Optimale Steuerung eines Gleiters beim Eintritt in die Marsatmosphäre unter Verwendung nichtglatter Modelle

Diplomarbeit
im Studiengang Technomathematik

von
Andreas Keil

Aufgabensteller: PD Dr. Rainer Callies
Betreuer: PD Dr. Rainer Callies
Abgabetermin: 15. April 2005
Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

München, 15. April 2005
# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

1. Theoretische und numerische Grundlagen
   1.1. Lösungsansätze und Verfahrenseinteilung .................................................. 5
   1.2. Theorie der optimalen Steuerung ...................................................................... 6
      1.2.1. Problemstellung ......................................................................................... 6
      1.2.2. Ankopplung der Nebenbedingungen .......................................................... 7
      1.2.3. Allgemeine Variation .................................................................................... 8
   1.3. Mehrzielmethode ............................................................................................... 11
   1.4. Kombiniertes Newton- und Bisektions-Verfahren ............................................. 13
   1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines ....................................................... 13
      1.5.1. Von den klassischen Splines zu Funktionen mit niedrigerer Differenzier-
             barkeit ............................................................................................................... 13
      1.5.2. Auswertung von Funktionen in B-Spline-Darstellung .................................. 16
      1.5.3. Tensorproduktsplines .................................................................................... 18

2. Modellbildung ........................................................................................................... 21
   2.1. Marsoberfläche, -gravitation und -rotation ....................................................... 21
   2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit ...................................................... 21
      2.2.1. Dichte ........................................................................................................... 24
      2.2.2. Schallgeschwindigkeit .................................................................................. 25
   2.3. Raumgleiter X-38/CRV .................................................................................... 27
      2.3.1. Kräfte ............................................................................................................ 28
      2.3.2. Aerodynamische Beiwerte ............................................................................ 29
      2.3.3. Wärmestrom ............................................................................................... 30
   2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen ........................................... 32
      2.4.1. Koordinatensysteme ..................................................................................... 32
      2.4.2. Kinematik ..................................................................................................... 36
      2.4.3. Dynamik ....................................................................................................... 37
      2.4.4. Zusammenfassung der Bewegungsdifferentialgleichungen ....................... 40

3. Optimalsteuerungsproblem .................................................................................... 41
   3.1. Problemstellung ................................................................................................. 41
      3.1.1. Zielfunktional ............................................................................................... 41
      3.1.2. Nebenbedingungen ..................................................................................... 41
      3.1.3. Steuerbeschränkungen ............................................................................... 42
   3.2. Ankopplung der Nebenbedingungen .................................................................. 43
   3.3. Innere Punktbedingungen .................................................................................. 43
      3.3.1. Nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit ............................... 44
      3.3.2. Nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte ....................... 45
| Problem 1.1 | Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen | 6 |
| Problem 1.2 | Freies Problem | 7 |
| Definition 1.3 | Hamiltonfunktion | 7 |
| Definition 1.4 | Variationen | 8 |
| Satz 1.5 | Allgemeine Variation | 9 |
| Folgerung 1.6 | Hamiltonfunktions-Test | 9 |
| Problem 1.8 | Mehrpunktrandwertproblem | 11 |
| Definition 1.9 | Spline | 14 |
| Satz 1.10 | Dimension des Splineraums | 14 |
| Definition 1.11 | B-Splines | 14 |
| Lemma 1.12 | Differenzierung von B-Splines | 15 |
| Satz 1.13 | Basis des Splineraums | 15 |
| Satz 2.1 | Zeitableitung in rotierenden Systemen | 36 |
| Satz 3.1 | | 49 |
| Definition 5.1 | Homotopie | 57 |
Abbildungsverzeichnis

