0 \\ \frac{c_i^{(l-1)} - c_{i-1}^{(l-1)}}{\eta_{i+k-l} - \eta_i}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der erste Ansatz ist anschaulicher, hat aber den Nachteil, dass für jede Auswertung von (1.15) die Ableitungen der Basis-B-Splines durch Rekursionen bestimmt werden müssen. Beim zweiten Ansatz dagegen müssen die $c_i^{(\nu)}$ nur einmal durch Rekursion bestimmt werden. Die B-Splines der Ordnung $k - \nu$ fallen ohnehin bei Verwendung des Tableaus aus Abbildung 1.4 als Zwischenergebnisse an.

Bei der Implementierung stückweiser Modelle für die Mehrzielmethode ist zu beachten, dass an jedem Punkt, an dem die rechte Seite des Randwertproblems nicht hinreichend oft stetig differenzierbar ist, ein Schalterpunkt eingefügt werden muss (siehe auch Kapitel 3). Weil aber bei der Durchführung von Homotopien diese Schalterpunkte im Allgemeinen nicht a priori exakt bestimmt sind, müssen die abschnittsweise glatten rechten Seiten auch ein gewisses Stück über den Teildefinitionsbereich hinaus „verlängerbar“ sein.

Um das zu erreichen, werden die B-Spline-Approximationen hier in Polynomdarstellung umgerechnet. Dazu betrachte man zunächst die Taylor-Entwicklung von $s(x)$ im Intervall $[\eta_j, \eta_{j+1})$ um einen Punkt $x_0 \in [\eta_j, \eta_{j+1})$. Weil B-Splines der Ordnung k Polynome vom Grad $k - 1$ sind, sind nur die ersten k Glieder von Null verschieden, so dass

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \quad \forall x \in [\eta_j, \eta_{j+1}) \quad (1.16)$$

gilt. Die Berechnung der benötigten Ableitungen $s^{(i)}(x_0)$ wird nach einer der oben beschriebenen Möglichkeiten durchgeführt. Der Definitionsbereich der so berechneten Polynomdarstellung ist nun problemlos auf ein Intervall $(\eta_j - \varepsilon, \eta_{j+1} + \varepsilon)$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$ erweiterbar. Bei der Umrechnung in eine stückweise Polynomdarstellung ist zu beachten, dass die ursprünglichen Stetigkeitsanforderungen an die Approximation wegen der unvermeidlichen Rundung der Polynomkoeffizienten nun nicht mehr exakt erfüllt werden können und die Polynomkoeffizienten $\frac{s^{(i)}(x_0)}{i!}$ mit höherer Genauigkeit abgespeichert werden müssen. Trotz dieser Einschränkungen ist der Einsatz einer B-Spline-Basis gerechtfertigt, da er die Errechnung der Approximation vereinfacht.

1.5.3. Tensorproduktsplines

Die Verwendung von B-Splines als Basis zur Approximation von Kennlinien lässt sich auch auf Tensorproduktsplines zur Approximation von Kennfeldern höherer Dimension erweitern. Das sei im Folgenden an den ebenfalls zur Anwendung kommenden bivariaten Tensorproduktsplines gezeigt.

Seien nun $\eta_x \in \mathbf{R}^{k+g}$ und $\eta_y \in \mathbf{R}^{l+h}$ Knotenvektoren sowie $N_{i,k}$ und $M_{j,l}$ die zugehörigen B-Splines der Ordnungen k bzw. l in x - bzw. y -Richtung. Dann lassen sich bivariate Funktionen

durch Tensorproduktsplines der Form

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^{k+g} \sum_{j=1}^{l+h} c_{i,j} N_{i,k}(x) M_{j,l}(y) = \mathbf{N}_k^T(x) \mathbf{C} \mathbf{M}_l(y)$$

approximieren.

Die Eigenschaften so konstruierter Funktionen lassen sich leicht aus den Eigenschaften im univariaten Fall ableiten. Deswegen sei hier lediglich erwähnt, wie sich (1.16) auf den bivariaten Fall übertragen lässt: Aus der Taylor-Entwicklung für Skalarfelder (siehe z.B. [2]) folgt nach Wahl eines $x_0 \in [\eta_{x,j}, \eta_{x,j+1})$ und eines $y_0 \in [\eta_{y,j}, \eta_{y,j+1})$ für alle $(x, y) \in [\eta_{x,j}, \eta_{x,j+1}) \times [\eta_{y,j}, \eta_{y,j+1})$

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} s}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^i (y - y_0)^j \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{i!j!} \mathbf{N}_k^{(i)T}(x_0) \mathbf{C} \mathbf{M}_l^{(j)}(y_0) \cdot (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Somit müssen für jedes der rechteckigen Grundgebiete, die sich durch Wahl der inneren Knoten ergeben, die Terme $\frac{1}{i!j!} \mathbf{N}_k^{(i)T}(x_0) \mathbf{C} \mathbf{M}_l^{(j)}(y_0)$ nur einmal im Voraus berechnet werden.

Kapitel 2

Modellbildung

Im Folgenden werden alle relevanten physikalischen Zusammenhänge durch Modellfunktionen beschrieben. Dazu gehören Modelle des Mars, seiner Atmosphäre, der aerodynamischen Beiwerte des X-38-Raumgleiters, sowie ein Modell für dessen Aufheizung im Staupunkt.

2.1. Marsoberfläche, -gravitation und -rotation

Der Mars wird als homogene Kugel mit Radius R_0 angenommen. Daraus ergibt sich folgende Formel für die Gravitationsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Höhe über der Oberfläche

$$g(h) = g_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2 .$$

Nach Differentiation erhält man

$$g'(h) = -2g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^3} .$$

Die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche g_0 wurde aus der Masse und dem Radius des Mars, sowie der Gravitationskonstanten errechnet. Die Zahlenwerte der verwendeten Parameter sowie der Rotationsgeschwindigkeit Ω des Mars sind Tabelle B.4 zu entnehmen.

2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit

Es existiert ein sehr umfangreiches Modell der Marsatmosphäre [25], das seit seiner ersten Veröffentlichung 1989 ständig erweitert wurde, allerdings wegen seiner Komplexität den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Daher wurden für die folgenden Modelle die Daten der Pathfinder-Mission vom 4. Juli 1997 aus [34] verwendet. Drei Sensoren zeichneten die während des Eintritts auftretenden Beschleunigungen auf, woraus die Trajektorie (insbesondere die Höhe und Geschwindigkeit) durch Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen errechnet wurde. Aus der Gleichung für die Abbremsung durch den aerodynamischen Widerstand

$$a_D = -\frac{S}{2m} C_D \rho v^2$$

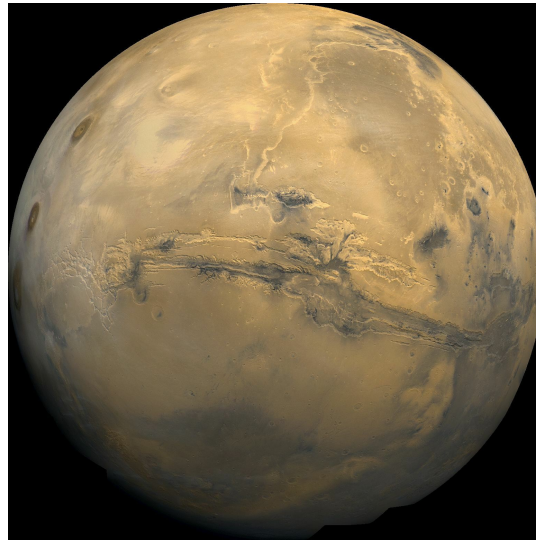


Abbildung 2.1.: Mosaik aus Viking 1 Orbiter-Bildern des Mars mit dem 3000 km langen und bis zu 8 km tiefen Valles Marineris in der Bildmitte (NASA Image ID number: MG07S078-334SP)

konnte nun die Dichte ρ in Abhängigkeit der Höhe bestimmt werden. Das Druckprofil wurde durch Integration der hydrostatischen Gleichung

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

gewonnen und schließlich die Temperatur aus der Gleichung

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad (2.1)$$

errechnet, die sich durch Kombination des idealen Gasgesetzes $pV = nRT$ mit der Massenidentität $\rho V = nM$ ergibt. Die mittlere molare Masse M liefert ein aus den Massenspektrometer-Messungen der Viking-Sonden gewonnenes Modell. Eine detaillierte Beschreibung des Vorgehens zur Berechnung der Druck-, Dichte- und Temperaturprofile ist in [28] zu finden.

Da die Atmosphärendaten von Pathfinder nur bis zur Öffnung seines Bremsfallschirms in ca. 9 km Höhe vorliegen, wurde für die folgenden Modelle jeweils noch ein Wert für die Temperatur und den Druck an der Oberfläche hinzugenommen. Aus den Messungen, die Pathfinder in den Wochen nach der Landung an der Oberfläche durchführte (siehe [35] und [41]), wurde eine der Tageszeit der Landung¹ entsprechende Messreihe ausgewählt² und für die Temperatur und den Druck an der Oberfläche Werte von 200 K bzw. 671 Pa angenommen.

Die gesamte Datenbasis ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Im Temperaturverlauf fallen mehrere Wellen auf, die verschiedene Ursachen haben. So ist z.B. die starke Inversion in einer Höhe von ca. 9 km bis 16 km wahrscheinlich auf eine CO₂-Wolke zurückzuführen [40]. Obwohl sich dieser

¹Pathfinder landete um ca. 3 Uhr nachts (lokaler Marszeit).

²Messungen wurden erstmals am dritten Tag auf der Oberfläche zur passenden Uhrzeit durchgeführt und stehen in den Dateien http://atmos.nmsu.edu/PDS/data/mpam_0001/surf_rdr/scidata/sr00xxs/sr0090s.1b1 bzw. `sr0090s.tab` (zuletzt besucht im April 2005) zur Verfügung.

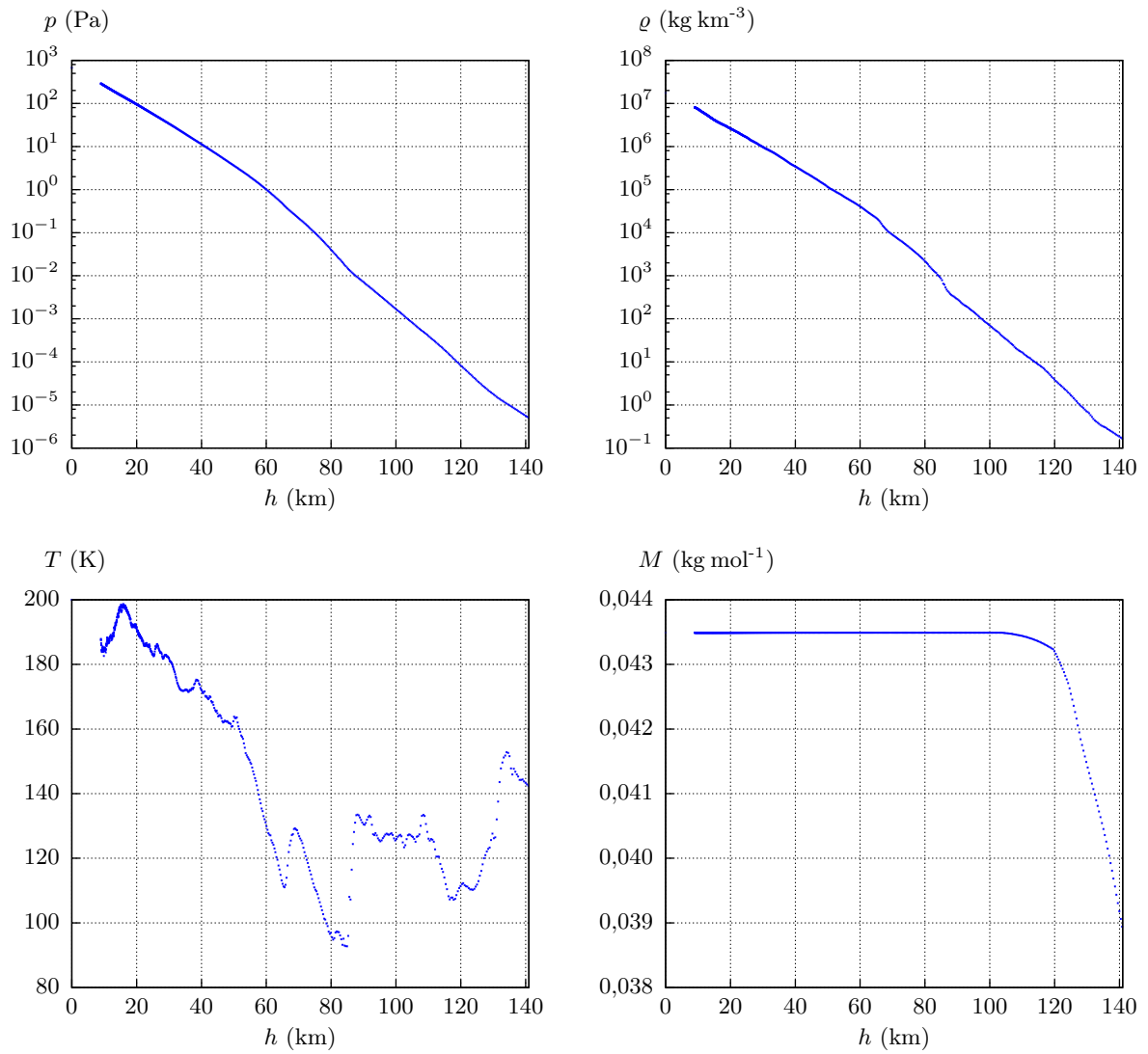


Abbildung 2.2.: Atmosphärendaten der Pathfinder-Mission inkl. einer Bodenmessung

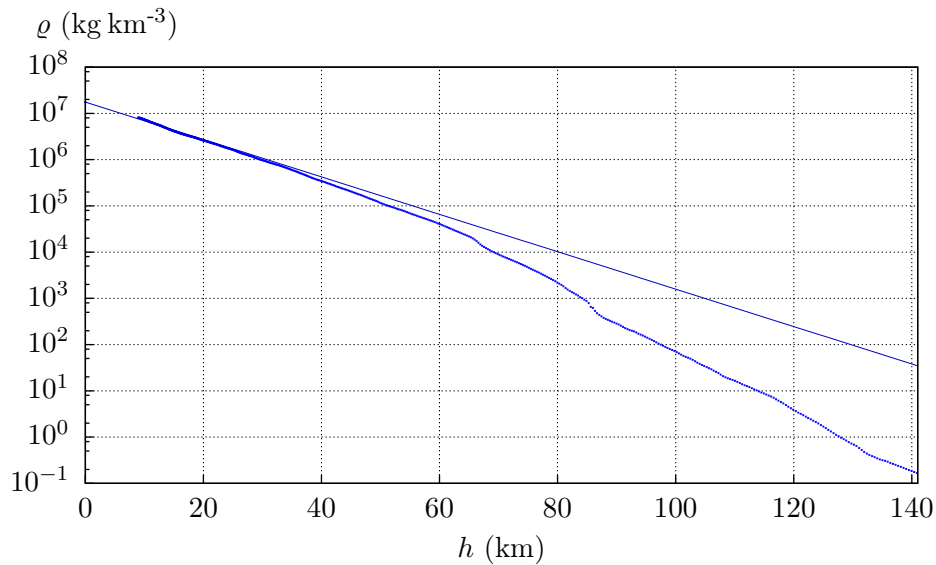


Abbildung 2.3.: Daten und Approximation der Dichte

Effekt stark auf die Berechnung der Schallgeschwindigkeit auswirken würde, wird er in der Modellbildung nicht gesondert berücksichtigt. Zum einen würde es die Anzahl der notwendigen Schaltpunkte der Optimalsteuerungsprobleme wesentlich erhöhen und zum anderen liegt auf dem Mars nur äußerst selten Wolkenbildung vor, so dass der Effekt ohnehin vernachlässigt werden sollte.

2.2.1. Dichte

Die Dichte wird als exponentiell abhängig von der Höhe angenommen und durch die Formel

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\beta h} \quad (2.2)$$

beschrieben. ρ_0 wurde mittels Gleichung (2.1) aus den Bodenmessungen von Temperatur und Druck errechnet und β durch „least squares fit“ an das Dichteprofil bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass durch eine Logarithmus-Transformation von (2.2) das Ausgleichsproblem zur Bestimmung von β zwar linearisiert werden könnte, wodurch jedoch die sehr kleinen Dichtewerte der oberen Atmosphäre zu stark gewichtet würden. Das würde wiederum zu einer schlechten Approximation in Bodennähe führen. Da aber gerade dort Wert auf eine gute Approximation gelegt werden sollte, wird das ursprüngliche, nichtlineare Ausgleichsproblem gelöst. Das Ergebnis dieser Approximation kann Tabelle B.4 sowie Abbildung 2.3 entnommen werden.

Die Ableitung ergibt sich zu

$$\rho'(h) = -\beta \rho_0 e^{-\beta h}.$$

Tabelle 2.1.: Bestandteile der Marsatmosphäre (Quelle: [33])

Stoff	chem. Formel	Anteil (%)	molare Masse (kg mol ⁻¹)	Adiabatexponent
Kohlendioxid	CO ₂	95,32	0,044 009	1,33
Stickstoff	N ₂	2,7	0,028 014	1,4
Argon	Ar	1,6	0,039 948	1,66
Sauerstoff	O ₂	0,13	0,031 998	1,4
Kohlenmonoxid	CO	0,08	0,028 01	1,41
		Σ: 99,83	Ø: 0,043 483	Ø: 1,34

2.2.2. Schallgeschwindigkeit

Da die vorliegenden aerodynamischen Beiwerte nicht nur vom Anstellwinkel, sondern auch von der Machzahl abhängen (siehe Abschnitt 2.3.2), muss die Schallgeschwindigkeit in der Atmosphäre bekannt sein, um die Geschwindigkeit in Mach ausdrücken zu können. Die Schallgeschwindigkeit a hängt vom Druck und der Dichte bzw. der Temperatur und der molaren Masse ab³:

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R \frac{T}{M}} \quad (2.3)$$

Außerdem geht in (2.3) der Adiabatexponent κ ein. Er ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen und ist für die meisten realen Gase über weite Bereiche temperaturunabhängig. Daher wurde er hier als (mit der molaren Masse) gewichtetes Mittel der Adiabatexponenten der in der Atmosphäre vorkommenden Gase zu

$$\kappa = 1,34$$

berechnet (siehe Tabelle 2.1).

Um nun aus den Atmosphärendaten der Pathfinder-Mission ein Modell für die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe über der Marsoberfläche aufzustellen, ist es unerheblich, welche der beiden Formeln aus (2.3) verwendet wird, da – wie in Abschnitt 2.2 beschrieben – die Temperaturdaten aus den anderen Daten errechnet wurden.

Es wurden zwei unterschiedliche Modelle erstellt. Das erste Modell wird zur Errechnung der Startlösung verwendet und sollte aus zwei Gründen möglichst einfach sein:

- Eine einfache Funktion beschleunigt die Auswertung der rechten Seiten der Differentialgleichungen. Das ist insbesondere bei der Errechnung einer Startlösung wichtig, da hier u.U. viele Versuche nötig sind bis eine zufriedenstellende Trajektorie vorliegt (siehe Kapitel 5.1).
- Eine abschnittsweise definierte Funktion würde mehrfache Neustarts des Integrators zu a priori unbekanntem Zeitpunkten erfordern, was mit den verwendeten Integratoren nicht automatisiert möglich ist.

³Die beiden Formeln hängen über Gleichung (2.1) zusammen.

Es bietet sich also beispielsweise ein Polynom an. Allerdings liegen nur Daten bis zu einer Höhe von ca. 141 km vor, was dazu führt, dass ein Approximationspolynom außerhalb dieses Bereichs völlig unrealistische Werte für die Schallgeschwindigkeit liefert. Daher wird zunächst die konstante Funktion

$$a(h) = 0,205 \text{ km s}^{-1} \quad (2.4)$$

verwendet.

Das zweite Modell wird erst im Verlauf der Homotopiekette verwendet. Es wird mit Hilfe von B-Splines der Ordnung 4 durch

$$a(h) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{4+3} a_i N_{i,4}(h), & \text{falls } h < 141 \text{ km} \\ 0,205 \text{ km s}^{-1}, & \text{falls } h \geq 141 \text{ km} \end{cases} \quad (2.5a)$$

mit dem Knotenvektor

$$\boldsymbol{\eta}_h = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 85 \ 85 \ 85 \ 141 \ 141 \ 141 \ 141)^\top \text{ km} \quad (2.5b)$$

und dem Koeffizientenvektor

$$\boldsymbol{a} = (0,225 \ 0,226 \ 0,194 \ 0,158 \ 0,229 \ 0,113 \ 0,221)^\top \text{ km s}^{-1} \quad (2.5c)$$

definiert und besteht folglich aus zwei beim dreifachen Knoten $h = 85$ km stetig zusammengefügt, kubischen Polynomen, sowie einer bei $h = 141$ km unstetig angefügten konstanten Funktion (siehe Abbildung 2.4). Dieser konstante Funktionsteil ist notwendig, weil für $h > 141$ keine Atmosphärendaten mehr vorliegen. Er soll erzwingen, dass die Machzahl in der oberen Atmosphäre im Approximationsgebiet der aerodynamischen Beiwerte bleibt. Die kubischen Polynome im Datenbereich minimieren die Summe der Fehlerquadrate, wobei der Datenpunkt am Boden 10-fach gewichtet wurde. Die errechneten Koeffizienten wurden auf drei gültige Stellen gerundet.

Durch das verfeinerte Modell gelang eine Reduzierung des mittleren relativen Fehlers auf 1,64 %. Der maximale relative Fehler beträgt 9,51 %.

Bemerkung. Da die B-Splines eine Zerlegung der Eins bilden, ließe sich obige Funktion durch Einfügen eines zusätzlichen vierfachen Knotens an $\boldsymbol{\eta}_h$ und viermaliges Anfügen von $0,205 \text{ km s}^{-1}$ an \boldsymbol{a} auch als reine Linearkombination von B-Splines darstellen. Dabei wäre darauf zu achten, dass der neue vierfache Knoten größer als das maximal auftauchende h sein muss.

Für die Machzahl und ihre Ableitungen gilt dann

$$Ma(v, h) = \frac{v}{a(h)},$$

$$\frac{\partial Ma}{\partial v}(v, h) = \frac{1}{a(h)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Ma}{\partial h}(v, h) = -\frac{va'(h)}{a^2(h)},$$

wobei zur Berechnung der Ableitung der Schallgeschwindigkeit nach der Höhe Lemma 1.12 verwendet werden kann.

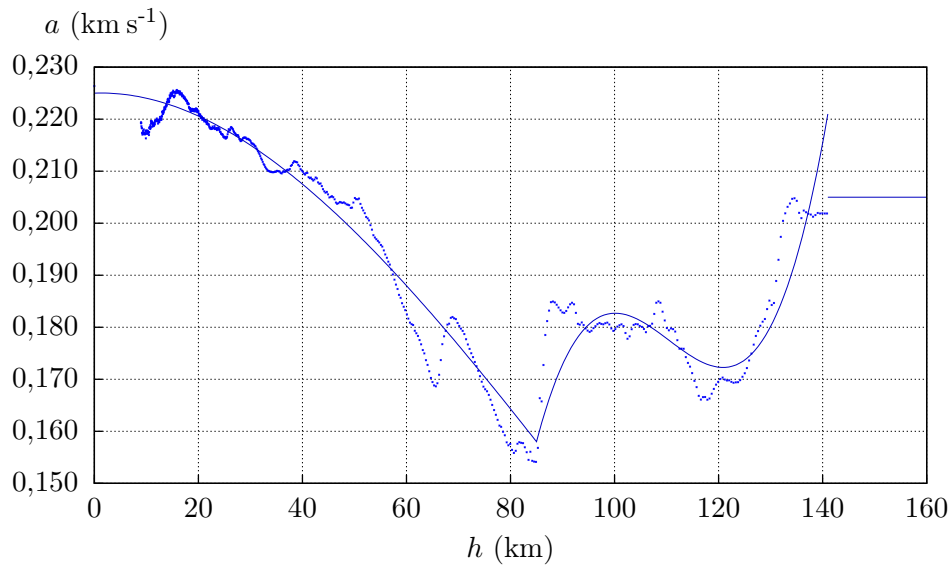


Abbildung 2.4.: Errechnete Schallgeschwindigkeitsdaten und Approximation

2.3. Raumgleiter X-38/CRV

Zur Modellierung der aerodynamischen Eigenschaften eines Gleiters wurde die X-38/CRV⁴ (siehe Abbildung 2.5) ausgewählt [32]. Dieses von der NASA geführte Projekt diente der Entwicklung eines Rückkehrfluggerätes für die ISS⁵. Es basiert auf früheren experimentellen Fluggeräten (v.a. der X-24) und gehört zur Klasse der sog. „wingless lifting bodies“, also den Fluggeräten, die den Auftrieb durch ihren deltaförmigen Rumpf erzeugen. Echte Flügel sind nicht vorhanden. Obwohl das Projekt inzwischen eingestellt ist, lieferte es doch eine Fülle von Simulations- und Messdaten. Neben dem NASA Dryden Flight Research Center selbst, waren viele weitere Institutionen an Entwicklung und Bau der Prototypen⁶ beteiligt. Auch deutsche Forschungsgruppen lieferten Beiträge, v.a. bei der Entwicklung der Nasenkappe und der Klappen der X-38. Zudem wurden im Rahmen des nationalen Programms TETRA⁷ Strömungssimulationen am Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung der Technischen Universität München durchgeführt, deren Daten in dieser Arbeit Verwendung fanden [31, 10].