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bildungsnummer</th>
<th>Titel</th>
<th>Seite</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>0.1.</td>
<td>3D-Visualisierung der Referenztrajektorie</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>1.1.</td>
<td>Veranschaulichung der Mehrzielmethode</td>
<td>13</td>
</tr>
<tr>
<td>1.2.</td>
<td>Zur rekursiven Berechnung von B-Splines</td>
<td>14</td>
</tr>
<tr>
<td>1.3.</td>
<td>B-Spline-Basis zur Approximation der Schallgeschwindigkeit</td>
<td>16</td>
</tr>
<tr>
<td>1.4.</td>
<td>Tableau zur Auswertung der nicht-negativen B-Splines am Punkt $x \in [\eta_j, \eta_{j+1})$</td>
<td>17</td>
</tr>
<tr>
<td>2.1.</td>
<td>Mosaik aus Viking 1 Orbiter-Bildern des Mars</td>
<td>22</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2.</td>
<td>Atmosphären- und Pathfinder-Mission inkl. einer Bodenmessung</td>
<td>23</td>
</tr>
<tr>
<td>2.3.</td>
<td>Daten und Approximation der Dichte</td>
<td>24</td>
</tr>
<tr>
<td>2.4.</td>
<td>Errechnete Schallgeschwindigkeitsdaten und Approximation</td>
<td>27</td>
</tr>
<tr>
<td>2.5.</td>
<td>Schematische Darstellung des X-38-Gleiters</td>
<td>28</td>
</tr>
<tr>
<td>2.6.</td>
<td>Verfeinerte Approximation der aerodynamischen Beiwerte</td>
<td>31</td>
</tr>
<tr>
<td>2.7.</td>
<td>Experimentelle Aufheizung eines X-38-Modells</td>
<td>32</td>
</tr>
<tr>
<td>2.8.</td>
<td>Inertial- und marsfestes System</td>
<td>34</td>
</tr>
<tr>
<td>2.9.</td>
<td>Mars festes und Tangentialsystem</td>
<td>35</td>
</tr>
<tr>
<td>2.10.</td>
<td>Tangential- und aerodynamisches System</td>
<td>36</td>
</tr>
<tr>
<td>3.1.</td>
<td>Beispiele für verschiedene Verläufe von Schaltfunktionen und zugähörige mögliche Schaltstrukturen</td>
<td>54</td>
</tr>
<tr>
<td>5.1.</td>
<td>Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf der Startlösung</td>
<td>61</td>
</tr>
<tr>
<td>5.2.</td>
<td>Lösungskurven zur Referenzlösung</td>
<td>65</td>
</tr>
<tr>
<td>A.1.</td>
<td>Startlösung – Zustände</td>
<td>68</td>
</tr>
<tr>
<td>A.2.</td>
<td>Startlösung – Adjungierte Variablen</td>
<td>69</td>
</tr>
<tr>
<td>A.3.</td>
<td>Startlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen</td>
<td>70</td>
</tr>
<tr>
<td>A.4.</td>
<td>Startlösung – Sonstige Größen</td>
<td>71</td>
</tr>
<tr>
<td>A.5.</td>
<td>Referenzlösung – Zustände</td>
<td>74</td>
</tr>
<tr>
<td>A.6.</td>
<td>Referenzlösung – Adjungierte Variablen</td>
<td>75</td>
</tr>
<tr>
<td>A.7.</td>
<td>Referenzlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen</td>
<td>76</td>
</tr>
<tr>
<td>A.8.</td>
<td>Referenzlösung – Sonstige Größen</td>
<td>77</td>
</tr>
<tr>
<td>A.9.</td>
<td>Referenzlösung – 3D-Visualisierung der Trajektorie</td>
<td>78</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Tabellenverzeichnis

2.1. Bestandteile der Marsatmosphäre ......................................... 25
5.1. Randbedingungen für die Startlösung ....................................... 61
5.2. Randbedingungen für die Referenzlösung ................................. 64

B.1. Notation ................................................................................. 79
B.2. Variablen ............................................................................. 80
B.3. Modellfunktionen ................................................................... 81
B.4. Modellkonstanten ................................................................. 81
B.5. Variable Splineparameter für die nichtglatten Modelle .............. 81
B.6. Verwendete physikalische Konstanten ................................. 82
Vorwort

The Eagle has landed
(Aus Neil Alden Armstrongs erstem Funkspruch von der Mondoberfläche)

Zusammenfassung


Der Mars wiederum reiht sich – hinsichtlich der Atmosphärendichte – zwischen dem Mond und der Erde ein. Seine Atmosphäre ist so dünn, dass sie gerade noch ausreicht, um einen größeren Teil der kinetischen Energie eines Vehikels durch Luftreibung abzubauen. Dieses Unterfangen gestaltet sich aber aus mehreren Gründen wesentlich schwieriger als auf der Erde:

- Da die Atmosphäre erst in sehr geringer Höhe eine ausreichende Dichte besitzt, muss mit hoher Geschwindigkeit relativ dicht über Grund gefolgt werden.
- Die Vorhersage der Luftdichte ist nur mittels Modellen möglich. Unmittelbare Messungen stehen im Allgemeinen nicht zur Verfügung.
- Auf dem Mars werden häufig lokale Stürme beobachtet, die damit nicht nur Dichtheschwankungen hervorrufen, sondern durch starke Winde auch das Erreichen eines vorgegebenen Landeplatzes erschweren.


Da kein Projekt zum Bau eines Marslanders in der gewählten Konfiguration existiert, mussten die für die Steuerung relevanten Daten eines nicht zu diesem Zweck entwickelten Gleiters – der X-38 – verwendet werden. Durch Skalierung der X-38 auf die Größe einer Marssonde kann so ein Modell für die gedachte Landeeinheit erstellt werden.

Wesentlicher Teil dieser Arbeit war nicht nur die Modellierung der physikalischen Eigenschaften des Gleiters, sondern auch der Marsatmosphäre. Dazu wurden Daten der Pathfinder-Mission
Vorwort

Abbildung 0.1: 3D-Visualisierung der Referenztrajektorie

verwendet. Für beide Modelle wurden nichtglatte Approximationen gewählt, die eine gesonderte Betrachtung im Formalismus der Optimalsteuerung erfordern.


Als „Nebenprodukt“ dieser Arbeit entstand ein neues Verfahren zur Errechnung einer Startlösung. Es ist zwar nicht universell einsetzbar, war für das vorliegende Problem aber besser geeignet als der Übergang von einem anderen Optimalsteuerungsproblem. Es beruht auf der Beobachtung, dass eine mit fest vorgegebener Steuerung errechnete Zustandstrajektorie als die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems betrachtet werden kann, wenn die Steuerung durch die Problemstellung auf die gewählten Werte festgelegt ist. Daher eignet sich dieses Verfahren insbesondere zur Behandlung von Problemen mit starken Steuerbeschränkungen. Im vorliegenden Fall sollte beispielsweise der Anstellwinkel stark beschränkt werden, um die Verschiebung des Staupunktes in Grenzen zu halten. Das neue Verfahren zur Errechnung einer Startlösung wurde bereits erfolgreich in einer weiteren Diplomarbeit am Lehrstuhl verwendet. Sein Einsatzbereich könnte eventuell auch auf den Übergang von direkten zu indirekten Verfahren erweitert werden.
Struktur der Arbeit

In Kapitel 1 werden die zur Lösung der Aufgabenstellung verwendeten theoretischen und numerischen Hilfsmittel vorgestellt und kurz erklärt.

Die komplette Modellbildung wird in Kapitel 2 durchgeführt. Sie umfasst sowohl die Approximation der verwendeten Kennlinien und -felder als auch Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen.

Kapitel 3 enthält die Zusammenfassung der vorliegenden Problemstellung sowie die Anwendung der in Kapitel 1 hergeleiteten Optimalitätsbedingungen auf dieses Problem.

Das resultierende Mehrpunkttrandwertproblem wird in Kapitel 4 noch einmal zusammengefasst.

Die Arbeitsschritte, die bis zur Errechnung Referenzlösung durchgeführt wurden, sind in Kapitel 5 beschrieben. Dabei wird insbesondere Wert auf die Darstellung des Verfahrens zur Berechnung der Startlösung und Freigabe der Steuerungen gelegt.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn PD Dr. Rainer Callies für die interessante und herausfordernde Aufgabenstellung sowie die Überlassung des Programmpaketes JANUS 1.02.

Dem Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung der Technischen Universität München danke ich für die Überlassung der Aerodynamikdaten der X-38.

Schließlich bin ich meiner Familie, meiner Freundin und allen guten Freunden im Rupiheim dankbar, deren Aufmunterung mir über die schwierigen Phasen meiner Diplomarbeit hinweghalfen.
Kapitel 1

Theoretische und numerische Grundlagen

Zuerst sollen sowohl die theoretischen als auch die numerischen Hilfsmittel erklärt werden, die zur Lösung des vorliegenden Problems verwendet wurden.