Ein anderer geeigneter Gleiter wäre das Demonstrationsmodell PHOENIX⁸ gewesen, von dem aber leider nur wenige Aerodynamikdaten zur Verfügung stehen [21, 22]. Insbesondere existieren bisher keinerlei Daten für Machzahlen größer als 20.

Es ist zwar (zumindest vorerst) unrealistisch, ein Vehikel in der Größe der X-38 auf dem

⁴Crew Return Vehicle

⁵International Space Station

⁶Das private Unternehmen *Scaled Composites* (das zuletzt durch den Gewinn des *Anzari X Prize* und den Bau des von Steve Fosset geflogenen *GlobalFlyer* auf sich aufmerksam machte) lieferte einige Prototypen bis zu einem Maßstab von 90 % der geplanten Größe.

⁷Technologie für zukünftige Raumtransportsysteme: Nationales Technologieprogramm, Oktober 1997 – Juni 2002

⁸PHOENIX ist ein zu Demonstrations- und Testzwecken gebautes Modell des geplanten europäischen Raumtransportsystems HOPPER.

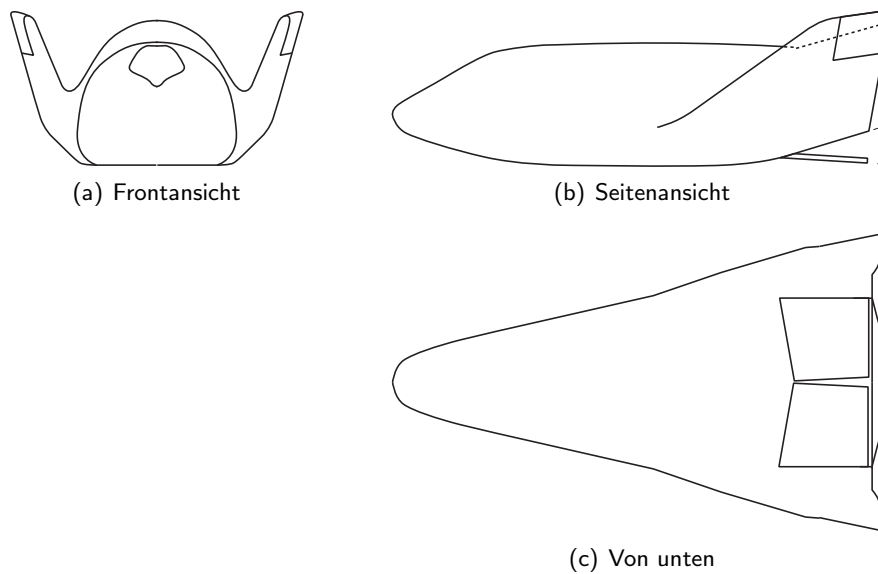


Abbildung 2.5.: Schematische Darstellung des X-38-Gleiters (Bilder aus [1] übernommen und angepasst)

Mars landen zu lassen, allerdings hat eine Skalierung keinerlei Einfluss auf das betrachtete Systemverhalten beim Eintritt in die Atmosphäre: Da in den Bewegungsdifferentialgleichungen (2.12) die angeströmte Fläche und Masse des Gleiters lediglich als Quotient $\frac{S}{m}$ auftreten, ändert sich durch eine proportionale Verkleinerung beider Größen nichts. Es ist also durchaus gerechtfertigt, die Daten dieses Fluggeräts hier einzusetzen.

2.3.1. Kräfte

Im Folgenden werden die am Gleiter angreifenden Kräfte, sowie der durch die Luftreibung erzeugte Wärmestrom modelliert, wobei die Hauptarbeit in der Approximation der aerodynamischen Beiwerte liegt.

Die Gravitationskraft beträgt

$$F_G = m g(h)$$

und wirkt immer in Richtung des Marsmittelpunkts.

Die aerodynamischen Kräfte Auftrieb und Widerstand werden in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v , des Anstellwinkels α und der aerodynamisch wirksamen Fläche S des Gleiters, sowie der Luftdichte $\rho(h)$ und der Machzahl Ma modelliert. Eine Abhängigkeit von der Reynoldszahl wurde nicht berücksichtigt, da zum Ersten ihr Einfluss bei hohen Geschwindigkeiten vernachlässigbar ist und zum Zweiten die vorliegenden Daten für die Beiwerte diese Abhängigkeit nicht berücksichtigen.

Der Einfluss von Machzahl, Anstellwinkel und Form des Gleiters auf Auftrieb und Widerstand wird in den aerodynamischen Beiwerten $C_L(Ma, \alpha)$ und $C_D(Ma, \alpha)$ zusammengefasst. Die

restlichen Größen gehen in die Kraft des Staudrucks auf die aerodynamisch wirksame Fläche ein:

$$\frac{1}{2}\varrho(h)v^2S$$

Damit erhält man für die entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirkende Widerstandskraft

$$F_D = \frac{S}{2}\varrho(h)v^2C_D(Ma, \alpha),$$

sowie für die senkrecht zur Bewegungsrichtung nach oben⁹ wirkende Auftriebskraft

$$F_L = \frac{S}{2}\varrho(h)v^2C_L(Ma, \alpha).$$

2.3.2. Aerodynamische Beiwerte

Für die aerodynamischen Beiwerte C_L (Auftrieb) und C_D (Widerstand) lagen Kennfelder in Abhängigkeit der Machzahl Ma und des Anstellwinkels α vor [10, 31]. Die Abhängigkeit der Beiwerte von den Ruderausschlägen wurde dabei bereits in den Daten berücksichtigt. Nur der relevante Teil ($2 \leq Ma \leq 50$ und $30^\circ \leq \alpha \leq 55^\circ$) der Daten wurde verwendet und durch biquadratische Tensorproduktsplines (Ordnung $k_{Ma} = k_\alpha = 3$) approximiert.

Seien

$$\mathbf{N}(Ma) = \begin{pmatrix} N_1(Ma) \\ \vdots \\ N_{3+l_{Ma}}(Ma) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} M_1(\alpha) \\ \vdots \\ M_{3+l_\alpha}(\alpha) \end{pmatrix}$$

die B-Spline-Basen der Ordnung 3 zu den Knotenvektoren $\boldsymbol{\eta}_{Ma}$ bzw. $\boldsymbol{\eta}_\alpha$. Dann lassen sich die Approximationen der aerodynamischen Beiwerte als

$$C_L(Ma, \alpha) = \mathbf{N}^\top(Ma) \mathbf{L} \mathbf{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^{3+l_{Ma}} \sum_{j=1}^{3+l_\alpha} l_{i,j} \cdot N_i(Ma) M_j(\alpha) \quad (2.6a)$$

und

$$C_D(Ma, \alpha) = \mathbf{N}^\top(Ma) \mathbf{D} \mathbf{M}(\alpha) = \sum_{i=1}^{3+l_{Ma}} \sum_{j=1}^{3+l_\alpha} d_{i,j} \cdot N_i(Ma) M_j(\alpha) \quad (2.6b)$$

darstellen. Die Anzahl und Lage der inneren Knoten (l_{Ma} und l_α) beeinflusst dabei die Genauigkeit der Approximation, sowie die Differenzierbarkeitsordnung und die Größe der Koeffizientenmatrizen $\mathbf{L}, \mathbf{D} \in \mathbf{R}^{(3+l_{Ma}) \times (3+l_\alpha)}$.

Da die Gleichungen (2.6) linear in den Einträgen der jeweiligen Koeffizientenmatrizen sind, muss wieder ein lineares Ausgleichsproblem gelöst werden, um sie zu bestimmen.

Um die Ableitungen in Ma - und α -Richtung zu berechnen, kann auch im bivariaten Fall Lemma 1.12 verwendet werden.

⁹„Oben“ im Sinne des Gleiters.

Für die aerodynamischen Beiwerte wurde – ebenso wie für die Schallgeschwindigkeit – ein Grob- und ein Feinmodell entwickelt.

In einer ersten groben Approximation wurden die Beiwerte ohne innere Knoten ($l_{Ma} = l_\alpha = 0$) im Bereich $Ma \in [2, 50]$ und $\alpha \in [29^\circ, 56^\circ]$ mit den Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,4690 & 0,6949 & 0,7089 \\ 0,1436 & 0,3124 & 0,3862 \\ 0,6961 & 1,0383 & 0,9546 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,3764 & 0,7282 & 0,9904 \\ 0,1315 & 0,1618 & 0,9162 \\ 0,6995 & 1,3919 & 1,3119 \end{pmatrix}$$

approximiert.

Eine genauere Approximation wird durch Erweiterung des Knotenvektors $\boldsymbol{\eta}_{Ma}$ um einen doppelten inneren Knoten ($l_{Ma} = 2$) bei $Ma = 5,5$ auf $\boldsymbol{\eta}_{Ma} = (2 \ 2 \ 2 \ 5,5 \ 5,5 \ 50 \ 50 \ 50)^\top$ erreicht. Die Koeffizienten dafür lauten

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,5335 & 0,7180 & 0,7796 \\ 0,4280 & 0,5376 & 0,8879 \\ 0,3864 & 0,6255 & 0,5922 \\ 0,3610 & 0,5024 & 0,6562 \\ 0,3269 & 0,7306 & 0,5230 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0,4466 & 0,7236 & 1,1279 \\ 0,3030 & 0,6460 & 0,9902 \\ 0,3263 & 0,5988 & 0,9773 \\ 0,2739 & 0,5163 & 0,9481 \\ 0,4809 & 0,8336 & 1,3135 \end{pmatrix}$$

(siehe auch Abbildung 2.6). Diese verbesserte Approximation verringerte den mittleren relativen Fehler auf 1,00 % und den maximalen relativen Fehler auf 3,99 %.

Um die Endgeschwindigkeit noch weiter zu drosseln, wurde weiterhin das Ausfahren von Bremsklappen unterhalb einer Machzahl von 5 simuliert. Der dadurch erhöhte Luftwiderstand wird durch eine Verdoppelung des Widerstandsbeiwertes C_D modelliert.

2.3.3. Wärmestrom

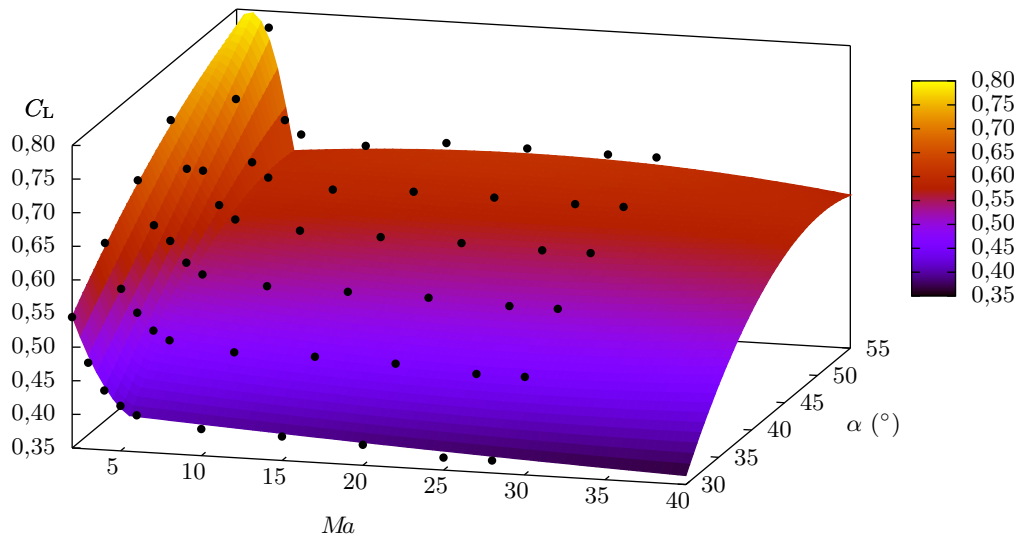
Da die größte Wärmebelastung beim Eintritt in die Marsatmosphäre in der Umgebung des Staupunktes auftritt (vgl. Abbildung 2.7), wird für den Wärmestrom folgendes semi-empirische Staupunktmodell aus [26] übernommen, wobei $\{r_N\} = \frac{r_N}{\text{km}}$, $\{v\} = \frac{v}{\text{km s}^{-1}}$ und $\{\varrho\} = \frac{\varrho}{\text{kg km}^{-3}}$ die reinen Zahlenwerte der entsprechenden Größen sind:

$$\dot{q}(v, \varrho) = \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \{v\}^{3,15} \sqrt{\{\varrho\}} \text{ MW m}^{-2}$$

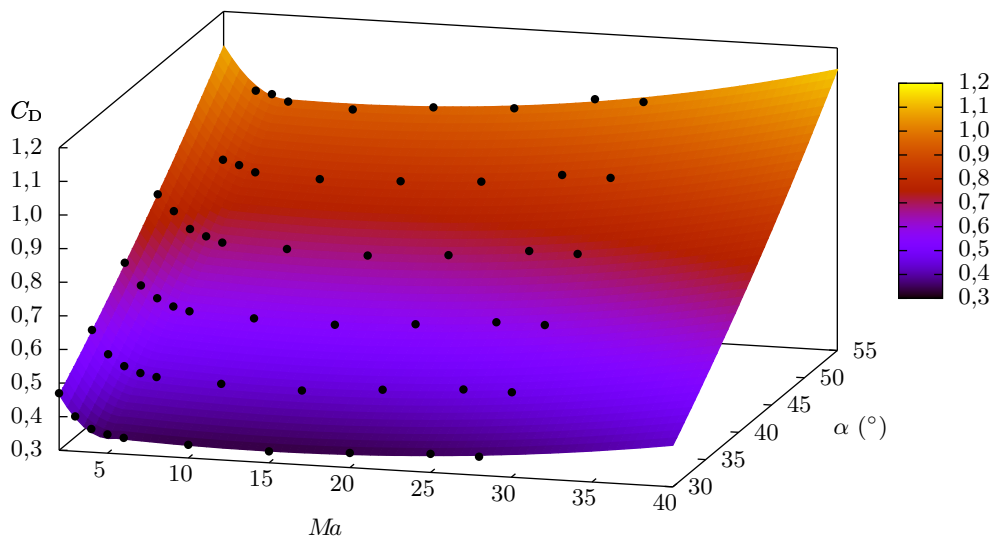
Die Konstante K musste dabei wegen einer anderen Wahl der Einheiten als in [26] dementsprechend angepasst werden. Ihr Wert kann – ebenso wie der des Nasenradius r_N – wieder Tabelle B.4 entnommen werden.

Differentiation nach den beiden Argumenten v und ϱ liefert

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial v}(v, \varrho) = 3,15 \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \{v\}^{2,15} \sqrt{\{\varrho\}} \frac{\text{MW m}^{-2}}{\text{km s}^{-1}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \varrho}(v, \varrho) = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \frac{\{v\}^{3,15}}{\sqrt{\{\varrho\}}} \frac{\text{MW m}^{-2}}{\text{kg km}^{-3}}.$$



(a) Auftriebsbeiwert



(b) Widerstandsbeiwert

Abbildung 2.6.: Verfeinerte Approximation der aerodynamischen Beiwerte

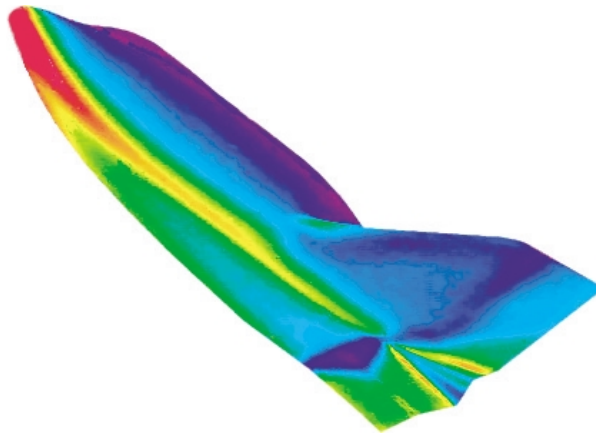


Abbildung 2.7.: Experimentelle Aufheizung eines X-38-Modells (Bildquelle: [24])

2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen

Im Folgenden werden die Bewegungsdifferentialgleichungen des Raumgleiters hergeleitet, der als Punktmasse angenommen wird. Die drei Positionskoordinaten entsprechen den in der Navigation auf Planeten üblichen Kugelkoordinaten, die Geschwindigkeit wird durch Betrag und Orientierung beschrieben. Dabei wird der Bahnazimut χ in der vorliegenden Arbeit wie in der Navigation üblich (siehe auch [26, 11]) von der Nordrichtung aus im Uhrzeigersinn positiv gemessen. Außerdem wird ein positiver Querneigungswinkel μ als Steuerung nach rechts interpretiert. Für diese Herleitung werden vier Koordinatensysteme sowie die Transformationen zwischen ihnen benötigt.

2.4.1. Koordinatensysteme

Im Gegensatz zu anderen Arbeiten [26, 20] haben hier alle Koordinatensysteme den Marsmittelpunkt als gemeinsamen Ursprung, da der später eingeführte Satz 2.1 zur Transformation der Zeitableitung von gegeneinander bewegten Systemen nur Rotationen aber keine Translationen eines Systems gegenüber dem anderen berücksichtigt. Hätten die Koordinatensysteme verschiedene Ursprünge, so müsste die entsprechende allgemeine Formel zur Transformation der Zeitableitung gegeneinander bewegter Systeme (vgl. [12, 17]) verwendet werden. Das würde aber die Modellierung erschweren. Außerdem wird in der gesamten Modellierung nur ein einziger, sehr einfacher Positionsvektor betrachtet. Geschwindigkeiten und Kräfte sind vom Ursprung unabhängige Richtungsvektoren.

Notation. Im Folgenden wird das Koordinatensystem eines Vektors durch die Indizes „i“, „m“, „t“ bzw. „a“ angezeigt. Es ist zu beachten, dass nur Vektoren aus demselben Koordinatensystem miteinander verknüpft und verglichen werden dürfen. xT_y bezeichnet die Transformationsmatrix, mit der Koordinaten aus dem System „y“ multipliziert werden müssen, um sie in Koordinaten des Systems „x“ umzurechnen (siehe dazu auch [39]). R_x , R_y und R_z kennzeichnen die Rotationsmatrizen um die entsprechenden Koordinatenachsen.

Inertialsystem

Da die Bewegung des Gleiters nur in der Umgebung des Mars betrachtet wird, kann die Bewegung des Mars um die Sonne vernachlässigt und das Inertialsystem wie folgt gewählt werden:

Inertialsystem i

x -Achse: in der Äquatorebene in Richtung der Tag- und Nachtgleiche

y -Achse: so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht

z -Achse: Rotationsachse des Mars (Richtung Nordpol)

Marsfestes System

Das marsfeste System rotiert gegenüber dem Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die z -Achse:

Marsfestes System m

x -Achse: in der Äquatorebene in Richtung des Nullmeridians

y -Achse: so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht

z -Achse: Rotationsachse des Mars (Richtung Nordpol)

Die Transformation von Koordinaten im marsfesten System in Koordinaten im Inertialsystem lautet

$${}^i\mathbf{T}_m = \mathbf{R}_z(\Omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem kann die Rotation des marsfesten Systems um das Inertialsystem mit den Vektoren

$$\boldsymbol{\omega}^{m/i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_m$$

in Inertial- bzw. marsfesten Koordinaten angegeben werden.

Tangentialsystem

Das Tangentialsystem spiegelt die Position des Gleiters über der Marsoberfläche wieder: Seine x - und y -Achse liegen parallel zur Tangentialebene an die Marsoberfläche durch die senkrecht auf die Oberfläche projizierte Position des Gleiters, während die z -Achse senkrecht zu dieser Tangentialebene steht und in Richtung des Gleiters zeigt.

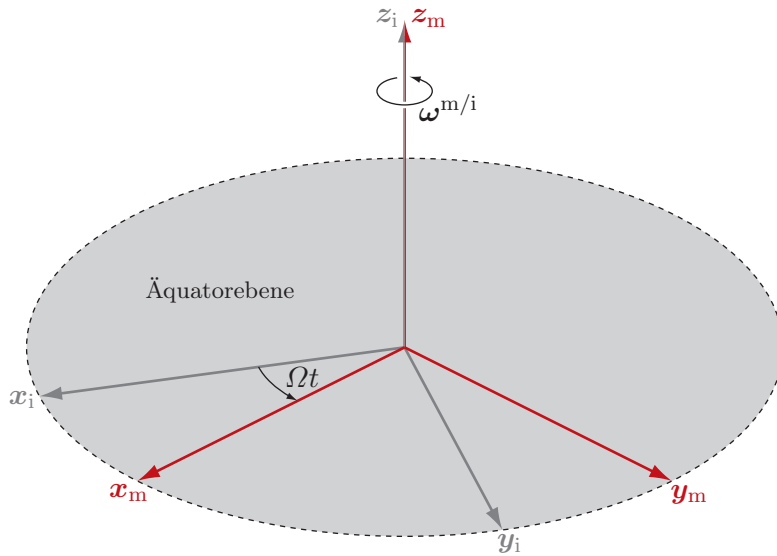


Abbildung 2.8.: Inertial- und marsfestes System

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Koordinatensysteme frei wählbar sind und das Ergebnis, die Bewegungsdifferentialgleichungen, nicht beeinflussen. So wurde dieses Koordinatensystem in [20] und [26] jeweils unterschiedlich gewählt.

Tangentialsystem t

- x -Achse: parallel zur Tangentialebene Richtung Norden
 - y -Achse: parallel zur Tangentialebene Richtung Westen
 - z -Achse: senkrecht zur Tangentialebene in Richtung der Position des Gleiters
-

Die Transformation von Koordinaten im Tangentialsystem in Koordinaten im marsfesten System lautet

$${}^m\mathbf{T}_t = \mathbf{R}_z(\Theta)\mathbf{R}_y(-\Lambda)\mathbf{R}_y(-\frac{\pi}{2})\mathbf{R}_x(\pi) = \begin{pmatrix} -\cos \Theta \sin \Lambda & \sin \Theta & \cos \Theta \cos \Lambda \\ -\sin \Theta \sin \Lambda & -\cos \Theta & \sin \Theta \cos \Lambda \\ \cos \Lambda & 0 & \sin \Lambda \end{pmatrix}.$$

Die Rotation des Tangentialsystems um das marsfeste System kann in Tangentialkoordinaten mit dem Vektor

$$\boldsymbol{\omega}^{t/m} = \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \cos \Lambda \\ \dot{\Lambda} \\ \dot{\Theta} \sin \Lambda \end{pmatrix}_t$$

angegeben werden.

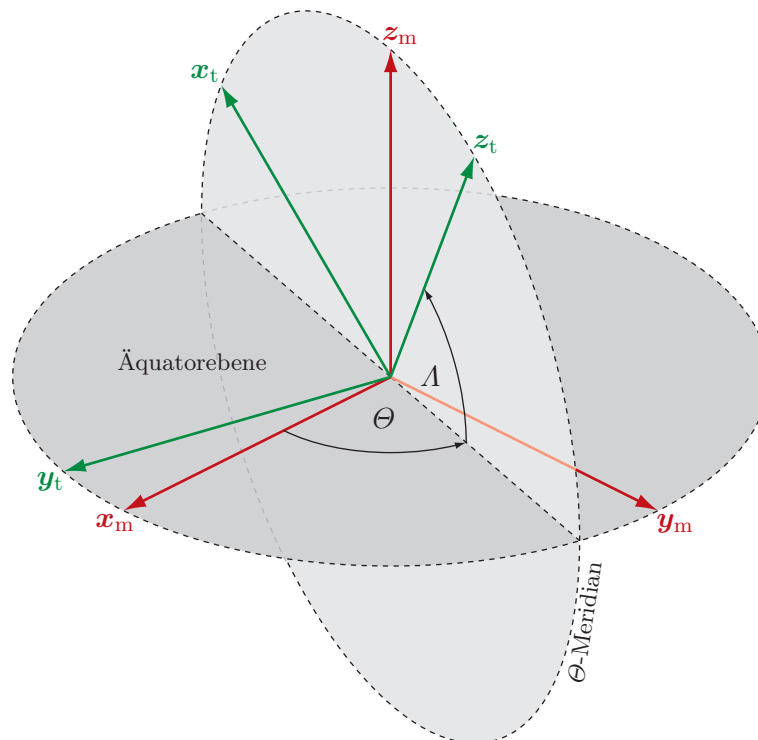


Abbildung 2.9.: Marsfestes und Tangentialsystem

Aerodynamisches System

Das aerodynamische System schließlich orientiert sich an der momentanen Bewegungsrichtung des Gleiters und erleichtert die Modellierung der äußeren Kräfte.

Aerodynamisches System a

x -Achse: Bewegungsrichtung

y -Achse: so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht

z -Achse: Auftriebsrichtung

Die Transformation von Koordinaten im aerodynamischen System in Koordinaten im Tangentialsystem lautet

$$\begin{aligned}
 {}^tT_a &= \mathbf{R}_z(-\chi)\mathbf{R}_y(-\gamma)\mathbf{R}_x(\mu) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \gamma & \sin \chi \cos \mu - \cos \chi \sin \gamma \sin \mu & -\sin \chi \sin \mu - \cos \chi \sin \gamma \cos \mu \\ -\sin \chi \cos \gamma & \cos \chi \cos \mu + \sin \chi \sin \gamma \sin \mu & -\cos \chi \sin \mu + \sin \chi \sin \gamma \cos \mu \\ \sin \gamma & \cos \gamma \sin \mu & \cos \gamma \cos \mu \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

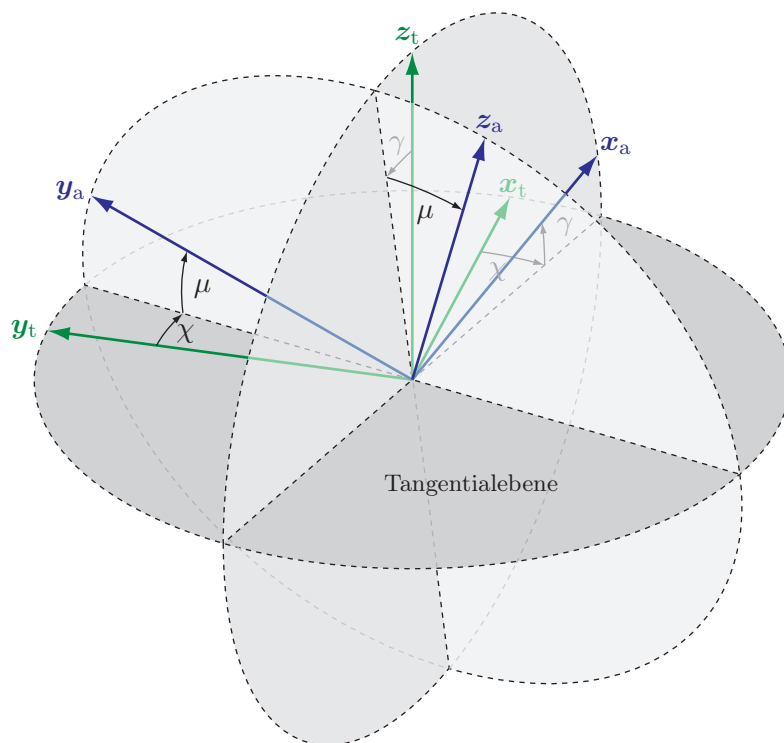


Abbildung 2.10.: Tangential- und aerodynamisches System

2.4.2. Kinematik

Satz 2.1 (Zeitableitung in rotierenden Systemen)

Um die Zeitableitung einer Größe in einem rotierenden System auf ein feststehendes System umzurechnen, muss der Differentialoperator durch

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{fest}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \quad (2.7)$$

transformiert werden, wobei $\boldsymbol{\omega}$ die vektorielle Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Systems „rot“ im System „fest“ ist (siehe z.B. [12] oder [17]).

Die Differentialgleichungen für die Position des Gleiters werden ausgehend von der vektoriellen Identität

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{m}} \mathbf{r} = \mathbf{v} \quad (2.8)$$

hergeleitet. Es ist grundsätzlich egal, in welchem System diese Gleichung ausgewertet wird, allerdings ist die Auflösung nach den gesuchten Variablen im Tangentialsystem am Einfachsten.

Es ist aber zu beachten, dass die Ableitung auf der linken Seite von (2.8) die Zeitableitung in marsfesten Koordinaten ist, da die Geschwindigkeit im marsfesten System betrachtet werden soll. Satz 2.1 vereinfacht dabei den Rechenweg erheblich, weil er es erlaubt, den Positionsvektor

im einfacheren Tangentialsystem nach der Zeit zu differenzieren, anstatt ihn zuerst in das marsfeste System umzurechnen, zu differenzieren und anschließend wieder ins Tangentialsystem zurück zu transformieren.

Die linke Seite von (2.8) wird unter Verwendung von Satz 2.1 zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_m \mathbf{r} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0 + h \end{pmatrix}_t = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_t + \boldsymbol{\omega}^{t/m} \times \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0 + h \end{pmatrix}_t \\ &= \begin{pmatrix} (R_0 + h)\dot{\Lambda} \\ -(R_0 + h)\dot{\Theta} \cos \Lambda \\ \dot{h} \end{pmatrix}_t, \end{aligned}$$

und die rechte Seite entspricht

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{T}_a & \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_a \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v \cos \chi \cos \gamma \\ -v \sin \chi \cos \gamma \\ v \sin \gamma \end{pmatrix}_t. \quad (2.9)$$

Durch Koordinatenvergleich erhält man schließlich die Differentialgleichungen für Θ , Λ und h :

$$\dot{\Theta} = \frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \quad (2.10a)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{v}{R_0 + h} \cos \gamma \cos \chi \quad (2.10b)$$

$$\dot{h} = v \sin \gamma \quad (2.10c)$$

2.4.3. Dynamik

Die Dynamik des Gleiters wird mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

hergeleitet. Da dieses Gesetz nur in Inertialsystemen gilt, beziehen sich die darin enthaltenen Differentialoperatoren auf das Inertialsystem „i“. Mit Hilfe von Satz 2.1 können diese Differentialoperatoren jedoch wieder transformiert werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_i \mathbf{r} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_i \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right] \stackrel{(2.8)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_i \left(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right) \\ &= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_m + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \right] \left(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_m \mathbf{v} + \left(\frac{d}{dt}\right)_m \left(\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right) + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_t \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{t/m} \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \left(\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Dabei entspricht $2\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{v}$ der negativen Coriolisbeschleunigung und $\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times (\boldsymbol{\omega}^{m/i} \times \mathbf{r})$ der Zentripetalbeschleunigung.

Mit \mathbf{v} aus (2.9) und

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{m/i} &= \left({}^m\mathbf{T}_t^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \right)_m \Big|_t = \begin{pmatrix} \Omega \cos \Lambda \\ 0 \\ \Omega \sin \Lambda \end{pmatrix}_t \\ \boldsymbol{\omega}^{t/m} &= \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \cos \Lambda \\ \dot{\Lambda} \\ \dot{\Theta} \sin \Lambda \end{pmatrix}_t \stackrel{(2.10a)}{=} \frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} \begin{pmatrix} \sin \chi \\ \cos \chi \\ \tan \Lambda \sin \chi \end{pmatrix}_t \stackrel{(2.10b)}{=} \end{pmatrix}_t\end{aligned}$$

ergibt sich für die rechte Seite von (2.11)

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dt^2} \right)_i \mathbf{r} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \chi & -v \sin \gamma \cos \chi & -v \cos \gamma \sin \chi \\ -\cos \gamma \sin \chi & v \sin \gamma \sin \chi & -v \cos \gamma \cos \chi \\ \sin \gamma & v \cos \gamma & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \end{pmatrix}_t \\ &+ \underbrace{\frac{v^2 \cos \gamma}{R_0 + h} \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \chi + \tan \Lambda \cos \gamma \sin^2 \chi \\ \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi \cos \chi - \sin \gamma \sin \chi \\ -\cos \gamma \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_t} \\ &+ 2\Omega v \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \Lambda \cos \gamma \sin \chi \\ \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi - \cos \Lambda \sin \gamma \\ -\cos \Lambda \cos \gamma \sin \chi \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_c} + \Omega^2 \cos \Lambda (R_0 + h) \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \Lambda \\ 0 \\ -\cos \Lambda \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_z} \Big|_t.\end{aligned}$$

Für die linke Seite von (2.11) werden die Beschleunigungen durch Gravitation, Auftrieb und Widerstand wie folgt modelliert:

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(h) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_g} + \underbrace{{}^t\mathbf{T}_a \begin{pmatrix} -\frac{F_D}{m} \\ 0 \\ \frac{F_L}{m} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(h) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_g} + \underbrace{\frac{S}{2m} \varrho(h) v^2 \mathbf{T}_a \begin{pmatrix} -C_D(Ma, \alpha) \\ 0 \\ C_L(Ma, \alpha) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_a} \Big|_a$$

Nach Berechnung der Zwischenergebnisse

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}_t &= -\frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan \Lambda \sin \chi \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}_c &= -2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Lambda \sin \chi \\ \sin \Lambda - \cos \Lambda \tan \gamma \cos \chi \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}_z &= -\Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda \begin{pmatrix} \cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi \\ \frac{1}{v} (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \\ \frac{1}{v \cos \gamma} \sin \Lambda \sin \chi \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}_g &= g(h) \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ -\frac{\cos \gamma}{v} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}_a &= \frac{S}{2m} \varrho(h) v \begin{pmatrix} -v C_D(Ma, \alpha) \\ \cos \mu C_L(Ma, \alpha) \\ \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} C_L(Ma, \alpha) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

folgen die Differentialgleichungen für die die Gleiter-Dynamik

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda (\cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi) - g(h) \sin \gamma \\
 &\quad - \frac{S}{2m} \varrho(h) v^2 C_D(Ma, \alpha) \\
 \dot{\gamma} &= \frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} + 2\Omega \cos \Lambda \sin \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \cos \Lambda (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \\
 &\quad - g(h) \frac{\cos \gamma}{v} + \frac{S}{2m} \varrho(h) v \cos \mu C_L(Ma, \alpha) \\
 \dot{\chi} &= \frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} \tan \Lambda \sin \chi + 2\Omega (\sin \Lambda - \cos \Lambda \tan \gamma \cos \chi) \\
 &\quad + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v \cos \gamma} \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi + \frac{S}{2m} \varrho(h) v \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} C_L(Ma, \alpha).
 \end{aligned}$$

2.4.4. Zusammenfassung der Bewegungsdifferentialgleichungen

Zusammenfassend erhält man aus den beiden vorigen Abschnitten die sechs Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\dot{\Theta} = \frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \quad (2.12a)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{v}{R_0 + h} \cos \gamma \cos \chi \quad (2.12b)$$

$$\dot{h} = v \sin \gamma \quad (2.12c)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -\frac{S}{2m} \varrho(h) v^2 C_D(Ma, \alpha) - g(h) \sin \gamma \\ & + \Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda (\cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi) \end{aligned} \quad (2.12d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \cos \mu \frac{S}{2m} \varrho(h) v C_L(Ma, \alpha) - \left(\frac{g(h)}{v} - \frac{v}{R_0 + h} \right) \cos \gamma \\ & + 2\Omega \cos \Lambda \sin \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \cos \Lambda (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \end{aligned} \quad (2.12e)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \frac{S}{2m} \varrho(h) v C_L(Ma, \alpha) + \frac{v}{R_0 + h} \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi \\ & + 2\Omega (\sin \Lambda - \cos \Lambda \tan \gamma \cos \chi) + \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \sin \Lambda \cos \Lambda \sin \chi}{v \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (2.12f)$$

Kapitel 3

Optimalsteuerungsproblem

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Optimalsteuerungstheorie aus Abschnitt 1.2 auf das hier vorliegende Problem der optimalen Steuerung eines Gleiters beim Eintritt in die Marsatmosphäre angewandt.

3.1. Problemstellung

3.1.1. Zielfunktional

Da die Aufheizung des Gleiters beim Eintritt in die Atmosphäre den Aufwand zur Isolierung bestimmt, ist die während der gesamten Flugzeit vom Gleiter aufgenommene Wärme $q(t_f)$ zu minimieren. Bei fester Anfangszeit $t_0 = 0$ und freier Endzeit t_f lässt sie sich durch

$$q(t_f, \mathbf{x}) = \int_0^{t_f} \dot{q}(v, \varrho) dt, \quad q(0) = 0$$

ausdrücken. Somit ergibt sich als Zielfunktional

$$I(t_f, \mathbf{x}) = g + \int_0^{t_f} L(\mathbf{x}) dt$$

mit

$$g = 0 \quad \text{und} \quad L(\mathbf{x}) = \dot{q}(v, \varrho).$$

3.1.2. Nebenbedingungen

Die Bewegungsdifferentialgleichungen (2.12) sind Nebenbedingungen im Sinne der Optimalsteuerungsaufgabe und seien zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

zusammengefasst.

Außerdem treten im untersuchten Problem noch drei verschiedene Typen von Punktbedingungen im Inneren des Intervalls $[t_0, t_f]$ auf. Sie entstehen im Verlauf der Homotopiekette einerseits durch nichtglatte Approximationen von Schallgeschwindigkeit und aerodynamischen Beiwerten, andererseits durch die unten beschriebene, punktweise Festlegung der Flughöhe. Im Folgenden

wird für alle drei Typen jeweils nur ein exemplarischer Punkt $t_{S_a}, t_{S_b}, t_{S_c} \in (t_0, t_f)$ betrachtet. Die Erweiterung auf mehrere solche inneren Punkte ist trivial.

Immer wenn die Trajektorie einen Punkt niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung der Modellgleichungen durchläuft, muss ein Mehrzielknoten eingefügt werden. Einerseits benötigen Schrittweitensteuerungen der numerischen Integratoren eine hohe Differenzierbarkeitsordnung, da sie die rechte Seite des gegebenen Differentialgleichungssystems nur an endlich vielen Zwischenpunkten auswerten, um damit die Ableitung approximieren. Deshalb muss zumindest ein Stützpunkt eingefügt werden, der einen Neustart des Integrators veranlasst. Andererseits führen Unstetigkeiten der rechten Seite im Allgemeinen zu Sprüngen in den adjungierten Variablen, die als innere Punktbedingungen berücksichtigt werden müssen und den Stützpunkt damit zum Schaltpunkt machen. Die beiden verfeinerten Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte führen zu Mehrzielknoten, die durch die Bedingungen

$$h_{S_a} = h_{\text{fest}}$$

bzw.

$$Ma(v_{S_b}, h_{S_b}) = Ma_{\text{fest}}$$

festgelegt sind. Dabei stehen h_{fest} und Ma_{fest} für Elemente der Knotenvektoren $\boldsymbol{\eta}_h$ bzw. $\boldsymbol{\eta}_{Ma}$.

Bemerkung. Die Zuschaltung einer Bremsklappe bei einer Geschwindigkeit von $Ma = 5$ kann ebenfalls als Unstetigkeit des Widerstandsbeiwertes an dieser Stelle aufgefasst werden, so dass dieser Fall nicht gesondert betrachtet wird.

Neben diesen beiden Typen von inneren Punktbedingungen existiert auch noch ein dritter. Er entsteht durch die punktweise Festlegung der minimalen Flughöhe des Gleiters beim ersten Eintritt in die untere Marsatmosphäre. Da die minimale Höhe an dem durch

$$\dot{h} = v \sin \gamma = 0 \quad \begin{matrix} v \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \sin \gamma = 0 \quad \begin{matrix} \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \gamma = 0$$

definierten Punkt angenommen wird, werden dort die beiden Bedingungen

$$\gamma_{S_c} = 0 \quad \text{und} \quad h_{S_c} = h_{\text{fest}}$$

gefordert. Durch Vergrößern von h_{fest} kann damit die minimale Höhe heraufgesetzt werden.

3.1.3. Steuerbeschränkungen

Zur Steuerung des Gleiters stehen der Anstellwinkel α und der Querneigungswinkel μ zur Verfügung.

Der Anstellwinkel legt im Wesentlichen den Staupunkt (und damit den Punkt des maximalen Wärmeflusses auf der Oberfläche des Gleiters) fest. Daher erscheint es sinnvoll, α auf einen sehr engen Bereich zu beschränken, damit die besonders stark zu isolierende Fläche möglichst

klein gehalten werden kann. Um den Anstellwinkel α auf das kompakte Intervall $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ zu beschränken, wird die Transformation

$$\alpha(\varphi) = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin^2 \varphi$$

auf die unbeschränkte Steuervariable $\varphi \in \mathbf{R}$ durchgeführt. Ebenso wird der Querneigungswinkel μ durch

$$\mu(\psi) = \mu_{\min} + (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \sin^2 \psi$$

auf $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ beschränkt, um zu starke Rollbewegungen zu vermeiden.

Durch Optimierung der neuen Steuervariablen φ und ψ werden die Beschränkungen für α und μ implizit eingehalten und die Einführung von zusätzlichen Steuerbeschränkungen vermieden.

3.2. Ankopplung der Nebenbedingungen

Zunächst werden – wie in Abschnitt 1.2.2 beschrieben – die Differentialgleichungsnebenbedingungen an das Zielfunktional angekoppelt. Man erhält dann als Integranden des erweiterten Zielfunktional

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top (\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}).$$

Da aber das Zielfunktional somit nichtglatte Modellfunktionen enthalten kann, müssen Punkte niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung – wie oben erwähnt – gesondert berücksichtigt werden. Zusammen mit der Punktbedingung für die Festlegung der minimalen Höhe folgt nach Ankopplung an das Zielfunktional

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathbf{x}_{S_a}^-, \mathbf{x}_{S_b}^-, \mathbf{x}_{S_c}^-, \lambda_{S_a}, \lambda_{S_b}, \lambda_{S_{c1}}, \lambda_{S_{c2}}) = & \lambda_{S_a} (h_{S_a}^- - h_{\text{fest}}) \\ & + \lambda_{S_b} (Ma(v_{S_b}^-, h_{S_b}^-) - Ma_{\text{fest}}) \\ & + \lambda_{S_{c1}} \gamma_{S_c}^- + \lambda_{S_{c2}} (h_{S_c}^- - h_{\text{fest}}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Bemerkung. Da die Stetigkeit der Zustände an allen inneren Punkten gefordert wird, ist es unerheblich, ob in der Ankopplung (3.1) die links- oder rechtsseitigen Grenzwerte der Zustandsvariablen verwendet werden.

Für die Hamiltonfunktion gilt nach Definition 1.3

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \dot{q}(\mathbf{x}) + \lambda_\theta \dot{\Theta}(\mathbf{x}) + \lambda_A \dot{A}(\mathbf{x}) + \lambda_h \dot{h}(\mathbf{x}) + \lambda_v \dot{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda_\gamma \dot{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda_\chi \dot{\chi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3.2)$$

Da sowohl die angekoppelten Punktbedingungen (3.1) als auch die Hamiltonfunktion (3.2) autonom sind, kann laut Folgerung 1.7 der Test auf $H \equiv 0$ durchgeführt werden.

3.3. Innere Punktbedingungen

Die aus (3.1) und der allgemeinen Variation (1.5b) und (1.5e) folgenden Sprungbedingungen werden nun jeweils für einen exemplarischen Punkt hergeleitet.

3.3.1. Nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit

Stellen, an denen das verfeinerte Modell für die Schallgeschwindigkeit $a(h)$ eine niedrigere Differenzierbarkeit hat, sind durch Bedingungen der Form

$$h(t_{S_a}) = h_{\text{fest}} \quad (3.3a)$$

festgelegt. Koppelt man diese Punktbedingung, wie in (3.1) gezeigt, mit einem Lagrangeparameter $\lambda_{S_a} \in \mathbf{R}$ an das Zielfunktional an und fordert zusätzlich

$$\mathbf{x}(t_{S_a}^+) = \mathbf{x}(t_{S_a}^-), \quad (3.3b)$$

also die Stetigkeit aller Zustände an dieser Sprungstelle, so erhält man aus (1.5b)

$$H(t_{S_a}^+) = H(t_{S_a}^-) \quad (3.3c)$$

und aus (1.5e)

$$\lambda_{\theta}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\theta}(t_{S_a}^-) \quad (3.3d)$$

$$\lambda_{\Lambda}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\Lambda}(t_{S_a}^-) \quad (3.3e)$$

$$\lambda_h(t_{S_a}^+) = \lambda_h(t_{S_a}^-) - \lambda_{S_a} \quad (3.3f)$$

$$\lambda_v(t_{S_a}^+) = \lambda_v(t_{S_a}^-) \quad (3.3g)$$

$$\lambda_{\gamma}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\gamma}(t_{S_a}^-) \quad (3.3h)$$

$$\lambda_{\chi}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\chi}(t_{S_a}^-). \quad (3.3i)$$

Bemerkung. Die Stetigkeit der Zustände wurde hier direkt durch $\delta \mathbf{x}_{S_a}^+ = \delta \mathbf{x}_{S_a}^-$ berücksichtigt. Das gleiche Ergebnis erhält man bei unabhängiger Variation der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von \mathbf{x}_{S_a} durch Ankoppeln der Stetigkeitsbedingung (3.3b), wenn man die Ankopplungsparameter anschließend wieder aus den resultierenden Gleichungen eliminiert.

Insgesamt erhält man so also die 14 Bedingungen (3.3) für die 12 Differentialgleichungsvariablen, den Sprungparameter λ_{S_a} und zur Festlegung des Schaltpunktes t_{S_a} . Da der Sprungparameter λ_{S_a} aber nur einmal auftritt, muss er nicht bestimmt werden und man kann durch Weglassen der Bedingung (3.3f) einen freien Sprung in λ_h zulassen, so dass man nur noch 13 Bedingungen zur Festlegung von ebenso vielen Variablen hat.

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen, dass $\tilde{\mathbf{f}}$ stetig ist, sowie $\dot{h}(t_S) \neq 0$ gilt, lässt sich aus (3.3c–3.3e) und (3.3g–3.3i) auch die Stetigkeit von λ_h folgern. Diese zusätzlichen Voraussetzungen werden im vorliegenden Fall jedoch bei $h = 141$ km verletzt, weil dort die Schallgeschwindigkeit unstetig approximiert wurde, was zu einer unstetigen rechten Seite $\tilde{\mathbf{f}}$ führt. Selbst bei $h = 85$ km kann wegen der Umrechnung der stetigen B-Spline-Darstellung in stückweise Polynome (die durch die Rundung der Polynomkoeffizienten nicht mehr stetig sind) nicht von stetigem $\tilde{\mathbf{f}}$ ausgegangen werden.

3.3.2. Nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte

Analog können auch die Übergangsbedingungen für Stellen niedrigerer Differenzierbarkeit des verfeinerten Modells der aerodynamischen Beiwerte hergeleitet werden. Hier sind die Schaltpunkte durch

$$Ma(v(t_{S_b}), h(t_{S_b})) = Ma_{\text{fest}} \quad (3.4a)$$

festgelegt. Nach der Ankopplung mit λ_{S_b} in (3.1) und der Stetigkeitsforderung

$$\mathbf{x}(t_{S_b}^+) = \mathbf{x}(t_{S_b}^-) \quad (3.4b)$$

erhält man hier

$$H(t_{S_b}^+) = H(t_{S_b}^-) \quad (3.4c)$$

sowie

$$\lambda_{\theta}(t_{S_b}^+) = \lambda_{\theta}(t_{S_b}^-) \quad (3.4d)$$

$$\lambda_{\Lambda}(t_{S_b}^+) = \lambda_{\Lambda}(t_{S_b}^-) \quad (3.4e)$$

$$\lambda_h(t_{S_b}^+) = \lambda_h(t_{S_b}^-) + \lambda_{S_b} \left[\frac{va'(h)}{a^2(h)} \right]_{t_{S_b}^-} \quad (3.4f)$$

$$\lambda_v(t_{S_b}^+) = \lambda_v(t_{S_b}^-) - \lambda_{S_b} \left[\frac{1}{a(h)} \right]_{t_{S_b}^-} \quad (3.4g)$$

$$\lambda_{\gamma}(t_{S_b}^+) = \lambda_{\gamma}(t_{S_b}^-) \quad (3.4h)$$

$$\lambda_{\chi}(t_{S_b}^+) = \lambda_{\chi}(t_{S_b}^-). \quad (3.4i)$$

Elimination von λ_{S_b} aus den beiden Sprungbedingungen (3.4f) und (3.4g) liefert die neue Bedingung

$$\lambda_h(t_{S_b}^+) - \lambda_h(t_{S_b}^-) + \left[\frac{va'(h)}{a(h)} \right]_{t_{S_b}^-} \cdot (\lambda_v(t_{S_b}^+) - \lambda_v(t_{S_b}^-)) = 0. \quad (3.4j)$$

Ersetzt man die beiden verwendeten Gleichungen durch diese neue Verknüpfung der Sprünge in λ_h und λ_v und verzichtet auf die Bestimmung des eliminierten Parameters λ_{S_b} , so erhält man auch hier wieder 13 Bedingungen für die 12 Differentialgleichungsvariablen und zur Festlegung des Schaltpunktes.

Für eine stetige rechte Seite $\tilde{\mathbf{f}}$ ließe sich (unter im Allgemeinen erfüllten Zusatzvoraussetzungen wie z.B. $\dot{h} \neq 0$, sowie $\frac{\dot{v}}{h} \neq \left[\frac{va'(h)}{a(h)} \right]_{t_{S_b}^-}$) wiederum zeigen, dass λ_h und λ_v stetig sind.

3.3.3. Punktweise Beschränkung der Höhe

Schließlich werden noch die Übergangsbedingungen für eine Festlegung der minimalen Höhe durch die beiden Gleichungen

$$\gamma(t_{S_c}) = 0 \quad (3.5a)$$

und

$$h(t_{S_c}) = h_{\text{fest}} \quad (3.5b)$$

hergeleitet. Nach der Ankopplung mit $\lambda_{S_{c1}}$ und $\lambda_{S_{c2}}$ in (3.1) und der Stetigkeitsforderung

$$\mathbf{x}(t_{S_c}^+) = \mathbf{x}(t_{S_c}^-) \quad (3.5c)$$

erhält man hier

$$H(t_{S_c}^+) = H(t_{S_c}^-) \quad (3.5d)$$

sowie

$$\lambda_{\theta}(t_{S_c}^+) = \lambda_{\theta}(t_{S_c}^-) \quad (3.5e)$$

$$\lambda_{\Lambda}(t_{S_c}^+) = \lambda_{\Lambda}(t_{S_c}^-) \quad (3.5f)$$

$$\lambda_h(t_{S_c}^+) = \lambda_h(t_{S_c}^-) - \lambda_{S_{c2}} \quad (3.5g)$$

$$\lambda_v(t_{S_c}^+) = \lambda_v(t_{S_c}^-) \quad (3.5h)$$

$$\lambda_{\gamma}(t_{S_c}^+) = \lambda_{\gamma}(t_{S_c}^-) - \lambda_{S_{c1}} \quad (3.5i)$$

$$\lambda_{\chi}(t_{S_c}^+) = \lambda_{\chi}(t_{S_c}^-). \quad (3.5j)$$

Die beiden Lagrange-Parameter $\lambda_{S_{c1}}$ und $\lambda_{S_{c2}}$ tauchen je einmal auf, so dass durch Weglassen von (3.5g) und (3.5i) wieder die benötigten 13 Bedingungen zur Verfügung stehen.

Bei dieser dritten Punktbedingung ist zu beachten, dass aus der Stetigkeit der rechten Seite im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der beiden Adjungierten λ_h und λ_{γ} folgt. Aus der Stetigkeit der Hamiltonfunktion und den Übergangsbedingungen für die adjungierten Variablen folgt hier

$$\left(\lambda_h(t_{S_c}^+) - \lambda_h(t_{S_c}^-)\right)\dot{h}(t_{S_c}) + \left(\lambda_{\gamma}(t_{S_c}^+) - \lambda_{\gamma}(t_{S_c}^-)\right)\dot{\gamma}(t_{S_c}) = 0.$$

Da aber

$$\dot{h}(t_{S_c}) = v \sin \gamma(t_{S_c}) \stackrel{(3.5a)}{=} 0$$

gilt, ist der Sprung in λ_h völlig frei, während λ_{γ} für $\dot{\gamma}(t_{S_c}) \neq 0$ stetig sein muss.

3.4. Adjungierte Differentialgleichungen

Die Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen werden durch Anwendung von (1.7) auf (3.2) hergeleitet:

$$\dot{\lambda}_{\theta} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{\Lambda} = & -\lambda_{\theta} \frac{v}{R_0 + h} \frac{\tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \\ & + \lambda_v \Omega^2 (R_0 + h) [2 \sin \Lambda \cos \Lambda \sin \gamma + (1 - 2 \sin^2 \Lambda) \cos \gamma \cos \chi] \\ & + \lambda_{\gamma} \left\{ 2 \Omega \sin \Lambda \sin \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} [2 \sin \Lambda \cos \Lambda \cos \gamma - (1 - 2 \sin^2 \Lambda) \sin \gamma \cos \chi] \right\} \\ & - \lambda_{\chi} \left[\frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos^2 \Lambda} + 2 \Omega (\cos \Lambda + \sin \Lambda \tan \gamma \cos \chi) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \frac{(1 - 2 \sin^2 \Lambda) \sin \chi}{\cos \gamma} \right] \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_h = & -\frac{\partial \dot{q}}{\partial \varrho}(v, \varrho) \varrho'(h) \\
& + \lambda_\Theta \frac{v}{(R_0 + h)^2} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \\
& + \lambda_\Lambda \frac{v}{(R_0 + h)^2} \cos \gamma \cos \chi \\
& + \lambda_v \left[\frac{S}{2m} v^2 \left(\varrho'(h) C_D(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_D}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right) + g'(h) \sin \gamma \right. \\
& \quad \left. - \Omega^2 \cos \Lambda (\cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi) \right] \tag{3.6c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda_\gamma \left[\cos \mu \frac{S}{2m} v \left(\varrho'(h) C_L(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_L}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{g'(h)}{v} + \frac{v}{(R_0 + h)^2} \right) \cos \gamma + \frac{\Omega^2}{v} \cos \Lambda (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \right] \\
& - \lambda_\chi \left[\frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \frac{S}{2m} v \left(\varrho'(h) C_L(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_L}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{v}{(R_0 + h)^2} \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi + \frac{\Omega^2 \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi}{v \cos \gamma} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_v = & -\frac{\partial \dot{q}}{\partial v}(v, \varrho) \\
& - \lambda_\Theta \frac{1}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \\
& - \lambda_\Lambda \frac{1}{R_0 + h} \cos \gamma \cos \chi \\
& - \lambda_h \sin \gamma \\
& + \lambda_v \frac{S}{2m} \varrho(h) v \left(2C_D(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_D}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{1}{a(h)} \right) \\
& - \lambda_\gamma \left[\cos \mu \frac{S}{2m} \varrho(h) \left(C_L(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_L}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{1}{a(h)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{g(h)}{v^2} + \frac{1}{R_0 + h} \right) \cos \gamma - \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v^2} \cos \Lambda (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \right] \\
& - \lambda_\chi \left[\frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \frac{S}{2m} \varrho(h) \left(C_L(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_L}{\partial Ma}(Ma, \alpha) \frac{1}{a(h)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{R_0 + h} \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi - \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi}{v^2 \cos \gamma} \right] \tag{3.6d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_\gamma = & \lambda_\Theta \frac{v}{R_0 + h} \frac{\sin \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \\
 & + \lambda_\Lambda \frac{v}{R_0 + h} \sin \gamma \cos \chi \\
 & - \lambda_h v \cos \gamma \\
 & + \lambda_v [g(h) \cos \gamma - \Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda (\cos \Lambda \cos \gamma + \sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi)] \\
 & - \lambda_\gamma \left[\left(\frac{g(h)}{v} - \frac{v}{R_0 + h} \right) \sin \gamma + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \cos \Lambda (\sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi - \cos \Lambda \sin \gamma) \right] \\
 & + \lambda_\chi \left[-\sin \mu \frac{\tan \gamma}{\cos \gamma} \frac{S}{2m} \varrho(h) v C_L(Ma, \alpha) + \frac{v}{R_0 + h} \tan \Lambda \sin \gamma \sin \chi + 2\Omega \frac{\cos \Lambda \cos \chi}{\cos^2 \gamma} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \cos \Lambda \sin \Lambda \tan \gamma \sin \chi}{v \cos \gamma} \right]
 \end{aligned} \tag{3.6e}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_\chi = & -\lambda_\Theta \frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \cos \chi}{\cos \Lambda} \\
 & + \lambda_\Lambda \frac{v}{R_0 + h} \cos \gamma \sin \chi \\
 & - \lambda_v \Omega^2 (R_0 + h) \sin \Lambda \cos \Lambda \cos \gamma \sin \chi \\
 & - \lambda_\gamma \left(2\Omega \cos \Lambda \cos \chi - \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \sin \Lambda \cos \Lambda \sin \gamma \sin \chi \right) \\
 & - \lambda_\chi \left(\frac{v}{R_0 + h} \tan \Lambda \cos \gamma \cos \chi + 2\Omega \cos \Lambda \tan \gamma \sin \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \sin \Lambda \cos \Lambda \cos \chi}{v \cos \gamma} \right)
 \end{aligned} \tag{3.6f}$$

3.5. Optimale Steuerung

Bemerkung (zu den Annahmen in diesem Abschnitt). S , m und $\varrho(h)$ sind per definitionem größer als Null. Zusätzlich wird von einer stets positiven Bahngeschwindigkeit v , sowie von einem stets positivem Auftriebskoeffizienten $C_L(Ma, \alpha)$ ausgegangen. Letztere Annahme ist für den in dieser Arbeit betrachteten Anstellwinkelbereich zutreffend. Würden hingegen auch Fluglagen mit Anstellwinkeln nahe oder unter 0° zugelassen, so müsste diese Annahme verworfen werden. Zu guter Letzt wird davon ausgegangen, dass sowohl $\alpha_{\max} > \alpha_{\min}$ als auch $\mu_{\max} > \mu_{\min}$ gilt.

Notation. In den Diagrammen zu den Schaltfunktionen und Legendre-Clebsch-Bedingungen wird jeweils die durch $\frac{S}{2m} \varrho v$ geteilte Hamiltonfunktion verwendet. Sie wird mit \tilde{H} bezeichnet. Das führt zu einem wesentlich besser skalierten Wertebereich und erleichtert damit die Festlegung der Steuerstruktur (v.a. in großer Höhe, wo die Dichte nahezu Null ist).

Die Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung folgen aus der Anwendung von (1.6) und (1.8) auf die transformierten Steuergrößen φ und ψ und lauten

$$H_\varphi = H_\alpha \alpha_\varphi = 0 \tag{3.7}$$

und

$$H_\psi = H_\mu \mu_\psi = 0, \tag{3.8}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} & H_{\varphi\psi} \\ H_{\psi\varphi} & H_{\psi\psi} \end{pmatrix} \text{ ist positiv semidefinit.} \quad (3.9)$$

Satz 3.1

Unter den zu Beginn dieses Abschnitts getroffenen Annahmen ist die Legendre-Clebsch-Bedingung (3.9) hier äquivalent zu den beiden Bedingungen

$$H_{\varphi\varphi} \geq 0 \quad (3.10a)$$

und

$$H_{\psi\psi} \geq 0. \quad (3.10b)$$

Beweis. Betrachte zunächst Optimalitätsbedingung (3.8)

$$H_{\psi} = \frac{S}{2m} \varrho v C_L(Ma, \alpha) \left(-\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \mu_\psi = 0,$$

die wegen $\frac{S}{2m} \varrho v C_L(Ma, \alpha) \neq 0$

$$\left(-\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \mu_\psi = 0 \quad (3.11)$$

erzwingt. Dieser Term taucht auch in den gemischten partiellen Ableitungen

$$H_{\varphi\psi} = H_{\psi\varphi} = \frac{S}{2m} \varrho v \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(Ma, \alpha) \left(-\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \alpha_\varphi \mu_\psi \stackrel{(3.11)}{=} 0$$

auf, so dass diese ebenfalls verschwinden. Die positive Semidefinitheit der Matrix

$$\begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} & H_{\varphi\psi} \\ H_{\psi\varphi} & H_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & H_{\psi\psi} \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zur Nichtnegativität ihrer beiden Eigenwerte, die nun direkt als $H_{\varphi\varphi}$ und $H_{\psi\psi}$ ablesbar sind. Damit folgt die Behauptung. ■

3.5.1. Anstellwinkel α

Um die Optimalitätsbedingung (3.7) zu erfüllen, muss zumindest einer der beiden Terme H_α oder α_φ verschwinden. Der erste Fall entspricht einem freien Teilstück, während der zweite Fall zu einem Randstück von α führt (was aber kein Randstück der transformierten Steuerung φ ist).

Freies Teilstück

Sei

$$\alpha_\varphi \neq 0, \quad (3.12)$$

dann liefert die Auswertung der Bedingung

$$H_\alpha = 0 \quad (3.13)$$

und Division durch $\frac{S}{2m} \rho v$ die Gleichung

$$\boxed{\tilde{H}_\alpha = -\lambda_v v \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + \left(\lambda_\gamma \cos \mu + \lambda_\chi \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \right) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 0} \quad (3.14)$$

zur Bestimmung von α . Sie ist nichtlinear in α und enthält außerdem auch die zweite Steuergröße μ . Da die Bestimmungsgleichung für μ (3.20) aber nicht von α abhängt, kann nach expliziter Berechnung von μ ein eindimensionales Newton-Verfahren für α verwendet werden.

Die umgeformte Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10a)

$$H_{\varphi\varphi} = H_{\alpha\alpha}\alpha_\varphi^2 + H_{\alpha\varphi\varphi} \stackrel{(3.13)}{=} H_{\alpha\alpha}\alpha_\varphi^2 \geq 0 \stackrel{(3.12)}{\Leftrightarrow} H_{\alpha\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\tilde{H}_{\alpha\alpha} = -\lambda_v v \frac{\partial^2 C_D}{\partial \alpha^2} + \left(\lambda_\gamma \cos \mu + \lambda_\chi \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \right) \frac{\partial^2 C_L}{\partial \alpha^2} \geq 0} \quad (3.15)$$

muss a posteriori überprüft werden.

Randstück

Die Bedingung

$$\alpha_\varphi = 0 \quad (3.16)$$

liefert

$$(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin 2\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (3.17)$$

also

$$\alpha = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin^2 \varphi \stackrel{(3.17)}{=} \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin^2 k \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \alpha_{\min}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \alpha_{\max}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Um zu bestimmen, ob α_{\min} oder α_{\max} angenommen wird, wird nun (3.10a) verwendet:

$$H_{\varphi\varphi} = H_{\alpha\alpha}\alpha_\varphi^2 + H_{\alpha\varphi\varphi} \stackrel{(3.16)}{=} H_{\alpha\alpha}\alpha_\varphi^2 = 2H_\alpha(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \cos 2\varphi$$

$$\stackrel{(3.17)}{=} 2H_\alpha(\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \cos k\pi \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{H}_\alpha \geq 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \tilde{H}_\alpha \leq 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

\tilde{H}_α wird also zur Schaltfunktion und man erhält die Implikationen

$$\alpha = \alpha_{\min} \Rightarrow \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) \geq 0,$$

$$\alpha = \alpha_{\max} \Rightarrow \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) \leq 0.$$

Die umgeformte Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10a) ist damit a priori erfüllt und muss nicht extra überprüft werden.

Im Fall $\tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) = 0$ findet ein Übergang zwischen Rand- und freier Steuerung bei $\alpha = \alpha_{\min}$ statt und eine dieser beiden Gleichungen kann als Schaltbedingung verwendet werden. Analoges gilt im Fall $\tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) = 0$. In der Praxis müssen somit zwei Funktionsverläufe als Schaltfunktionen betrachtet werden, nämlich $\tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min})$ und $\tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max})$.

Würde $\tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) = \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) = 0$ gelten, so wäre evtl. ein Sprung in der Steuerung zwischen den beiden Rändern möglich. Dieser Fall ist jedoch in der Homotopiekette nie aufgetreten.

3.5.2. Querneigungswinkel μ

In diesem Abschnitt werden die Optimalitätsbedingungen (3.8) und (3.10b) angewendet, um den Querneigungswinkel μ zu bestimmen. Das geschieht in ähnlicher Weise wie die Bestimmung von α im vorangegangenen Abschnitt.

Freies Teilstück

Gilt

$$\mu_\psi \neq 0, \quad (3.18)$$

so erhält man unter der Voraussetzung, dass stets $C_L(Ma, \alpha) \neq 0$ gilt¹, aus

$$H_\mu = 0 \quad (3.19)$$

die folgende Gleichung für μ :

$$\lambda_\gamma \sin \mu = \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma} \cos \mu \quad (3.20)$$

Nach Quadrierung von (3.20) folgt unter Ausnutzung der Beziehung $\sin^2 \mu + \cos^2 \mu = 1$ für den Sinus und Kosinus des Querneigungswinkels

$$\sin \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}, \quad (3.21a)$$

$$\cos \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\gamma. \quad (3.21b)$$

Die Wahl der richtigen Vorzeichens ergibt sich durch Einsetzen von (3.21) in (3.20) sowie in (3.10b), das hier die Form

$$\begin{aligned} H_{\psi\psi} &= H_{\mu\mu} \mu_\psi^2 + H_{\mu\psi\psi} \stackrel{(3.19)}{=} H_{\mu\mu} \mu_\psi^2 \geq 0 \stackrel{(3.18)}{\Leftrightarrow} H_{\mu\mu} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow C_L(Ma, \alpha) \left(-\lambda_\gamma \cos \mu - \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma} \sin \mu \right) \geq 0 \end{aligned}$$

hat. Aus Ersterem ergibt sich, dass die beiden Vorzeichen in (3.21) identisch sein müssen, woraufhin letzters Einsetzen unter der Annahme $C_L(Ma, \alpha) > 0$ negative Vorzeichen erzwingt. Abschließend erhält man also die Gleichungen

$$\sin \mu = - \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}, \quad (3.22a)$$

$$\cos \mu = - \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\gamma, \quad (3.22b)$$

¹Falls $C_L(Ma, \alpha) = 0$ gilt, existiert kein Auftrieb, und μ ist daher unbestimmt. Dieser Fall wird durch diese Annahme ausgeschlossen, da er – wie oben bereits erwähnt – im betrachteten Anstellwinkelbereich nicht eintreten kann.

die den Querneigungswinkel eindeutig bestimmen. Er kann in den meisten Programmiersprachen durch eine Arcustangensfunktion mit zwei Argumenten berechnet werden. Da die Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10b) bereits zur Bestimmung der Vorzeichen verwendet wurde, muss sie nicht nachträglich überprüft werden.

Randstück

Die Bestimmung des Querneigungswinkels im Falle eines Randstücks erfolgt vollkommen analog zum Anstellwinkel, so dass man hier aus den Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \mu_\psi &= 0 \\ H_{\psi\psi} &= H_{\mu\mu}\mu_\psi^2 + H_\mu\mu_\psi\psi = H_\mu\mu_\psi\psi \geq 0 \end{aligned}$$

die Implikationen

$$\begin{aligned} \mu = \mu_{\min} &\Rightarrow \tilde{H}_\mu(\mu_{\min}) \geq 0 \\ \mu = \mu_{\max} &\Rightarrow \tilde{H}_\mu(\mu_{\max}) \leq 0 \end{aligned}$$

für die Randsteuerung des Querneigungswinkels erhält. In den Fällen $\tilde{H}_\mu(\mu_{\min/\max}) = 0$ gelten zum Anstellwinkel analoge Bemerkungen.

3.5.3. Zusammenfassung der Schaltbedingungen

Fast man alle im letzten Abschnitt hergeleiteten Optimalitäts- und Schaltbedingungen zusammen, so erhält man folgenden Regelsatz zur Bestimmung der Steuerungen α und μ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) > 0 \wedge \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) > 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha_{\min} \\ \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) < 0 \wedge \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) < 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha_{\max} \\ \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) < 0 \wedge \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) > 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{frei}} \text{ aus (3.14) mit Überprüfung von (3.15)} \\ \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\min}) > 0 \wedge \tilde{H}_\alpha(\alpha_{\max}) < 0 &\Rightarrow \alpha = \alpha_{\min} \vee \alpha = \alpha_{\max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\mu(\mu_{\min}) > 0 \wedge \tilde{H}_\mu(\mu_{\max}) > 0 &\Rightarrow \mu = \mu_{\min} \\ \tilde{H}_\mu(\mu_{\min}) < 0 \wedge \tilde{H}_\mu(\mu_{\max}) < 0 &\Rightarrow \mu = \mu_{\max} \\ \tilde{H}_\mu(\mu_{\min}) < 0 \wedge \tilde{H}_\mu(\mu_{\max}) > 0 &\Rightarrow \mu = \mu_{\text{frei}} \text{ aus (3.22)} \\ \tilde{H}_\mu(\mu_{\min}) > 0 \wedge \tilde{H}_\mu(\mu_{\max}) < 0 &\Rightarrow \mu = \mu_{\min} \vee \mu = \mu_{\max} \end{aligned}$$

Übergänge zwischen den jeweils vier möglichen Fällen können also nur an Nullstellen der zugehörigen Schaltfunktionen auftreten. Mehrdeutigkeiten (wie im jeweils letzten Fall obiger

Fallunterscheidungen) können durch Anwendung des Minimumprinzips (1.9) aufgelöst werden.

In Abbildung 3.1 werden einige mögliche Konstellationen von Schaltfunktionen für eine allgemeine Steuerung u beispielhaft dargestellt. Dabei sind die Schaltstrukturen in den Abbildungen 3.1(a)-3.1(c) eindeutig festgelegt.

Einzig in Abbildung 3.1(d) sind zwei unterschiedliche Steuerungen denkbar: Entweder es wird auf dem gesamten dargestellten Intervall mit u_{\min} gesteuert, oder die Steuerung springt zwischenzeitlich von u_{\min} auf u_{\max} und wieder zurück. Die Entscheidung, welche der beiden Möglichkeiten optimal ist, kann in diesem Fall z.B. durch Anwendung des Minimumprinzips getroffen werden. Dazu müssen die Werte der Hamiltonfunktion für minimale und maximale Steuerung im strittigen Bereich verglichen werden. Diejenige Steuerung, die – bei Festhalten der anderen Argumente der Hamiltonfunktion – den kleineren Wert liefert, ist optimal. Eine weitere Möglichkeit, die optimale Lösung zu bestimmen, wäre, bei festgehaltenen Randwerten die Steuerung auf einem kleinen Teilintervall des strittigen Bereichs zu wechseln und den resultierenden Wert des Zielfunktional mit dem ursprünglichen Wert zu vergleichen.

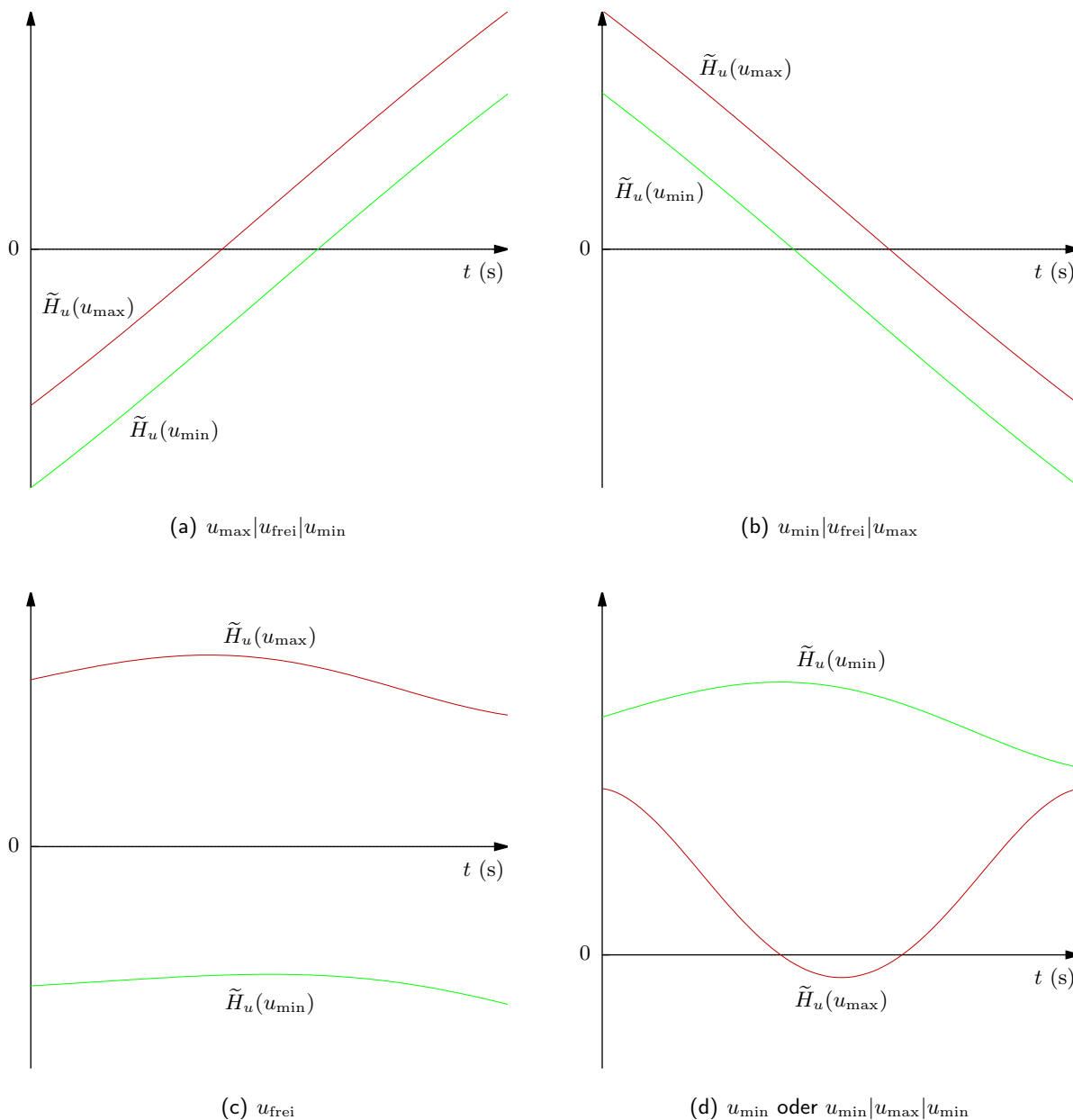


Abbildung 3.1.: Beispiele für verschiedene Verläufe von Schaltfunktionen und zugehörige mögliche Schaltstrukturen

Kapitel 4

Formulierung des Randwertproblems

Seien die Bewegungsdifferentialgleichungen (1.2) mit den Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen (3.6) zu einem System

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$$

zusammengefasst, wobei

$$\mathbf{y} : \begin{cases} [0, t_f] & \rightarrow \mathbf{R}^{12} \\ t & \mapsto (\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t))^\top \end{cases}$$

den Vektor der Zustände und Adjungierten darstellt. Die Steuerungen \mathbf{u} hängen dabei über die Optimalitätsbedingungen von \mathbf{y} ab. Aus der allgemeinen Variation (1.5d) und (1.5f) folgt, dass bei fester Anfangs- und freier Endzeit 13 Bedingungen

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_f) = \mathbf{0}$$

an die Randwerte von \mathbf{y} gestellt werden. (12 Randwerte für die Zustände bzw. Adjungierten und die Bedingung $H_f = 0$.) Somit handelt es sich um ein Randwertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Werden außerdem die verfeinerten Approximationen für Schallgeschwindigkeit oder aerodynamische Beiwerte verwendet, so führt das zum einen zu einer abschnittsweise definierten rechten Seite und zum anderen zu Punktbedingungen

$$\mathbf{r}_j(\mathbf{y}_j^+, \mathbf{y}_j^-) = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, m-1$$

an den nichtglatten inneren Punkten t_1, \dots, t_{m-1} . An diesen inneren Punkten müssen wieder jeweils 13 Bedingungen erfüllt sein. Es gilt also

$$\mathbf{r}_j : \mathbf{R}^6 \times \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^{13}, \quad j = 1, \dots, m,$$

und das Problem wird zu einem Mehrpunktrandwertproblem der Art von Problem 1.8. Es wird mit dem Programmpaket JANUS [8] gelöst. Für die Erfüllung der inneren Punktbedingungen werden Schaltpunkte eingeführt. Außerdem werden 49 zusätzliche innere Stützpunkte (an denen die Stetigkeit aller Variablen gefordert wird) verwendet, um die Vorteile der Mehrzielmethode auszunutzen. Für diese Anzahl von Stützpunkten erhält man eine – für die gegebene Problemstellung – relativ niedrige Kondition der Mehrzielmatrix (s.u.).

Beim Aufstellen des Mehrpunktrandwertproblems ist zu beachten, dass die Skalierung der Differentialgleichungsvariablen die Kondition des Problems wesentlich beeinflusst. Bei Betrachtung der Hamiltonfunktion (3.2) wird klar, dass die Skalierung der adjungierten Variablen

proportional von der Skalierung des Wärmeflusses \dot{q} abhängt. Daher wurde für den Wärmefluss die Einheit MW m^{-2} gewählt. Die resultierende untere Schranke für die Kondition der Mehrzielmatrix liegt dann im Bereich $5 \cdot 10^2$ bis $3 \cdot 10^3$.

Vor Aufruf des Lösers wird das gesamte Problem durch Einführung einer trivialen Differentialgleichung für t_f auf das feste Zeitintervall $[0, 1]$ transformiert, so dass die inneren Punkte durch eine veränderte Endzeit t_f nicht zu stark verschoben werden müssen. Es ist zu beachten, dass diese Transformation lediglich zur Übergabe an JANUS durchgeführt wird. An den Optimalitätsbedingungen ändert sich also nichts, weil t_f nicht als neuer Zustand und die Endzeit immer noch als frei betrachtet werden.

Zuletzt sei noch eine Bemerkung zur Überprüfung der von der Mehrzielmethode errechneten Lösungen im Verlauf der im nächsten Kapitel beschriebenen Homotopieketten erlaubt: Sollte die Mehrzielmethode konvergieren, so ist damit nicht automatisch sichergestellt, dass die errechnete Lösung optimal ist. Wurde beispielsweise eine durch Homotopien veränderte neue Schaltstruktur noch nicht berücksichtigt, so ist der Fehler im Allgemeinen erst a posteriori festzustellen und muss dann korrigiert werden. Folgende Maßnahmen wurden getroffen, um sicherzustellen, dass die errechneten Lösungen optimal sind:

- *Beobachtung des Zielfunktional:* Aus leicht einsehbaren Gründen muss der Wert des Zielfunktional kleiner werden, sobald die Problemstellung mehr Freiheiten zulässt. Das ist z.B. bei der Freigabe der Steuerungen und Vergrößerung der Steuerbereiche der Fall.¹
- *Hamiltonfunktions-Test:* Vor allem Fehler in der Herleitung der adjungierten Differentialgleichungen sowie Fehler bei der Umsetzung des Problems in ein Programm können durch Überprüfung der Hamiltonfunktion nach Folgerung 1.7 schnell erkannt werden.
- *Minimumprinzip:* Durch die leichte Variation der Steuerungen um ihre errechneten Werte darf der Wert der Hamiltonfunktion bei gleichzeitigem Festhalten der anderen Argumente laut (1.9) nur zunehmen. Wird er dagegen kleiner, so ist die berechnete Steuerung nicht optimal und muss verworfen werden.

¹Diese Beobachtung gilt nicht, wenn während der Freigabe einer Steuerung der Randwert einer adjungierten Variablen auf einem Wert ungleich Null festgehalten wird, da dann der zugehörige Zustand weder fest noch frei ist.

Kapitel 5

Homotopiekette

Definition 5.1 (Homotopie)

Eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(x, 1) = g(x)$$

gilt.

Betrachtet man in obiger Definition den zweiten Parameter als Zeitvariable, so kann H als kontinuierliche Verformung von f zu g angesehen werden.

Im Falle der numerischen Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen der optimalen Steuerung bezieht sich der Begriff der Homotopie auf den Übergang von einem Problem zu einem anderen unter Änderung eines Problemparameters. Die Änderung des Problemparameters erfolgt dabei nicht kontinuierlich, sondern in kleinen Schritten. Diese dürfen höchstens so groß sein, dass das veränderte Problem mit der Lösung des Vorgängerproblems als Startschätzung gelöst werden kann. Sie sollten aber auch nicht zu klein sein, um nicht zu viele Probleme lösen zu müssen.

Eine Homotopiekette ist eine Aneinanderreihung mehrerer Homotopien, um verschiedene Problemparameter anzupassen.

Während des Lösens dieser Kette von Problemen müssen Veränderungen der Schaltstruktur, das Auftreten oder Wegfallen von Randstücken usw. erkannt und die entsprechenden Bedingungen im Randwertproblem angepasst werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Steuerung der Schrittweite für den Homotopieparameter entwickelt. Mit ihr gelingt es, die Anzahl der Newton-Iterationen pro Homotopieschritt bei ca. 10 zu halten. Dadurch wird einerseits verhindert, dass zu kleine Homotopieschritte gemacht werden und sich dadurch die Rechenzeit verlängert, andererseits wird die Anzahl der fehlgeschlagenen Mehrzielschritte möglichst klein gehalten. Eine solche Schrittweitensteuerung erleichtert insbesondere dem unerfahrenen¹ Anwender die Arbeit beim Anpassen der Problemparameter. So ist z.B. in diesem Kapitel von insgesamt 11 Homotopien von der Start- bis zur Referenzlösung die Rede. Das ist allerdings nur ein winziger Bruchteil der tatsächlich durchgeführten Homotopieversuche. Die allermeisten Versuche mussten verworfen werden, weil

¹im Sinne von ungeübt in der Behandlung des vorliegenden Problems

sie entweder auf einen Lösungsast führten, der irgendwann nicht mehr zur Konvergenz gebracht werden konnte oder weil während der Homotopie Änderungen der Schaltstruktur auftraten, die nach anschließender Verkleinerung des Homotopieparameters berücksichtigt werden mussten.

5.1. Errechnung einer Startlösung mit fester Steuerung

Der Ausgangspunkt der oben erwähnten Homotopiekette ist eine sog. Startlösung, also die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, das nur verwandt mit der vorliegenden Problemstellung ist. Da sich der Übergang von einer Lösung des ähnlichen Optimalsteuerungsproblems [20] (Eintritt einer Kapsel in die Erdatmosphäre) zu einer Lösung für den Eintritt eines Gleiters in die Marsatmosphäre als nicht gangbar erwies, musste eine neue Startlösung errechnet werden. Dafür sind aus der Literatur z.B. folgende Verfahren bekannt:

- Zunächst wird von vorgegebenen Anfangs- oder Endwerten aus ein vereinfachtes (z.B. ohne Zustandsbeschränkungen) Anfangswertproblem gelöst. Da die dafür notwendige Steuerung durch Optimalitätsbedingungen bestimmt ist, die auch von den adjungierten Variablen abhängen, müssen am Anfangspunkt der Integration sowohl Werte für die Zustände als auch für die Adjungierten vorgegeben sein. Generell ist aber entweder ein Zustand oder die zugehörige adjungierte Variable durch die Randbedingungen festgelegt, und fehlende Werte müssen geschätzt werden. Diese Schätzung ist jedoch schwierig und muss iterativ (wie beispielsweise in [4, 5] dargestellt) verbessert werden.
- Eine weitere Methode beruht auf dem Übergang von direkten zu indirekten Verfahren. In ([43, 44]) wird die Lösung eines direkten Verfahrens so fein diskretisiert, dass sie als Startlösung eines indirekten Verfahrens verwendet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein weiteres Verfahren entwickelt, das sich insbesondere für stark beschränkte Steuerungen (wie es hier der Anstellwinkel ist) eignet. Es beruht auf der Beobachtung, dass eine mit fest vorgegebener Steuerung berechnete Trajektorie als die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems betrachtet werden kann, wenn die Steuerung durch die Problemstellung auf die zur Errechnung der Startlösung verwendete Steuerung beschränkt ist.

5.1.1. Allgemeines Vorgehen

1. *Festlegen der Steuerung:* Wird die Steuerung konstant, also zeitunabhängig gewählt und ist das Problem ansonsten ebenfalls autonom, so kann der Hamiltonfunktions-Test wie in Folgerung 1.7 beschrieben durchgeführt werden. Wird die Steuerung dagegen zeitabhängig gewählt², so müsste das Problem zuerst autonomisiert werden, um diesen Test verwenden zu können.
2. *Festlegen der Zustände an einem Rand:* Es ist zunächst einer der beiden Ränder auszuwählen, von dem aus eine Trajektorie für die Zustandsvariablen errechnet wird. Dazu wird derjenige Rand verwendet, von dem aus eine Starttrajektorie durch Lösen eines

²Als zeitabhängige Steuerung wäre auch eine einfache Approximation einer, zuvor durch ein direktes Verfahren gewonnenen, Steuerung denkbar.

Anfangswertproblems leichter zu bestimmen ist. Welcher der beiden Ränder das ist, hängt von den geforderten Randbedingungen sowie den Zustandsdifferentialgleichungen ab.

3. *Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen:* Da nun sowohl Anfangs- oder Endwerte als auch eine Steuerung definiert sind, können zumindest die Zustandstrajektorien durch Lösen eines Anfangswertproblems bestimmt werden. Durch Variation der Steuerung, Randwerte und Endzeit in den vorangegangenen Schritten sollte es gelingen, eine Starttrajektorie zu finden, die die Randbedingungen am anderen Intervallende zumindest nicht grob verletzt.
4. *Festlegen der Randwerte für die adjungierten Variablen:* Da aus der vorangegangenen Integration nun an beiden Rändern Werte für die Zustandsvariablen vorliegen, können auch ihre Ableitungen bestimmt werden. Damit ist es möglich, wiederum einen Rand auszuwählen, an dem die adjungierten Variablen festgelegt werden. Dazu sollte derjenige Rand verwendet werden, an dem laut Problemstellung mehr Zustände frei sind. Das erleichtert die Schätzung der adjungierten Variablen, da sie für freie Zustände laut (1.5d) bzw. (1.5f) verschwinden müssen. Bei der Festlegung der Adjungierten an diesem Rand ist zu beachten, dass bei freier Endzeit t_f die Bedingung $H(t_f) = 0$ erfüllt sein muss.
5. *Integration, um die adjungierten Variablen zu berechnen:* Da nun Anfangs- oder Endwerte für alle adjungierten Variablen vorliegen, können die Werte der adjungierten Variablen im gesamten Intervall wieder durch Lösen eines Anfangswertproblems bestimmt werden.

Bemerkung. Welche Ränder in den Schritten 2 und 4 ausgewählt werden und welche der adjungierten Variablen so berechnet werden, dass die Randbedingung für freie Endzeit erfüllt ist, hängt vom Konvergenzverhalten des entstehenden Randwertproblems ab. Ist die Endzeit nicht frei sondern fest, so kann die Integrationszeit in Schritt 3 nicht variiert werden oder sie muss nachträglich auf den gewünschten Wert homotopiert werden. Außerdem kann die Hamiltonfunktion dann einen beliebigen Wert annehmen.

5.1.2. Konkretisierung der Arbeitsschritte für das vorliegende Problem

Zunächst wurden die beiden groben Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte verwendet (siehe Abschnitt 2.3.2). Die beiden Steuerungen wurden konstant zu $\alpha \equiv 40^\circ$ und $\mu \equiv -1^\circ$ ³ und die Anfangszustände wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned}\Theta(t_0) &= -145^\circ \\ \Lambda(t_0) &= 0^\circ \\ h(t_0) &= 500 \text{ km} \\ v(t_0) &= 7 \text{ km s}^{-1} \\ \gamma(t_0) &= -35^\circ \\ \chi(t_0) &= 70^\circ\end{aligned}$$

Lösen eines Anfangswertproblems in positiver Zeitrichtung lieferte die Zustandstrajektorien. Die resultierenden Endwerte der Zustandsvariablen sollten dabei möglichst nahe an den gewünschten Endwerten liegen, damit die Startlösung bereits in der Nähe der gesuchten

³Durch die Wahl von $\mu \equiv -1^\circ$ wurde sichergestellt, dass die Bahn der Startlösung nicht in einer Großkreisebene liegt, da das bei nachfolgenden Homotopien erfahrungsgemäß [7] zu numerischen Problemen durch eine singuläre Mehrzielmatrix führt.

optimalen Lösung ist. Insbesondere musste dazu beim vorliegenden Problem darauf geachtet werden, dass beim ersten Eintritt in die Marsatmosphäre so viel Energie abgebaut wurde, dass die Fluchtgeschwindigkeit von ca. 5 km s^{-1} unterschritten wird und die Trajektorie bei relativ niedriger Geschwindigkeit in Bodennähe endet.

Anschließend wurden die Endwerte der adjungierten Variablen so gewählt, dass die Hamiltonfunktion zu Null wird. Da $\dot{q}(t_f) \neq 0$ gilt, können beim vorliegenden Zielfunktional nicht alle adjungierten Variablen gleichzeitig zu Null gewählt werden. Hier wurde $v(t_f)$ als fest angenommen, so dass zumindest $\lambda_v(t_f) \neq 0$ gilt. Durch die Wahl von $\lambda_\gamma(t_f) = -1$ und $\lambda_\chi(t_f) = 0$ wurde erreicht, dass die Optimalitätsbedingungen am Endpunkt einen Querneigungswinkel von $\mu = 0^\circ$ ergeben⁴. Um eine sinnvolle Schaltstruktur zu erhalten wurde außerdem $\lambda_\Theta(t_f) = -50$ gewählt. $\lambda_v(t_f)$ wurde schließlich aus

$$\lambda_v(t_f) = \left. \frac{-\dot{q} + \lambda_\Theta \dot{\Theta} + \lambda_\gamma \dot{\gamma}}{\dot{v}} \right|_{t_f}$$

errechnet, so dass die Hamiltonfunktion verschwindet. Man erhält also neben den bereits errechneten Endwerten für die Zustände folgende Endwerte für die Adjungierten:

$$\begin{aligned} \lambda_\Theta(t_f) &= -50 \\ \lambda_A(t_f) &= 0 \\ \lambda_h(t_f) &= 0 \\ \lambda_v(t_f) &\approx 0,208 \\ \lambda_\gamma(t_f) &= -1 \\ \lambda_\chi(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Zuletzt wurde rückwärts in der Zeit integriert, um die adjungierten Variablen auf dem gesamten Intervall zu bestimmen.

Bemerkung. Das so beschriebene Vorgehen würde sich evtl. auch für die Lösung des in [4, 5] beschriebenen Problems anbieten, da dort Anfangswerte für alle Zustände sowie ein Endwert gegeben waren.

Nach Durchführung der oben beschriebenen Schritte ergeben sich also die Randbedingungen aus Tabelle 5.1 beim Übergang zu einem Randwertproblem.

Zur Charakterisierung der errechneten Startlösung sollen hier nur der Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf abgebildet werden. (Eine ausführliche numerische und graphische Lösungsbeschreibung ist in Anhang A.1 zu finden.) Abbildung 5.1 zeigt eine Trajektorie mit zwei sog. „Skips“, also Wiederaufstiegen, von denen der erste wesentlich ausgeprägter ist. Beim ersten Eintritt wird bereits mehr als die Hälfte der Geschwindigkeit abgebaut und die entsprechende kinetische Energie in Wärme umgewandelt.

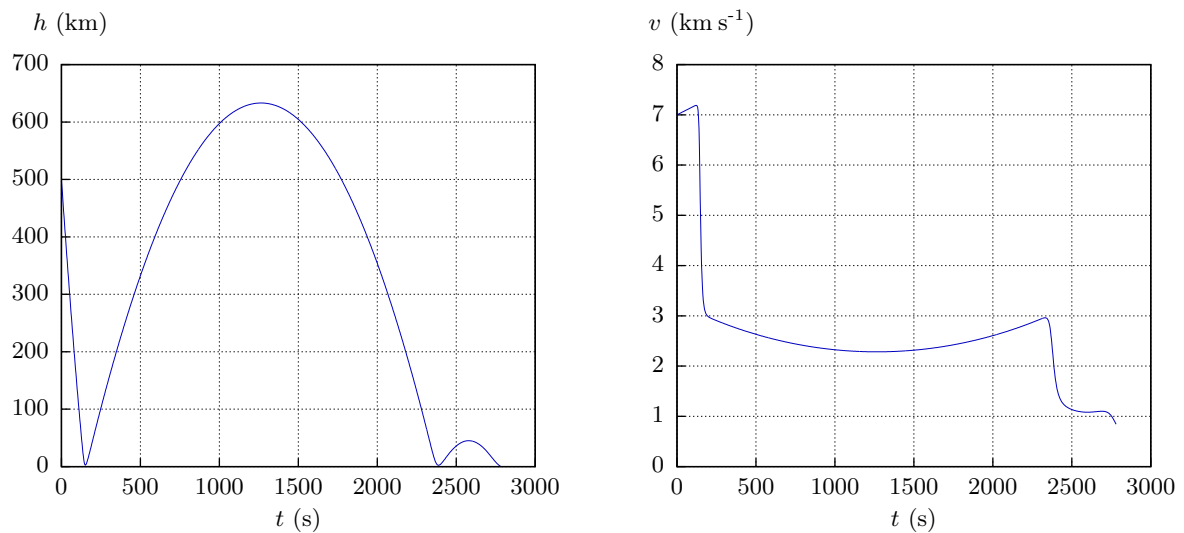
In mehreren Homotopien wurde anschließend die bisher konstant gehaltene Steuerung freigegeben, die Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte verfeinert, sowie die Randwerte angepasst. Die Freigabe der Steuerung ist dabei der erste und entscheidende Schritt

⁴Eine Festlegung von $\lambda_\gamma(t_f) = 0$ würde zu einer Singularität in den Optimalitätsbedingungen für μ führen, die zwar im Allgemeinen nur punktweise bestünde, den Querneigungswinkel am Ende aber äußerst sensitiv auf Problemänderungen reagieren lassen würde. Das wiederum würde zu häufigen Änderungen in der Schaltstruktur in der Homotopiekette führen.

Tabelle 5.1.: Randbedingungen für die Startlösung

Anfangsbedingungen	Endbedingungen
$\Theta(t_0) = -145^\circ$	$\lambda_\Theta(t_f) = -50$
$\Lambda(t_0) = 0^\circ$	$\lambda_\Lambda(t_f) = 0$
$h(t_0) = 500 \text{ km}$	$\lambda_h(t_f) = 0$
$v(t_0) = 7 \text{ km s}^{-1}$	$v(t_f) \approx 0,843 \text{ km s}^{-1}$
$\gamma(t_0) = -35^\circ$	$\lambda_\gamma(t_f) = -1$
$\chi(t_0) = 70^\circ$	$\lambda_\chi(t_f) = 0$

Nicht in den Randwerttabellen aufgeführte Differentialgleichungsvariablen sind jeweils frei.

**Abbildung 5.1.:** Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf der Startlösung

des Übergangs von der „optimalen“ Startlösung mit festgeschriebener Steuerung zur Lösung eines echten Optimalsteuerungsproblems mit variabler Steuerung und wird daher im folgenden Abschnitt ausführlich beschrieben.

5.2. Freigabe der Steuerungen

Da bei der Errechnung einer Startlösung die konstanten Steuerungen $\alpha \equiv 40^\circ$ und $\mu \equiv -1^\circ$ verwendet wurden, entspricht das einer Wahl von $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = 40^\circ$ bzw. $\mu_{\min} = \mu_{\max} = -1^\circ$. Die Optimalitätsbedingungen für φ und ψ liefern die Schaltstruktur, die zur Freigabe der Steuerung benötigt wird.

Die Freigabe einer Steuergröße soll exemplarisch für eine allgemeine Steuerung u gezeigt werden. Das im Folgenden beschriebene Vorgehen lässt sich sowohl für α als auch für μ verwenden.

Jeder Nulldurchgang der Schaltfunktion H_u kennzeichnet einen Wechsel von minimaler zu maximaler Steuerung oder umgekehrt. Die Steuerbeschränkungen sind anfangs identisch, so dass auch nur eine Schaltfunktion $H_u(u_{\max}) = H_u(u_{\min}) = H_u(u_{\text{fest}})$ existiert. Bei der Freigabe der Steuerung ($u_{\max} > u_{\min}$) erhält man aber zwei Schaltfunktionen, eine für minimale, eine für maximale Steuerung. Im Allgemeinen gilt an den neuen Schaltpunkten $H_u(u_{\max}) > H_u(u_{\min})$, so dass der Wechsel am Schaltpunkt durch einen Übergangsbereich mit freier Steuerung erfolgen muss (siehe Abschnitt 3.5.3). Den Übergang zwischen fester und freier Steuerung erreicht man wie folgt:

1. *Anfangssituation:* Da die Steuerung ursprünglich auf einen Wert u_{fest} festgelegt ist, muss $u_{\max} = u_{\min} = u_{\text{fest}}$ gewählt werden.
2. *Einfügen von je zwei Schaltpunkten pro Nullstelle von H_u :* Die beiden pro Nullstelle eingefügten, neuen Schaltpunkte müssen dabei so gering wie möglich auseinander liegen. Ist ihr Abstand zu groß, so liefert die Optimalitätsbedingung auf dem freien Zwischenstück eine Steuerung, die die neuen Grenzen $u_{\max/\min}$ deutlich verletzt, so dass die Mehrzielmethode nicht mehr konvergiert. Andererseits dürfen die beiden Schaltpunkte nicht zu nahe beieinander liegen, da die Mehrzielmatrix sonst singular wird. Werden die neuen Schaltpunkte also beispielsweise an den durch die Bedingungen $H_u \pm \varepsilon = 0$ definierten Punkten eingefügt, so ist ein „gutes“ ε zu wählen.
3. *Homotopie zur Freigabe der Steuerung:* Führe gleichzeitig folgende Schritte durch:
 - a) Vergrößere das, bisher nur einen Punkt umfassende, Intervall $[u_{\text{fest}}, u_{\text{fest}}] \rightarrow [u_{\min}, u_{\max}]$.
 - b) Wähle als Steuerung auf dem Zwischenstück $\frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \rightarrow u_{\text{frei}}$.
 - c) Verschiebe die durch $H_u(u_{\max/\min}) \pm \varepsilon = 0$ festgelegten Schaltpunkte durch $\varepsilon \rightarrow 0$ auf ihre optimalen Positionen.
4. *Überprüfung der Lösung:* Nach Durchführung der Homotopie sollten wieder alle Schaltbedingungen sowie der Hamiltonfunktionstest erfüllt und die errechnete Lösung optimal sein.

Dieses Verfahren kann evtl. vereinfacht werden, indem schon zu Beginn der Homotopie in Schritt 3b) die freie Steuerung verwendet und in Schritt 3c) $\varepsilon = 0$ gewählt wird. Der oben beschriebene langsame Übergang auf das freie Zwischenstück ist tatsächlich nur notwendig, wenn das Problem schlecht skaliert ist oder die Schaltfunktion extrem steil verläuft.

Bemerkung (Lineare Steuerungen). Für den Fall einer linearen Steuerung, wie sie oft in der Robotik auftritt, vereinfacht sich das Freigeben der Steuerung erheblich. Da die Schaltfunktion H_u dann unabhängig von u ist, liegt eine bang-bang Steuerung vor. Bei der Freigabe der Steuerung muss daher nur ein Schalterpunkt pro Nulldurchgang eingefügt werden, und die Steuerung springt ohne freies Teilstück zwischen den beiden Extremalwerten. Damit entfällt das oben erwähnte Problem der nahe beieinanderliegenden Schalterpunkte.

Das oben vorgestellte Verfahren wurde zuerst zur Freigabe des Anstellwinkels und anschließend zur Freigabe des Querneigungswinkels verwendet. Der Anstellwinkel α konnte in einer einzigen Homotopie mit 17 Schritten freigegeben werden und die Schaltstruktur ergab sich zu

$$\alpha_{\max} | \alpha_{\text{frei}} | \alpha_{\min} | \alpha_{\text{frei}} | \alpha_{\max}.$$

Die Freigabe des Querneigungswinkels μ erwies sich als komplizierter und erforderte 6 Homotopien mit zusammen 110 Schritten. Im Falle eines zweideutigen Verlaufs der Schaltfunktionen $H_\mu(\mu_{\max/\min})$ konnte eine unstetige Steuerung ausgeschlossen werden. Dazu wurden zum einen Vergleichslösungen errechnet, bei denen die Steuerung auf sehr kleinen Intervallen geändert wurde. Da das Zielfunktional dadurch zunahm, konnten die Vergleichslösungen verworfen werden. Zum anderen wurde das Minimumprinzip verwendet. Die Schaltstruktur änderte sich während der Homotopiekette wie folgt:

$$\begin{array}{c} \mu_{\max} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\min} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\max} \\ \mu_{\text{frei}} | \mu_{\min} | \mu_{\text{frei}} \\ \mu_{\text{frei}} | \mu_{\min} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\min} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\max} \end{array}$$

Zur Freigabe der Steuerungen waren insgesamt 7 Homotopien mit zusammen 127 Schritten notwendig⁵.

5.3. Verfeinerung der Approximationen und Einführung einer Bremsklappe – Referenzlösung

Die nächsten Anpassungen umfassten die Verfeinerung der Modelle für die Schallgeschwindigkeit und die aerodynamischen Beiwerte sowie die Einführung der in Abschnitt 2.3.2 erwähnten Bremsklappen bei $Ma = 5$. Die dadurch auftretenden inneren Punktbedingungen wurden in Abschnitt 3.3 hergeleitet.

Die Verfeinerung der Modellfunktionen verursachten dabei keine wesentlichen Veränderungen der Lösung, wohingegen die Hinzunahme der Bremsklappen erst die notwendige Reduzierung der Endgeschwindigkeit ermöglichte.

⁵Diese 7 Homotopien sind aber – wie oben bereits erwähnt – nur ein Bruchteil der eigentlich durchgeführten Homotopieversuche.

Tabelle 5.2.: Randbedingungen für die Referenzlösung

Anfangsbedingungen	Endbedingungen
$\Theta(t_0) = -170^\circ$	$\Theta(t_f) = -33,5^\circ$
$\Lambda(t_0) = 0^\circ$	$\Lambda(t_f) = 19,1^\circ$
$h(t_0) = 500 \text{ km}$	$h(t_f) = 7,4 \text{ km}$
$v(t_0) = 7 \text{ km s}^{-1}$	$v(t_f) = 0,5 \text{ km s}^{-1}$
$\lambda_\gamma(t_0) = -10$	$\lambda_\gamma(t_f) = -0,1$
$\lambda_\chi(t_0) = 0$	$\lambda_\chi(t_f) = 0$

Die Randbedingungen für die Referenzlösung sind Tabelle 5.2 zu entnehmen. Hier wurde berücksichtigt, dass der Landeplatz von Pathfinder, $33,5^\circ$ westliche Länge und $19,1^\circ$ nördliche Breite, erreicht werden sollte (vgl. [28]). Die Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0)$ wird – wie in Tabelle B.2 erwähnt – im rotierenden Marssystem angegeben. Daher ist die eigentliche Eintrittsgeschwindigkeit (betrachtet im Inertialsystem) etwas höher und liegt bei ca. $7,198 \text{ km s}^{-1}$.

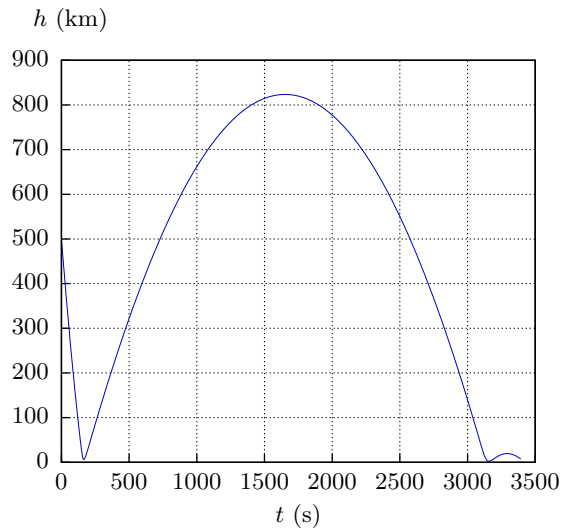
Insgesamt waren für alle oben genannten Anpassungen 4 Homotopien mit zusammen 53 Schritten notwendig. Während dieser Homotopiekette änderte sich die Steuerstruktur nicht. Einige für die Referenzlösung charakteristische Lösungskurven sind in Abbildung 5.2 gezeigt. Für alle weiteren Daten und Graphen wird auf Anhang A.2 verwiesen.

Abbildung 5.2(a) zeigt im Vergleich zur Startlösung einen noch ausgeprägteren ersten Wiederaufstieg. Der hohe und lang andauernde Skip ermöglicht die Abstrahlung eines großen Teils der beim ersten Eintritt aufgenommenen Wärmemenge an die Umgebung. Dieser Effekt wurde jedoch nicht simuliert, so dass er in Abbildung 5.2(b) auch nicht beobachtbar ist. Die gesamte aufgenommene Wärme reduzierte sich im Vergleich zur Startlösung nur unwesentlich, was v.a. an der Anpassung der Endbedingungen liegt: Die Randbedingungen der Referenzlösung erzwingen beispielsweise eine um ca. 40 % niedrigere Endgeschwindigkeit.

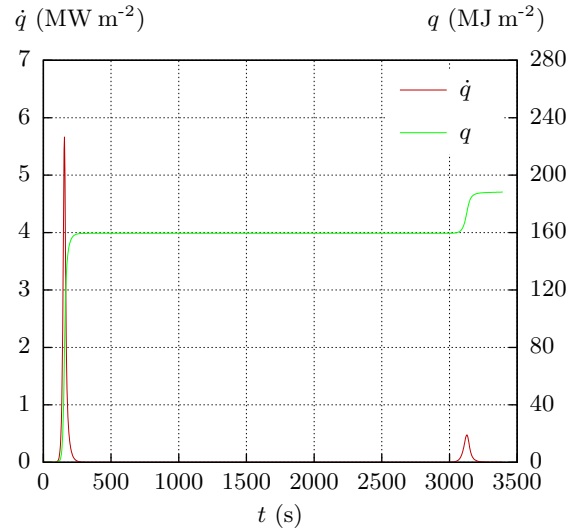
Die Abbildungen 5.2(c) und 5.2(d) weisen deutlich auf den unterschiedlichen Charakter der beiden Steuerungen hin. So war die Freigabe des Anstellwinkels (im vorigen Abschnitt) wesentlich einfacher als die des Querneigungswinkels. Das liegt zum einen daran, dass der für α zulässige Winkelbereich viel kleiner ist als der für μ ; zum anderen kann für den Querneigungswinkel im Allgemeinen nicht ausgeschlossen werden, dass er von einer Grenze zur anderen springt. Dieser Fall trat jedoch, wie oben bereits erwähnt, nicht ein.

5.4. Einführung einer punktweisen Höhenbeschränkung

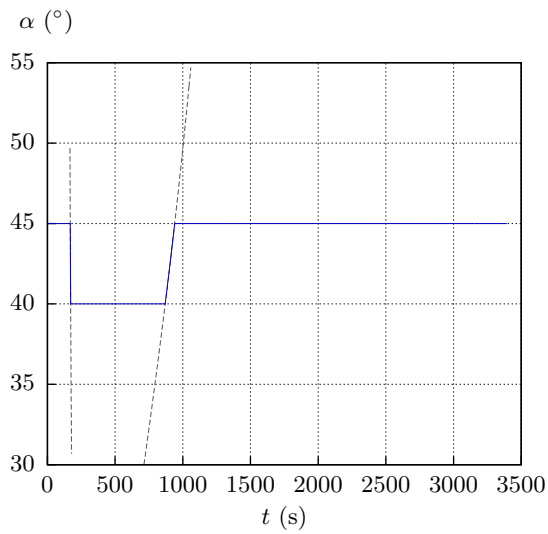
Um den Abbau der kinetischen Energie und damit die Aufheizung des Gleiters besser auf die beiden Skips zu verteilen, wurde versucht, die minimale Höhe beim ersten Eintritt zu vergrößern. Damit würde der erste Skip in einem Bereich geringerer Luftdichte verlaufen und die Aufheizung wäre geringer. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde die in Abschnitt 3.1.2 beschriebene Punktbedingung gewählt [7]. Die sich ergebenden inneren Punktbedingungen wurden in Abschnitt 3.3.3 hergeleitet. Die am Ende dieses Abschnitts gefolgerte Stetigkeit von λ_γ konnte a posteriori bestätigt werden.



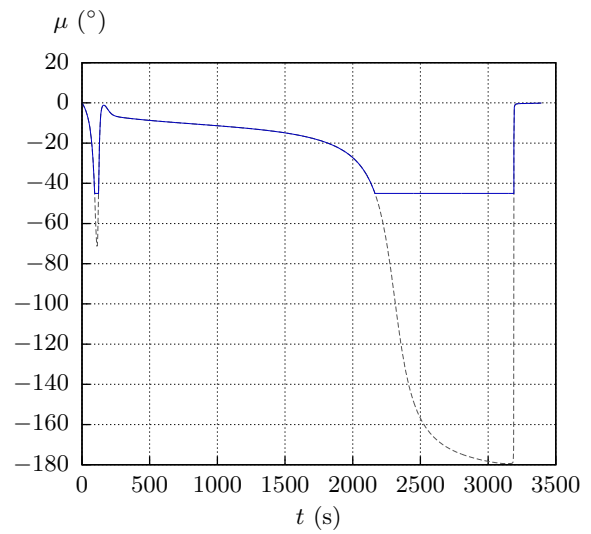
(a) Höhenverlauf



(b) Wärmefluss und Aufheizung



(c) Anstellwinkel



(d) Querneigungswinkel

Abbildung 5.2.: Lösungskurven zur Referenzlösung

Diese Strategie brachte keinen wesentlichen Erfolg, da die Höhe dadurch nur um ca. 44 m auf 6,379 km vergrößert werden konnte, so dass sich der maximale Wärmefluss nur um ca. 1 ‰ verringerte. Da keine wesentlichen Änderungen an der Referenzlösung erreicht wurden, wird diese Lösung hier auch nicht näher beschrieben.

Anhang A

Graphen und Stützwerte der Lösungstrajektorien

Zu Gunsten einer besseren Übersichtlichkeit des Hauptteils, werden die beiden besonders wichtigen Trajektorien der Startlösung und der Referenzlösung in diesem Anhang genauer dargestellt. Zu diesem Zweck werden im Folgenden die Graphen der Differentialgleichungsvariablen des Randwertproblems sowie die Werte dieser Variablen an den Rand- und Schaltpunkten angegeben.

A.1. Startlösung

Die in Abschnitt 5.1 beschriebene Startlösung hat folgende Randwerte:

	$t_0 = 0 \text{ s}$	$t_f = 2780,007\,259\,3 \text{ s}$
Θ (rad)	$-0,253\,072\,741\,54 \cdot 10^1$	$-0,684\,641\,551\,85 \cdot 10^0$
Λ (rad)	$0,136\,310\,515\,61 \cdot 10^{-26}$	$0,301\,191\,494\,11 \cdot 10^0$
h (km)	$0,500\,000\,000\,00 \cdot 10^3$	$0,550\,303\,486\,07 \cdot 10^0$
v (km s ⁻¹)	$0,700\,000\,000\,00 \cdot 10^1$	$0,843\,250\,385\,83 \cdot 10^0$
γ (rad)	$-0,610\,865\,238\,20 \cdot 10^0$	$-0,206\,807\,038\,96 \cdot 10^0$
χ (rad)	$0,122\,173\,047\,64 \cdot 10^1$	$0,171\,592\,061\,24 \cdot 10^1$
λ_Θ	$-0,500\,000\,000\,00 \cdot 10^2$	$-0,500\,000\,000\,00 \cdot 10^2$
λ_Λ	$-0,140\,256\,433\,33 \cdot 10^2$	$0,167\,373\,588\,97 \cdot 10^{-14}$
λ_h	$-0,217\,879\,492\,23 \cdot 10^0$	$0,171\,057\,974\,15 \cdot 10^{-14}$
λ_v	$-0,216\,945\,468\,23 \cdot 10^1$	$0,207\,806\,189\,37 \cdot 10^0$
λ_γ	$-0,621\,761\,182\,94 \cdot 10^3$	$-0,100\,000\,000\,00 \cdot 10^1$
λ_χ	$-0,550\,057\,025\,96 \cdot 10^1$	$0,126\,978\,321\,68 \cdot 10^{-13}$

Der Wert des Zielfunktional ist $q(t_f) = 188,382\,301\,62 \text{ MJ m}^{-2}$.

Das Randwertproblem wurde mit 51 äquidistanten Mehrzielknoten errechnet und besitzt keine Schaltpunkte.

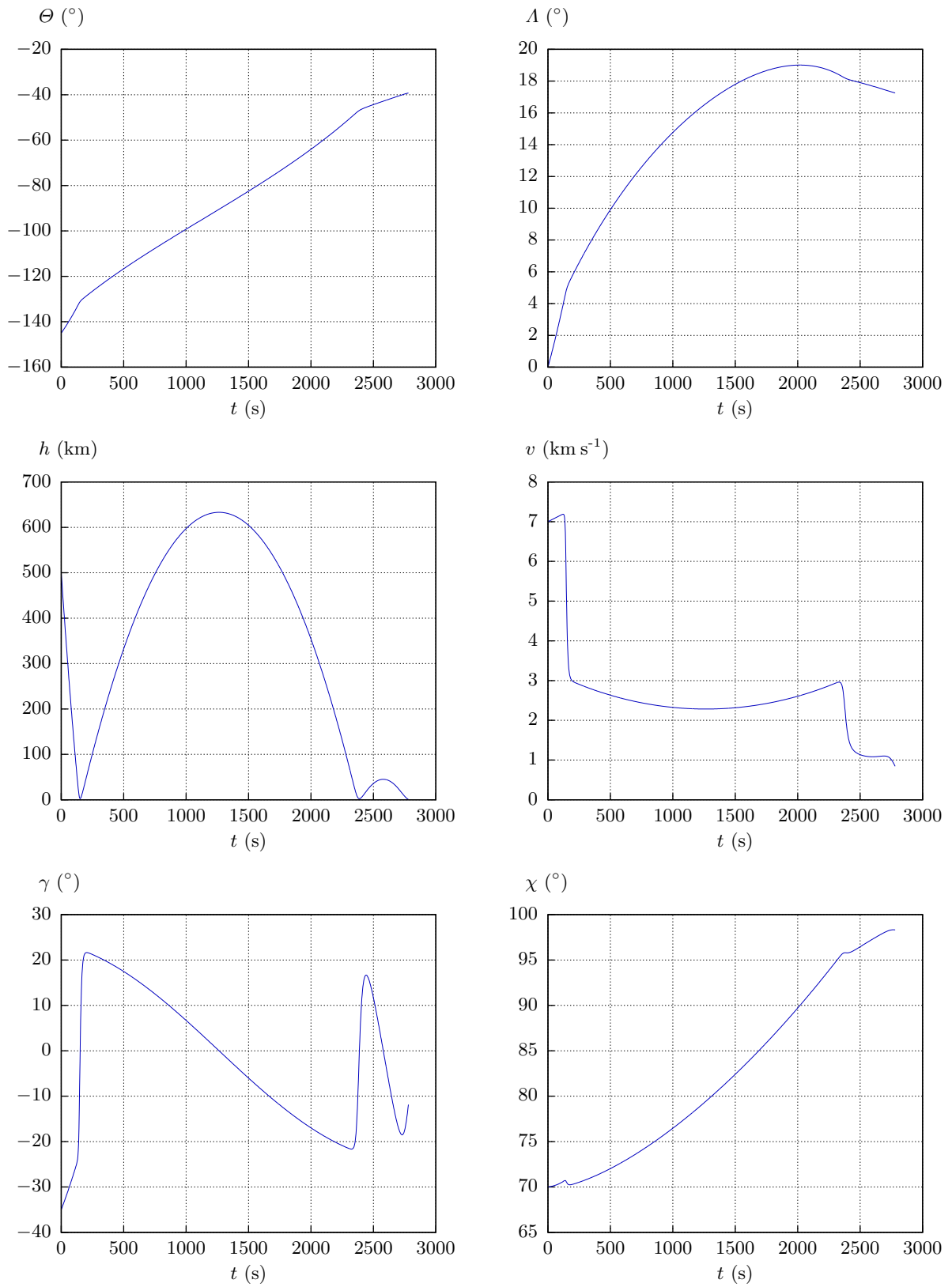


Abbildung A.1.: Startlösung – Zustände

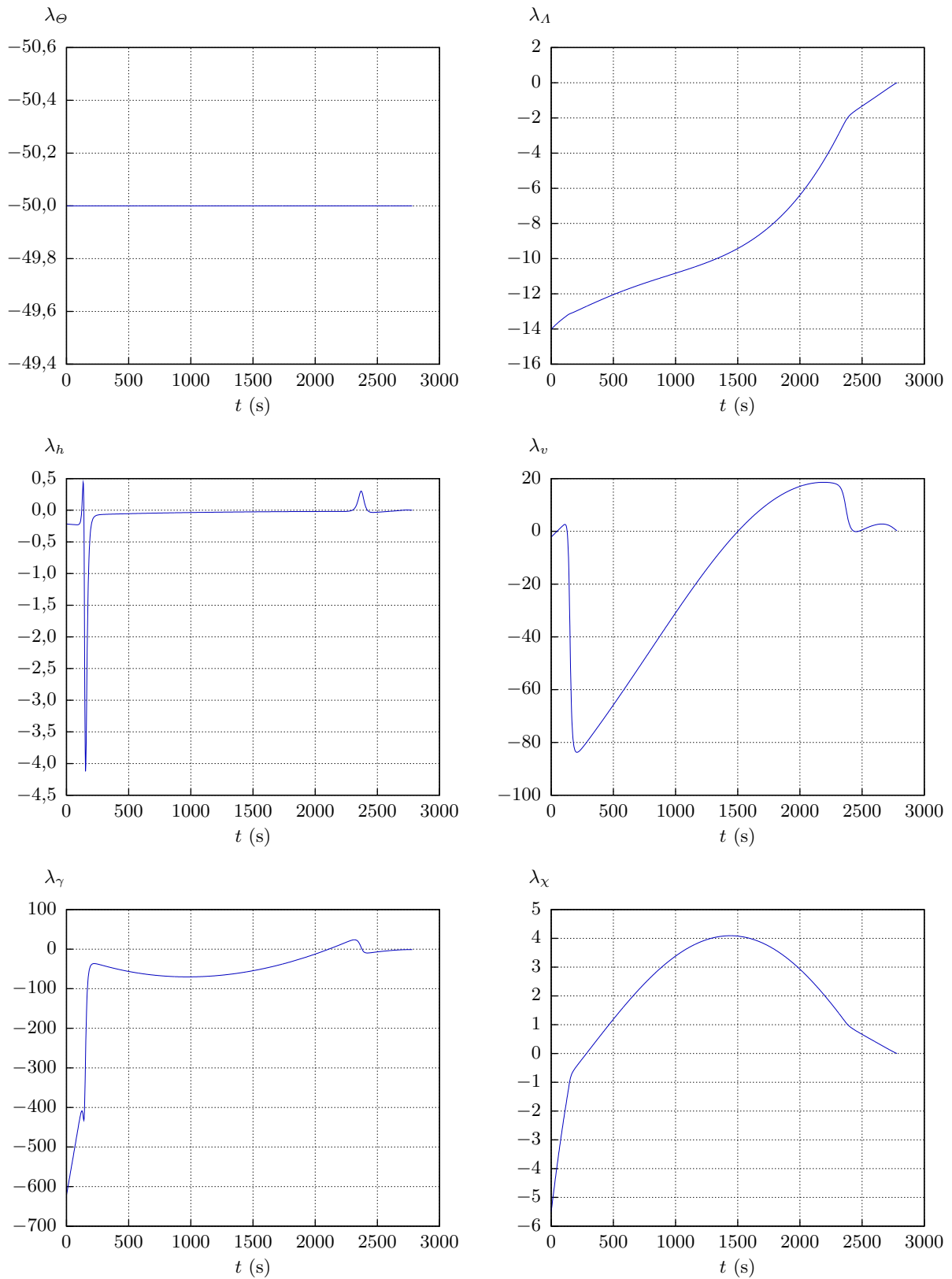


Abbildung A.2.: Startlösung – Adjungierte Variablen

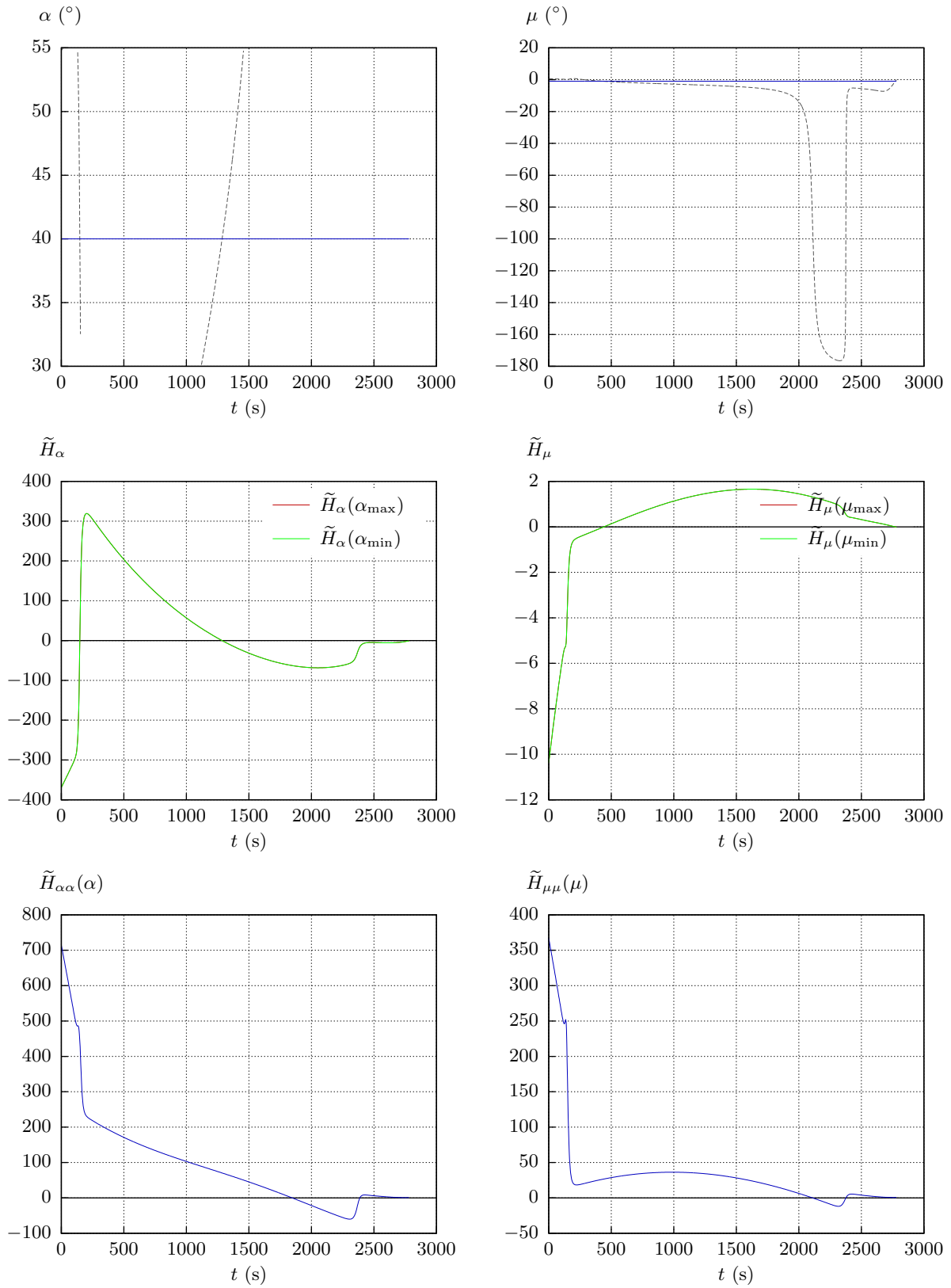


Abbildung A.3.: Startlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen

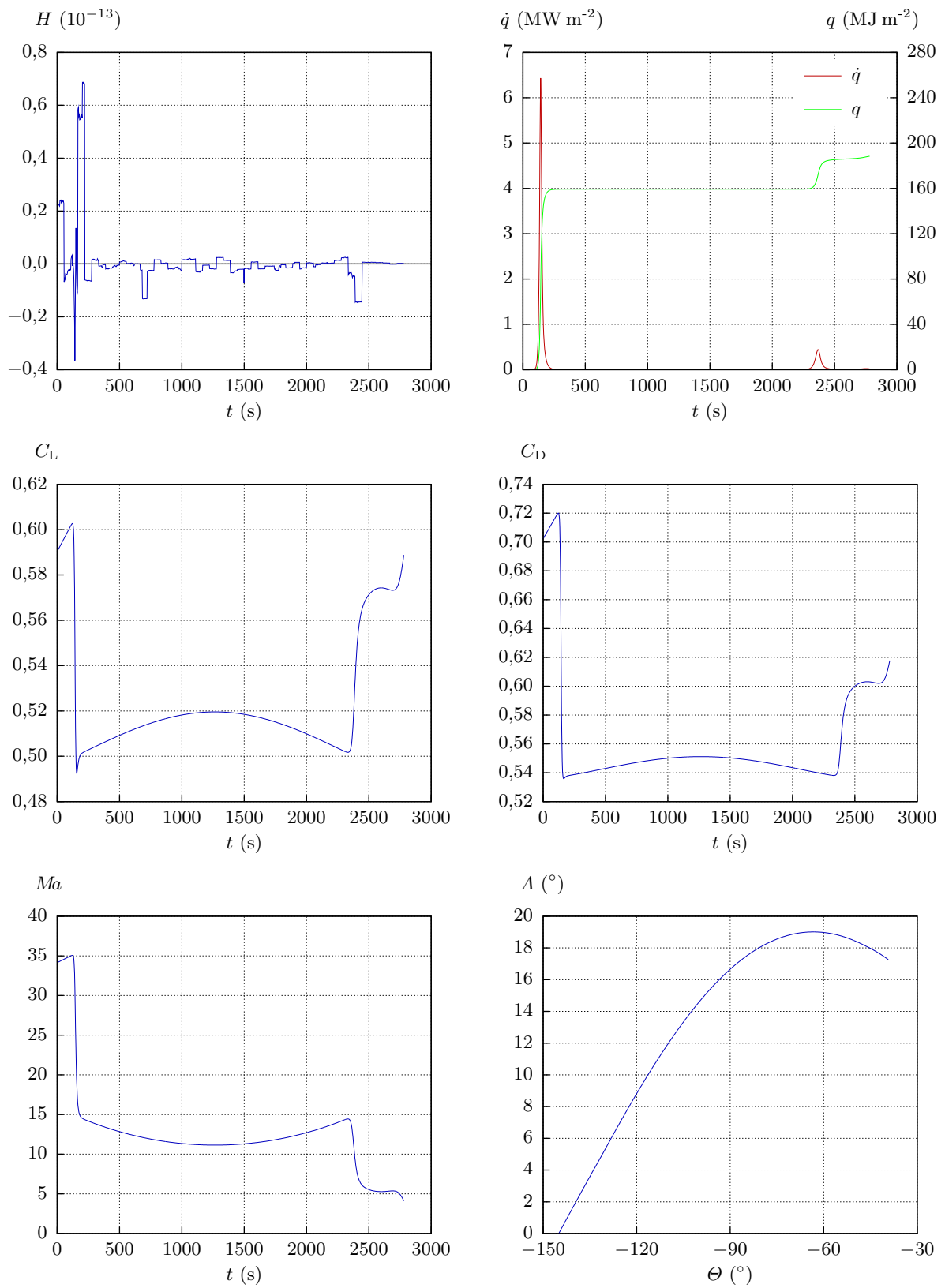


Abbildung A.4.: Startlösung – Sonstige Größen

A.2. Referenzlösung

Die in Abschnitt 5.3 beschriebene Referenzlösung besitzt die Randwerte:

	$t_0 = 0 \text{ s}$	$t_f = 3393,990\,798\,4 \text{ s}$
Θ (rad)	$-0,296\,705\,972\,84 \cdot 10^1$	$-0,584\,685\,299\,42 \cdot 10^0$
Λ (rad)	$0,966\,106\,325\,53 \cdot 10^{-28}$	$0,333\,357\,887\,13 \cdot 10^0$
h (km)	$0,500\,000\,000\,00 \cdot 10^3$	$0,740\,000\,000\,00 \cdot 10^1$
v (km s ⁻¹)	$0,700\,000\,000\,00 \cdot 10^1$	$0,500\,000\,000\,00 \cdot 10^0$
γ (rad)	$-0,571\,957\,134\,96 \cdot 10^0$	$-0,426\,918\,155\,72 \cdot 10^0$
χ (rad)	$0,100\,602\,820\,31 \cdot 10^1$	$0,147\,096\,207\,83 \cdot 10^1$
λ_Θ	$-0,205\,208\,765\,93 \cdot 10^2$	$-0,205\,208\,765\,93 \cdot 10^2$
λ_Λ	$-0,159\,365\,219\,45 \cdot 10^1$	$-0,240\,761\,059\,29 \cdot 10^1$
λ_h	$0,157\,224\,551\,75 \cdot 10^{-2}$	$-0,120\,758\,486\,54 \cdot 10^{-1}$
λ_v	$0,305\,089\,694\,68 \cdot 10^2$	$0,122\,787\,176\,23 \cdot 10^1$
λ_γ	$-0,100\,000\,000\,00 \cdot 10^2$	$-0,100\,000\,000\,00 \cdot 10^0$
λ_χ	$-0,105\,251\,519\,82 \cdot 10^{-28}$	$0,150\,555\,277\,90 \cdot 10^{-13}$

Der Wert des Zielfunktionalis ist $q(t_f) = 188,202\,951\,36 \text{ MJ m}^{-2}$.

Das Randwertproblem wurde mit 67 Mehrzielknoten gelöst wovon 16 Schaltpunkte waren. Diese 16 Schaltpunkte teilen sich wie folgt auf¹:

- 4 Schaltpunkte für den Anstellwinkel α (t_2, \dots, t_5): Hier treten keine Sprünge in den adjungierten Variablen auf.
- 4 Schaltpunkte für den Querneigungswinkel μ (t_9, \dots, t_{12}): keine Sprünge
- 6 innere Punkte durch die nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit (t_{20}, \dots, t_{25}): Hier treten Sprünge in λ_h auf.
- 1 innerer Punkt durch die nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte (t_{30}): Hier treten Sprünge in λ_h und λ_v auf.
- 1 innerer Punkt durch die Zuschaltung einer Bremsklappe (t_{31}): Hier treten ebenfalls Sprünge in λ_h und λ_v auf.

Die Lagen der Schaltpunkte und die entsprechenden Sprunghöhen sind:

¹Die Indizes der Schaltpunkte sind dem Programm entnommen und ergeben keine fortlaufende Nummerierung.

t_i	$\lambda_h^+ - \lambda_h^-$	$\lambda_v^+ - \lambda_v^-$
$t_2 = 168,575\,041\,13\text{ s}$		
$t_3 = 171,495\,079\,01\text{ s}$		
$t_4 = 869,903\,817\,69\text{ s}$		
$t_5 = 940,020\,542\,53\text{ s}$		
$t_9 = 93,128\,011\,727\text{ s}$		
$t_{10} = 122,370\,514\,70\text{ s}$		
$t_{11} = 2164,018\,595\,5\text{ s}$		
$t_{12} = 3190,114\,784\,2\text{ s}$		
$t_{20} = 106,106\,424\,01\text{ s}$	$0,000\,003\,837\,74 \cdot 10^{-1}$	
$t_{21} = 125,853\,319\,74\text{ s}$	$-0,000\,000\,007\,78 \cdot 10^0$	
$t_{22} = 249,064\,965\,44\text{ s}$	$0,000\,000\,003\,43 \cdot 10^{-1}$	
$t_{23} = 304,647\,110\,48\text{ s}$	$-0,000\,000\,099\,30 \cdot 10^{-1}$	
$t_{24} = 2998,819\,762\,5\text{ s}$	$0,000\,000\,993\,96 \cdot 10^{-2}$	
$t_{25} = 3054,403\,732\,1\text{ s}$	$-0,000\,000\,002\,94 \cdot 10^{-1}$	
$t_{30} = 3185,720\,670\,6\text{ s}$	$0,000\,000\,026\,23 \cdot 10^{-1}$	$0,000\,000\,379\,46 \cdot 10^1$
$t_{31} = 3198,158\,492\,6\text{ s}$	$-0,017\,327\,965\,10 \cdot 10^{-1}$	$-0,185\,309\,160\,60 \cdot 10^1$

Bei der Berechnung der Sprunghöhen wurden die Zehnerpotenzen der beiden Grenzwerte beibehalten, so dass die relative Sprunghöhe deutlicher wird. Eine leere Tabellenzelle bedeutet, dass Stetigkeit gefordert wurde.

Die Schaltstrukturen für die beiden Steuerungen werden durch

$$\alpha_{\max} \Big|_{t_2} \alpha_{\text{frei}} \Big|_{t_3} \alpha_{\min} \Big|_{t_4} \alpha_{\text{frei}} \Big|_{t_5} \alpha_{\max} \quad \text{und} \quad \mu_{\text{frei}} \Big|_{t_9} \mu_{\min} \Big|_{t_{10}} \mu_{\text{frei}} \Big|_{t_{11}} \mu_{\min} \Big|_{t_{12}} \mu_{\text{frei}}$$

beschrieben.

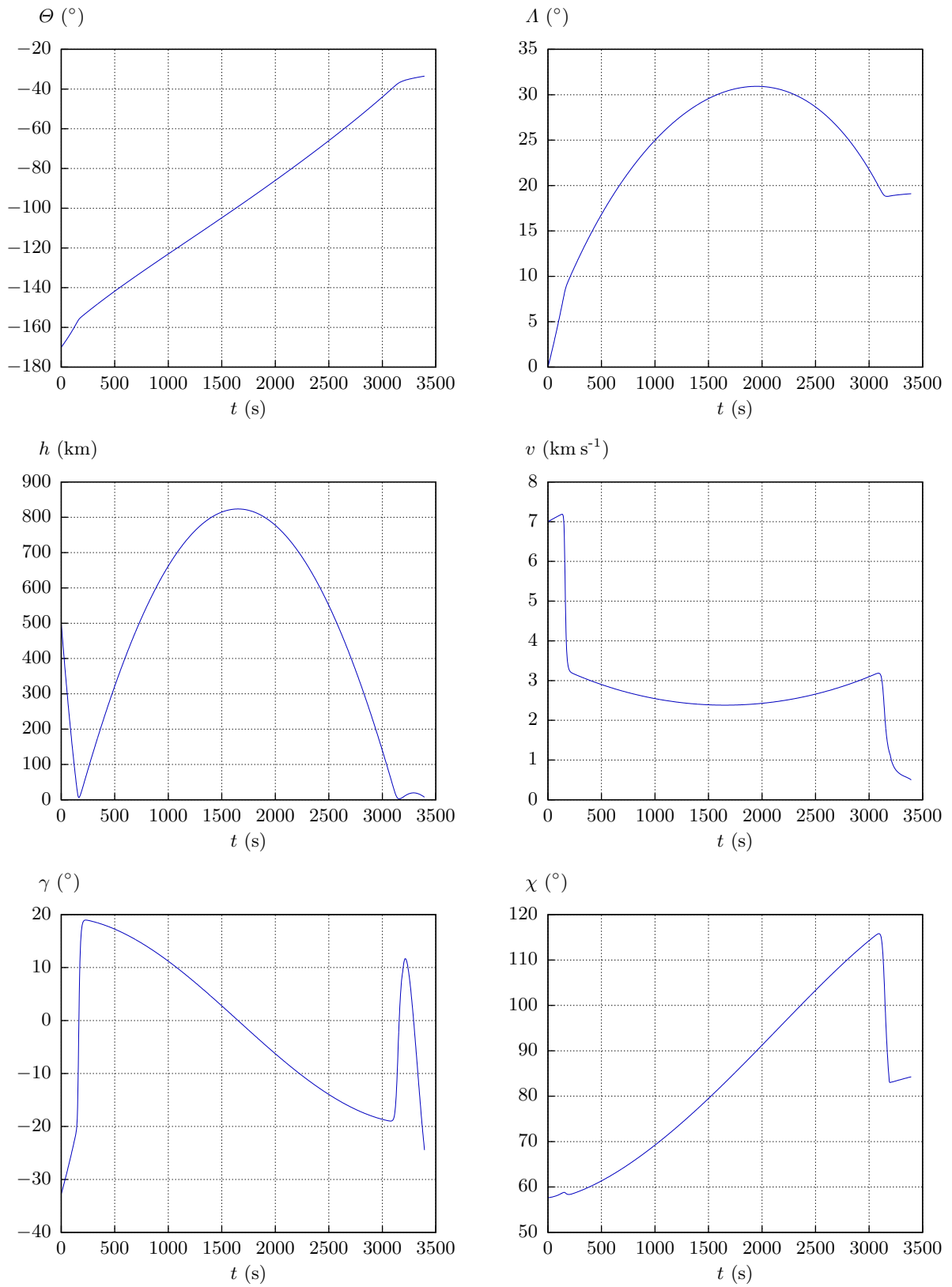


Abbildung A.5.: Referenzlösung – Zustände

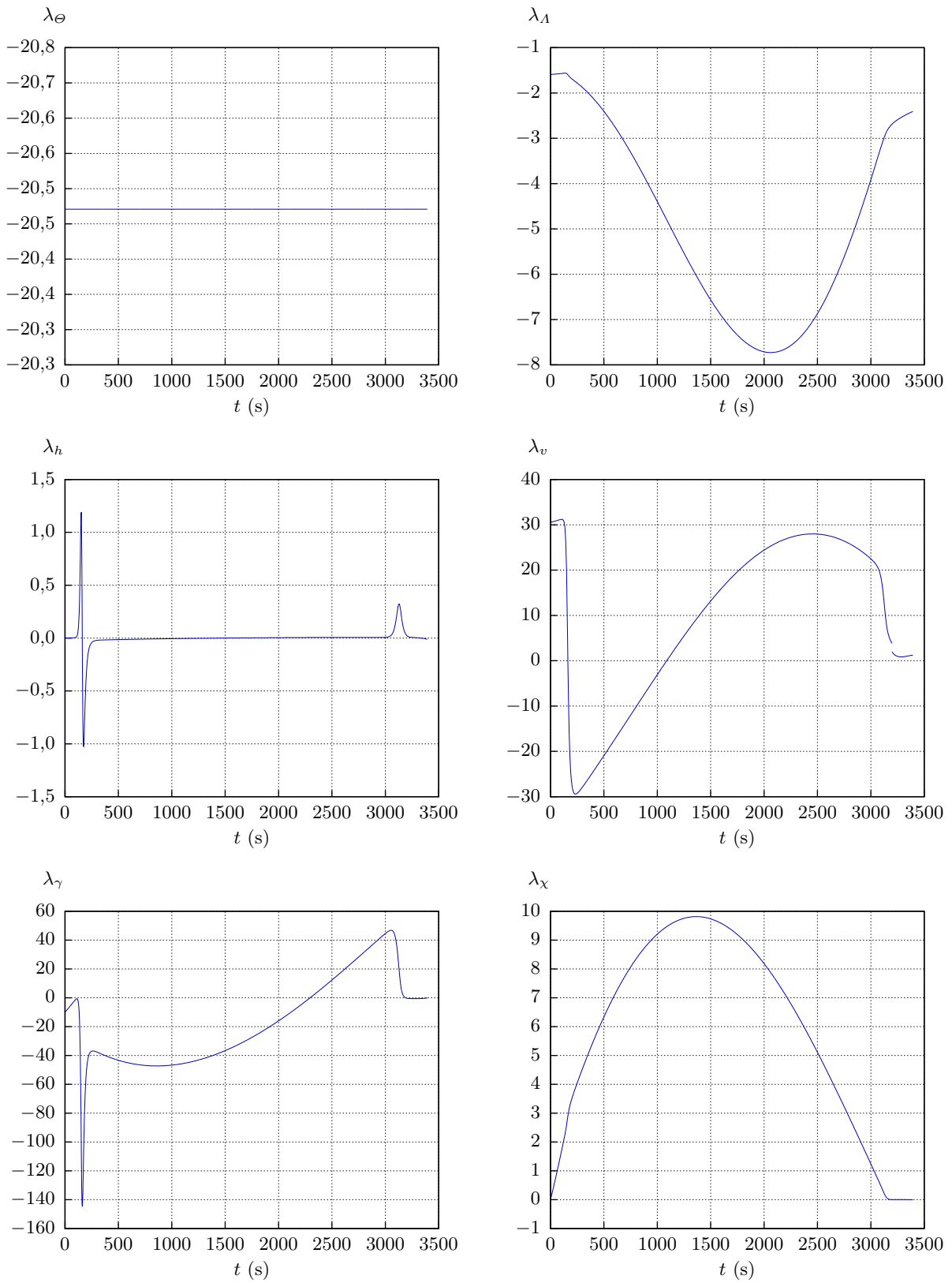


Abbildung A.6.: Referenzlösung – Adjungierte Variablen

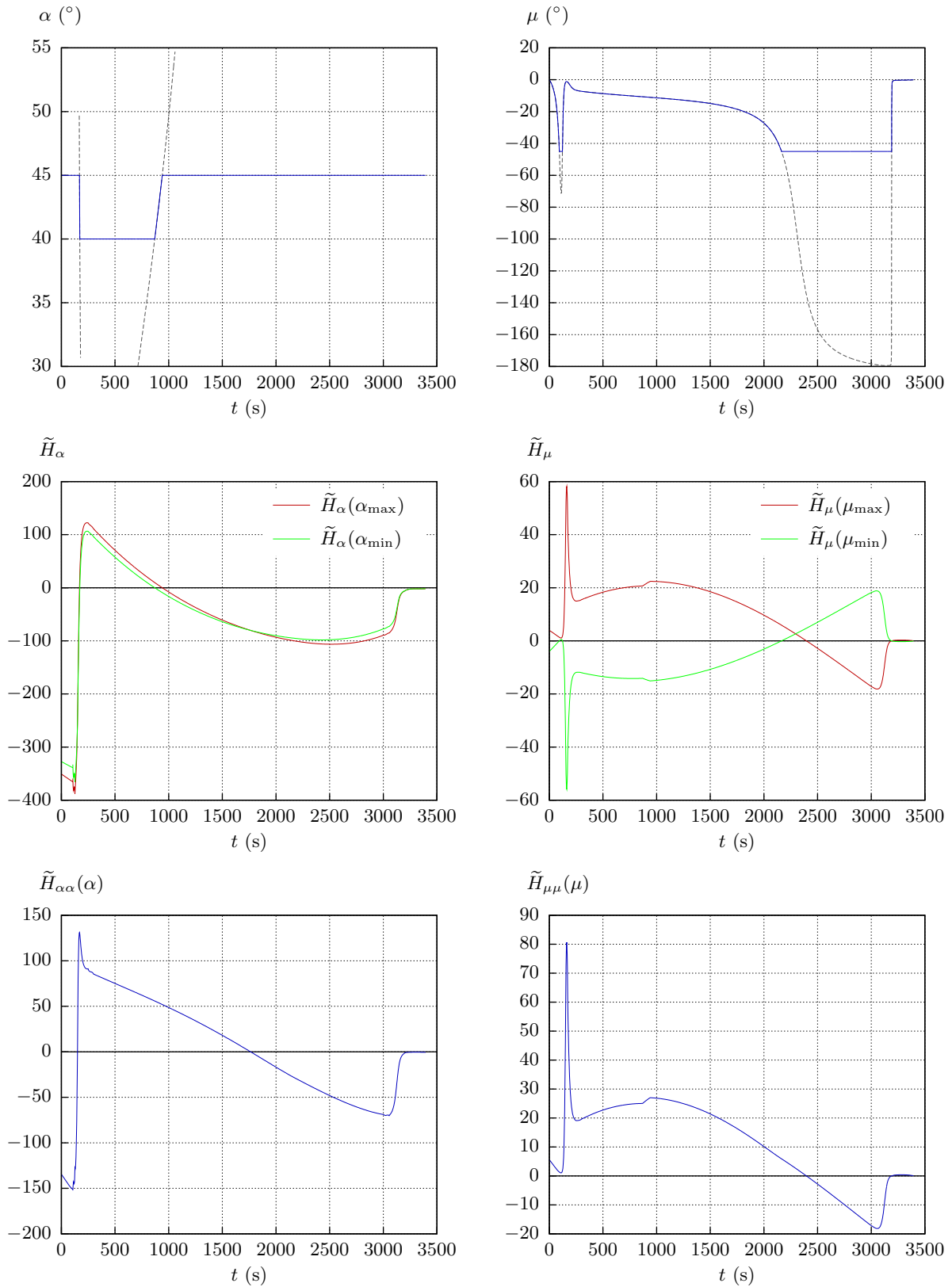


Abbildung A.7.: Referenzlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen

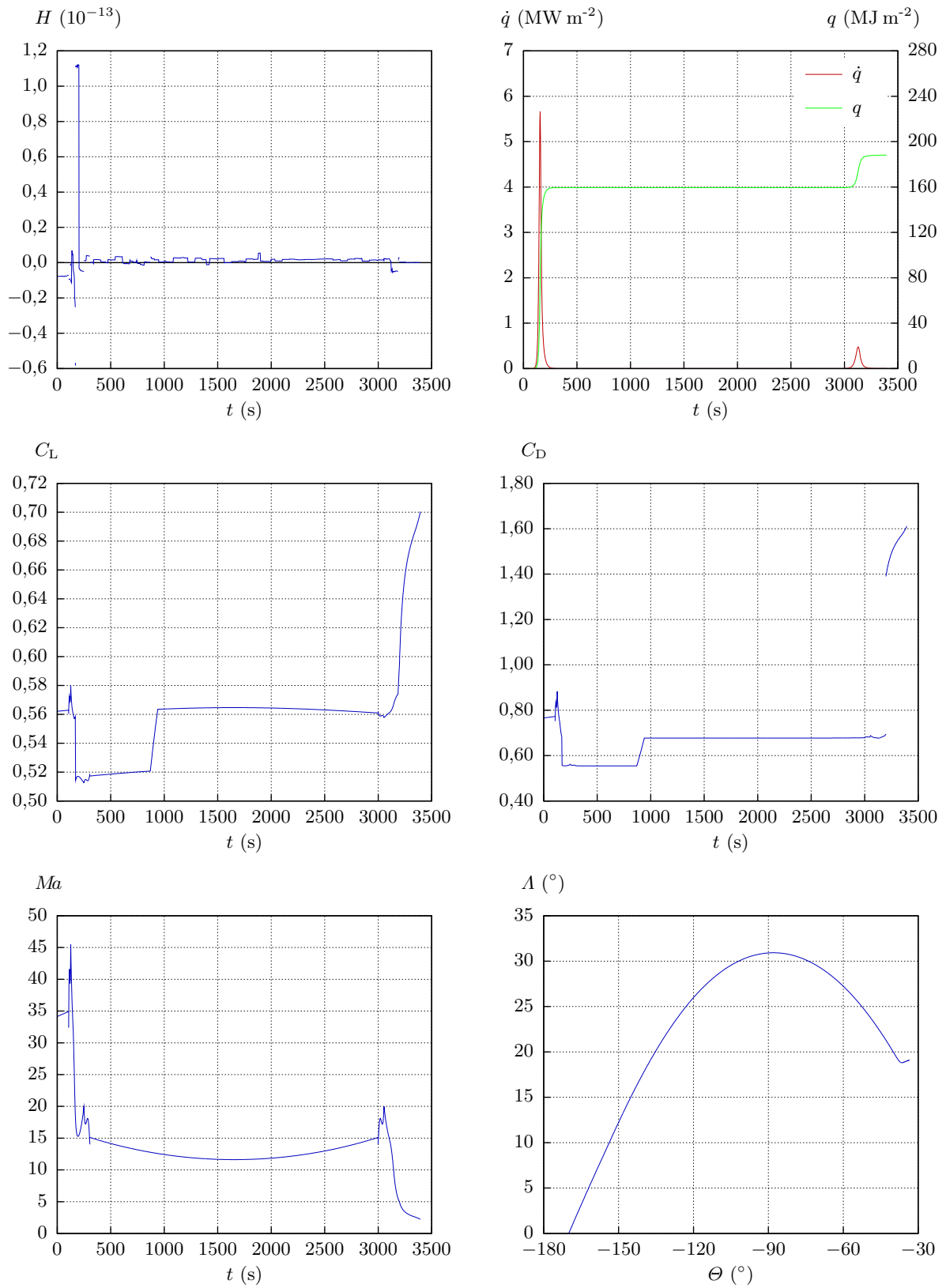


Abbildung A.8.: Referenzlösung – Sonstige Größen

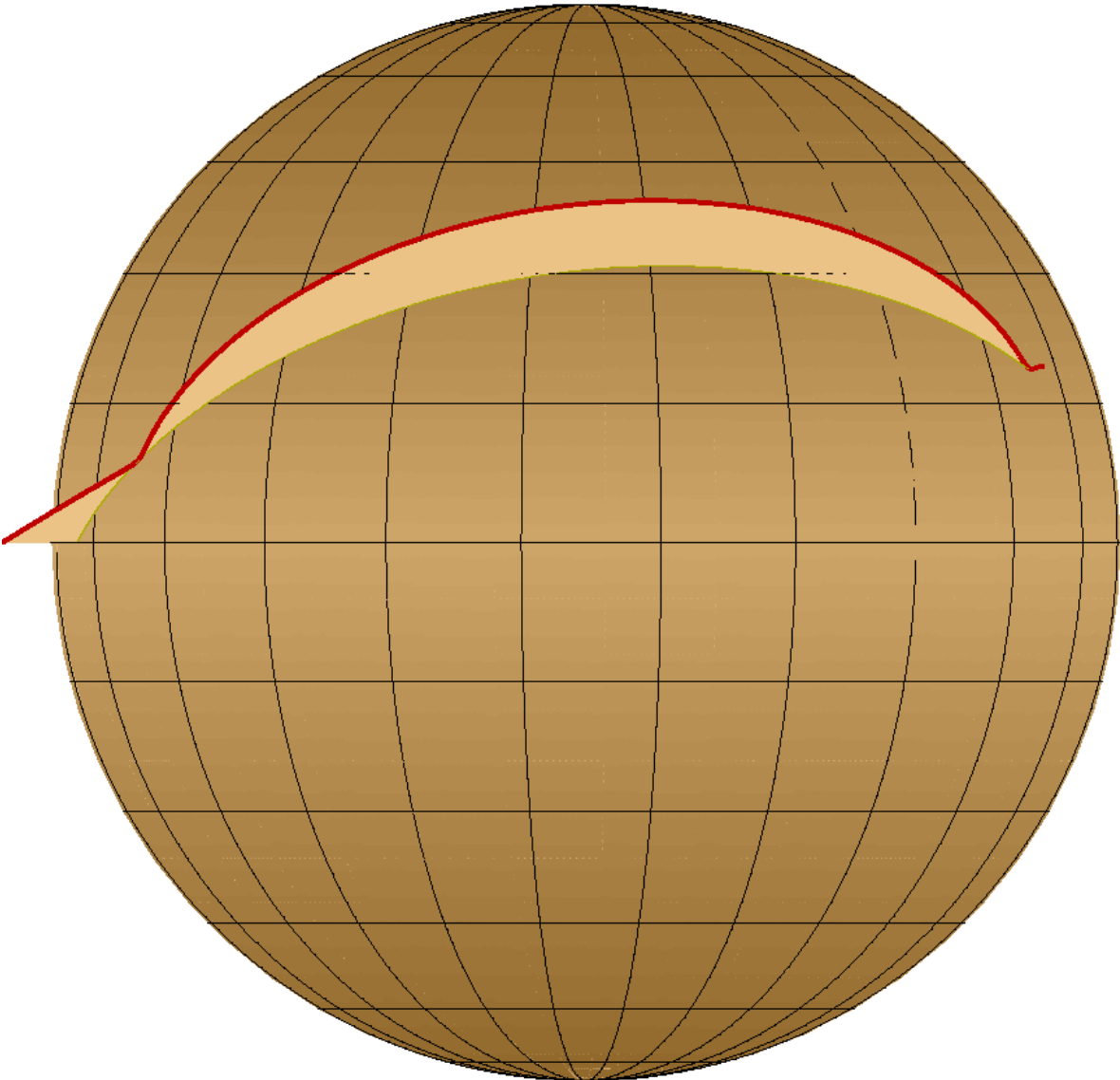


Abbildung A.9.: Referenzlösung – 3D-Visualisierung der Trajektorie

Anhang B

Nomenklatur und Konstanten

Die in diesem Dokument verwendete Notation kann Tabelle B.1 entnommen werden.

Eine Übersicht über die verwendeten Symbole liefern die Tabellen B.2 bis B.6. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit werden im gesamten Dokument die Argumente der Variablen nicht immer angegeben. Insbesondere entfällt „(t)“ bei den meisten zeitabhängigen Größen.

Die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\Theta, \Lambda, h, v, \gamma, \chi)^\top, \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\lambda_\Theta, \lambda_\Lambda, \lambda_h, \lambda_v, \lambda_\gamma, \lambda_\chi)^\top \text{ und} \\ \mathbf{u} &= (\varphi, \psi)^\top \end{aligned}$$

bezeichnen die Zustände, die adjungierten Variablen sowie die transformierten Steuergrößen (siehe Tabelle B.2).

Tabelle B.1.: Notation

Bez.	Bedeutung
m	skalare Variable
\mathbf{m}	mehrdimensionaler Vektor
\mathbf{M}	Matrix ^a
m	Einheit „Meter“
\dot{h}	Zeitableitung von h
$g'(h)$	Ableitung von g nach dem einzigen Argument h
$H_u, \frac{\partial H}{\partial u}$	partielle Ableitung von H nach u
$H_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{u}} H$	Gradient von H bezüglich \mathbf{u}
$\left(\frac{d}{dt}\right)_S$	Differentiation nach der Zeit im System „S“
\mathbf{x}_f	abkürzende Schreibweise für $\mathbf{x}(t_f)$
\mathbf{x}_S^-	abkürzende Schreibweise für $\lim_{t \rightarrow t_S^-} \mathbf{x}(t)$
\mathbf{x}^\top	Transponierte von \mathbf{x}

^aIn einigen Ausnahmefällen werden auch Skalare mit Großbuchstaben bezeichnet, wenn sich die entsprechende Notation in der Literatur durchgesetzt hat. So bezeichnen H die Hamiltonfunktion, Ma die Machzahl, C_L den Auftriebs- und C_D den Widerstandsbeiwert.

Tabelle B.2.: Variablen

Bez.	Beschreibung	Einheit	Gruppe
t	Zeit im Bereich $[0, t_f]$	s	
Θ	östliche Länge	rad	
Λ	nördliche Breite im Bereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	rad	
h	Höhe über der Oberfläche	km	
v	Geschwindigkeit im rotierenden Marsystem	km s^{-1}	
γ	Bahnneigungswinkel (Winkel zwischen der Tangentialebene an die Marsoberfläche und der Bewegungsrichtung, positiv für Aufstieg)	rad	Zustandsvariablen
χ	Bahnazimut (Winkel zwischen der Nord-Richtung und der Bewegungsrichtung, im Uhrzeigersinn positiv)	rad	
λ_Θ		$\text{MJ m}^{-2} \text{ rad}^{-1}$	adjungierte Variablen ^a
λ_Λ		$\text{MJ m}^{-2} \text{ rad}^{-1}$	
λ_h		$\text{MJ m}^{-2} \text{ km}^{-1}$	
λ_v		$\text{MJ m}^{-2} \text{ km}^{-1} \text{ s}$	
λ_γ		$\text{MJ m}^{-2} \text{ rad}^{-1}$	
λ_χ		$\text{MJ m}^{-2} \text{ rad}^{-1}$	
q	Wärmelast	MJ m^{-2}	Zielfunktional
H	Hamiltonfunktion	$\text{MJ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$	
α	Anstellwinkel (Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Längsachse des Gleiters, positiv für eine „angehobene“ Nase)	rad	
μ	Querneigungswinkel (Winkel zwischen der Horizontalen und der Querachse des Gleiters, positiv für eine Neigung des Gleiters nach rechts)	rad	Steuergrößen
φ	transformierter Anstellwinkel	rad	transformierte Steuergrößen
ψ	transformierter Querneigungswinkel	rad	

^aDie Einheiten der adjungierten Variablen werden im Folgenden der Einfachheit halber vernachlässigt.

Tabelle B.3.: Modellfunktionen

Bezeichnung	Beschreibung	Einheit	Modell
$g(h)$	Gravitationsbeschleunigung	km s ⁻²	
$\varrho(h)$	Atmosphärendichte	kg km ⁻³	Marsmodell
$a(h)$	Schallgeschwindigkeit	km s ⁻¹	
$C_L(Ma, \alpha)$	Auftriebsbeiwert	1	
$C_D(Ma, \alpha)$	Widerstandsbeiwert	1	X-38-Modell
$\dot{q}(v, \varrho)$	Wärmestrom	MW m ⁻²	

Tabelle B.4.: Modellkonstanten (Quellen: [33], [34], [35] und [26])

Bez.	Beschreibung	Wert	Modell
R_0	mittlerer volumetrischer Radius ^a	3390 km	
g_0	Gravitationsbeschl. an der Oberfläche ^b	3,727 63 · 10 ⁻³ km s ⁻²	
ϱ_0	Atmosphärendichte an der Oberfläche	1,754 88 · 10 ⁷ kg km ⁻³	Marsmodell
β	Atmosphärenexponent	0,093 138 7 km ⁻¹	
Ω	Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation ^c	7,088 24 · 10 ⁻⁵ rad s ⁻¹	
m	Masse	11 339,81 kg	
S	aerodynamisch wirksame Fläche	22,672 · 10 ⁻⁶ km ²	X-38-Modell
r_N	Nasenradius	0,366 · 10 ⁻³ km	
K	Wärmeoeffizient ^d	0,146 838 · 10 ⁻⁶	

^aDer Polarradius beträgt 3375 km und der Radius am Äquator 3397 km.

^bDiese errechnete Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche ist etwas größer, als die in [33] angegebene Gravitationsbeschleunigung am Äquator, da der Mars abgeflacht ist.

^cDie hier verwendete Zeit pro Umdrehung beträgt 24 h 37 min 22,44 s, wohingegen die Tageslänge (bedingt durch den Umlauf um die Sonne) 24 h 39 min 34,92 s beträgt.

^dDieser Wärmeoeffizient hängt auf Grund der gewählten Modellierung des Wärmestroms von der Wahl der Einheiten für Nasenradius, Geschwindigkeit, Luftdichte und Wärmestrom ab. Er wurde unter Berücksichtigung der geänderten Wahl dieser Einheiten aus dem in [26] angegebenen Wert errechnet. Siehe dazu auch Abschnitt 2.3.3.

Tabelle B.5.: Variable Splineparameter für die nichtglatten Modelle

Bezeichnung	Beschreibung	Modell
$k_h \in \mathbf{N}$	Ordnung der B-Spline-Basis	
$\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{R}^{2k_h+l_h}$	Knoten in h	Schallgeschw.
$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{k_h+l_h}$	Koeffizienten für die Schallgeschwindigkeit	
$k_{Ma} \in \mathbf{N}$	Ordnung der B-Spline-Basis in Ma -Richtung	
$k_\alpha \in \mathbf{N}$	Ordnung der B-Spline-Basis in α -Richtung	
$\boldsymbol{\eta}_{Ma} \in \mathbf{R}^{2k_{Ma}+l_{Ma}}$	Knoten in Ma	aerodyn.
$\boldsymbol{\eta}_\alpha \in \mathbf{R}^{2k_\alpha+l_\alpha}$	Knoten in α	Beiwerte
$\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{(k_{Ma}+l_{Ma}) \times (k_\alpha+l_\alpha)}$	Koeffizienten für den Auftriebsbeiwert	
$\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{(k_{Ma}+l_{Ma}) \times (k_\alpha+l_\alpha)}$	Koeffizienten für den Widerstandsbeiwert	

Es wurden jeweils eine Grob- und eine Feinapproximation erstellt, deren Parameter den Abschnitten 2.2.2 und 2.3.2 entnommen werden können.

Tabelle B.6.: Verwendete physikalische Konstanten (Quelle: [30])

Bezeichnung	Beschreibung	Wert
G	Gravitationskonstante	$6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
R	universelle Gaskonstante	$8,314\,472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Literaturverzeichnis

- [1] S. A. BERRY, T. J. HORVATH, K. J. WEILMUNSTER, S. J. ALTER, and N. R. MERSKI: *X-38 experimental aeroheating at Mach 10*. In *35th AIAA Thermophysics Conference*, Anaheim, CA, June 11–14 2001. <http://techreports.larc.nasa.gov/ltrs/PDF/2001/aiaa/NASA-aiaa-2001-2828.pdf>, zuletzt besucht im April 2005, AIAA paper no. 2001-2828.
- [2] M. BROKATE: *Analysis 2*. Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, SS 2000.
- [3] A. E. BRYSON, JR and Y.-C. HO: *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing, Washington, D.C., revised edition, 1975.
- [4] R. BULIRSCH, H. MONTRONE, and H. J. PESCH: *Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem, Part 1: Necessary conditions*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(1):1–23, 1991.
- [5] R. BULIRSCH, H. MONTRONE, and H. J. PESCH: *Abort landing in the presence of windshear as a minimax optimal control problem, Part 2: Multiple shooting and homotopy*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70(2):223–254, 1991.
- [6] R. BULIRSCH: *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*. Report der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., DLR, Oberpfaffenhofen, 1971. Nachdruck: Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1993.
- [7] R. CALLIES: *Besprechung*.
- [8] R. CALLIES: *Entwurfsoptimierung und optimale Steuerung, Differential-algebraische Systeme, Mehrgitter-Mehrzielansätze und numerische Realisierung*. Habilitationsschrift, Fakultät für Mathematik, Technische Universität München, 2000.
- [9] R. CALLIES: *Variationsrechnung und Optimale Steuerung*. Vorlesungsskript, Zentrum Mathematik, Technische Universität München, WS 1995/96.
- [10] O. P. DA COSTA, S. MÜLLER und O. WAGNER: *Abschlussbericht AP 22150: Missionssicherheitsanalyse*. Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 2002. TET-LFM-22-TN-5605.
- [11] O. P. DA COSTA and G. SACHS: *Mission analysis for a reentry vehicle with controls degradation*. In *AIAA/AAAF 11th International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*, Orléans, France, Sep. 29 – Oct. 4 2002. http://hypersonic2002.aaaf.asso.fr/papers/17_5219.pdf, AIAA paper no. 2002-5219.
- [12] J. J. CRAIG: *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1986.
- [13] P. DEUFLHARD und F. A. BORNEMANN: *Numerische Mathematik II. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 2., vollst. überarb. u. erweit. Auflage, 2002.
- [14] P. DEUFLHARD und A. HOHMANN: *Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. de Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 3., überarb. und erw. Auflage, 2002.

- [15] P. DIERCKX: *Curve and surface fitting with splines*. Monographs on numerical analysis. Clarendon Press. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1993.
- [16] S. E. DREYFUS: *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*, volume 21 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, New York, 1965.
- [17] A. L. FETTER and J. D. WALECKA: *Theoretical Mechanics of Particles and Continua*. International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [18] R. FRIEDRICH: *Aerodynamik der Raumfahrzeuge*. Vorlesung, Fachgebiet Strömungsmechanik, Technische Universität München.
- [19] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, and G. WANNER: *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2nd revised edition, 1993.
- [20] B. HERRMANN: *Volloptimierung dreidimensionaler Wiedereintrittsbahnen einer Raumkapsel neuer Technologie mit Querneigungssteuerung*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 2001.
- [21] M. HESSE, B. U. REINARTZ, and J. BALLMANN: *Inviscid flow computation for the shuttle-like configuration PHOENIX*. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 87:172–180, 2003. Contributions to the 13th STAB/DGLR Symposium Munich, Germany 2002.
- [22] M. HESSE, B. U. REINARTZ, and J. BALLMANN: *Numerical investigation of a reusable space transportation system*. In *3rd International Symposium on Atmospheric Reentry Vehicles and Systems*, Arcachon, France, Mar. 24 – 27 2003.
- [23] P. HILTMANN, K. CHUDEJ und M. H. BREITNER: *Eine modifizierte Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen. Benutzeranleitung*. Report No. 14 des Sonderforschungsbereichs 255, Lehrstuhl für Höhere und Numerische Mathematik, Technische Universität München.
- [24] T. J. HORVATH, S. A. BERRY, N. R. MERSKI, and S. M. FITZGERALD: *X-38 experimental aerothermodynamics*. In *34th AIAA Thermophysics Conference*, Denver, CO, June 19–22 2000. <http://techreports.larc.nasa.gov/ltrs/PDF/2000/aiaa/NASA-aiaa-2000-2685.pdf>, zuletzt besucht im April 2005, AIAA paper no. 2000-2685.
- [25] C. G. JUSTUS, B. F. JAMES, S. W. BOUGHER, A. F. C. BRIDGER, R. M. HABERLE, J. R. MURPHY, and S. ENGEL: *Mars-GRAM 2000: A Mars atmospheric model for engineering applications*. *Advances in Space Research*, 29(2):193–202, 2002. [http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177\(01\)00569-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00569-5).
- [26] J. T. KINDLER: *Optimal reentry trajectories for the experimental vehicle X-38 V201*. Master’s thesis, Universität Stuttgart, 1999.
- [27] H. KREIM, B. KUGELMANN, H. J. PESCH, and M. H. BREITNER: *Minimizing the maximum heating of a re-entering space shuttle: An optimal control problem with multiple control constraints*. *Optimal Control Applications and Methods*, 17(1):45–69, 1996. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1514\(199601/03\)17:1<45::AID-OCA564>3.0.CO;2-X](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1514(199601/03)17:1<45::AID-OCA564>3.0.CO;2-X).
- [28] J. A. MAGALHÃES, J. T. SCHOFIELD, and A. SEIFF: *Results of the Mars Pathfinder atmospheric structure investigation*. *Journal of Geophysical Research*, 104(E4):8943–8955, 1999. <http://www.agu.org/pubs/crossref/1999/1998JE900041.shtml>.
- [29] A. MIELE: *Flight Mechanics, Volume 1, Theory of Flight Paths*. Addison-Wesley Series in the Engineering Sciences, Space Science and Technology. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1962.
- [30] P. J. MOHR and B. N. TAYLOR: *The 2002 CODATA recommended values of the fundamental physical constants, web version 4.0*, 2003. <http://physics.nist.gov/constants>, zuletzt besucht im April 2005.

-
- [31] S. MÜLLER: *Abschlussbericht AP 18400: Flugdynamik und Flugführung*. Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 2002. TET-LFM-18-TN-5711.
- [32] NASA, DRYDEN FLIGHT RESEARCH CENTER: *Fact sheet – X-38*. <http://www.nasa.gov/centers/dryden/news/FactSheets/FS-038-DFRC.html>, zuletzt besucht im April 2005.
- [33] NASA, NATIONAL SPACE SCIENCE DATA CENTER: *Mars fact sheet*. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html>, zuletzt besucht im April 2005.
- [34] NASA, PLANETARY DATA SYSTEM ATMOSPHERES DISCIPLINE NODE: *Mars Pathfinder EDL derived profiles – dataset description*. http://atmos.nmsu.edu/PDS/data/mpam_0001/document/edladdrds.htm, zuletzt besucht im April 2005.
- [35] NASA, PLANETARY DATA SYSTEM ATMOSPHERES DISCIPLINE NODE: *Mars Pathfinder MET surface calibrated data – dataset description*. http://atmos.nmsu.edu/PDS/data/mpam_0001/document/srfrdrds.htm, zuletzt besucht im April 2005.
- [36] E. R. PINCH: *Optimal Control and the Calculus of Variations*. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1996.
- [37] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, and E. F. MISHCHENKO: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 3rd edition, 1965. Authorized Translation from the Russian.
- [38] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, and B. P. FLANNERY: *Numerical Recipes in FORTRAN 90: The Art of Parallel Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1996.
- [39] G. SCHMIDT: *Grundlagen intelligenter Roboter*. Vorlesungsskript, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Technische Universität München, WS 2001/2002.
- [40] J. T. SCHOFIELD: *private Mitteilung*.
- [41] J. T. SCHOFIELD, J. R. BARNES, D. CRISP, R. M. HABERLE, S. LARSEN, J. A. MAGALHÃES, J. R. MURPHY, A. SEIFF, and G. WILSON: *The Mars Pathfinder Atmospheric Structure Investigation/Meteorology (ASI/MET) experiment*. *Science*, 278(5344):1752–1758, 1997. <http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/278/5344/1752>, zuletzt besucht im April 2005.
- [42] J. STOER und R. BULIRSCH: *Numerische Mathematik 2. Eine Einführung – unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4., neu bearb. und erw. Auflage, 2000.
- [43] O. VON STRYK: *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*. Dissertation, Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1994. <http://www.sim.informatik.tu-darmstadt.de/publ/download/1994-diss.html>, zuletzt besucht im April 2005.
- [44] O. VON STRYK and R. BULIRSCH: *Direct and indirect methods for trajectory optimization*. *Annals of Operations research*, 37:357–373, 1992. <http://www.sim.informatik.tu-darmstadt.de/publ/download/1992-directindirect.pdf>, zuletzt besucht im April 2005.