1.1. Lösungsansätze und Verfahrenseinteilung

Grundsätzlich können die Ansätze zur numerischen Lösung von Problemen der optimalen Steuerung in die beiden Klassen der *direkten* und *indirekten* Verfahren eingeteilt werden.

Direkte Verfahren basieren auf Parametrisierungen der Funktionenräume (für die Steuerungen und evtl. auch die Zustände), so dass das ursprünglich unendlichdimensionale in ein endlichdimensionionales Optimierungsproblem überführt wird. Zur numerischen Lösung kann anschließend ein Verfahren der nichtlinearen Optimierung verwendet werden.

Indirekte Verfahren dagegen verwenden die Variationsrechnung, um Lösungen im ursprünglichen, unendlichdimensionalen Funktionenraum zu finden. Unter der Annahme, dass eine optimale Lösung existiert, wird diese in eine Umgebung eingebettet. Die anschließende Differentiation nach den Einbettungsparametern liefert die notwendigen Bedingungen zur Identifizierung eines Extremums\(^1\). Die Bedingungen der zweiten Variation schränken die Menge der Lösungskandidaten noch weiter ein. Eine analytische Lösung der durch die Anwendung der Optimalitätsbedingungen entstehenden Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen ist nur bei sehr einfachen Aufgabenstellungen möglich. Bei technischen Anwendungen, wie im vorliegenden Fall der Raumfahrt, muss auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden. Hier hat sich die in Abschnitt 1.3 beschriebene Mehrzielmethode als am besten geeignetes Verfahren herausgestellt.


Der Vorteil direkter Verfahren liegt in der leichteren Anwendbarkeit: Der Benutzer benötigt keine Kenntnisse der Variationsrechnung oder optimalen Steuerung und umgeht das Problem, bei indirekten Verfahren benötigte, sinnvolle Schätzungen für die Werte der sog. adjungierten Variablen bereitzustellen zu müssen. Allerdings wird das mit einem (durch die Parametrisierung verursachten) Genauigkeitsverlust erkauft, der zum Teil erheblich sein kann.

---

\(^1\)Hinreichende Bedingungen sind zwar bekannt [9], im Allgemeinen aber zu aufwändig für praktische Probleme.
In der vorliegenden Arbeit findet das indirekte Verfahren der Variationsrechnung und optimalen Steuerung Anwendung. Daher beschränken sich alle folgenden Ausführungen auf diese Verfahrensklasse.

1.2. Theorie der optimalen Steuerung


Die Optimalsteuerung ist ein Spezialfall der Variationsrechnung, bei der die zu optimierenden Funktionen \( \varphi : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^{n+k} \) in Zustände \( x = (x_1, \ldots, x_n)^T \) und Steuerungen \( u = (u_1, \ldots, u_k)^T \) eingeteilt werden. Zustandsvariablen sind dabei diejenigen Größen, deren Ableitung nur in Nebenbedingungen in Form von expliziten Differentialgleichungen auftritt, Steuervariablen solche, deren Ableitung überhaupt nicht auftritt. Definiert man die Funktionenräume

\[
C_c^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) := \text{Menge aller Funktionen } [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n, \\
\text{die überall stetig und fast überall stetig differenzierbar sind}
\]

\[
C_{p0}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^k) := \text{Menge aller Funktionen } [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^k, \\
\text{die bis auf endlich viele Sprungstellen überall stetig sind}
\]

\[
C_{p1}^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) := \text{Menge aller Funktionen } [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^n, \\
\text{die bis auf endlich viele Sprungstellen überall stetig differenzierbar sind}
\]

so gelte im Folgenden für die Zustände und Steuerungen stets

\[
x \in C_c^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n), \quad u \in C_{p0}^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^k).
\]

1.2.1. Problemstellung

Zunächst wird folgendes Problem betrachtet:

**Problem 1.1 (Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen)**

Minimiere

\[
I(t_0, x_0, t_f, x_f, t, x, u) = g(t_0, x_0, t_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x, u) \, dt
\]

mit (fester oder freier) Anfangs- und Endzeit \( t_0 \) bzw. \( t_f \) und unter Beachtung der Randbedingungen

\[
x_i(t_0) = x_{0,i}, \quad x_j(t_f) = x_{f,j}, \quad i \in I, \; j \in J, \quad I, J \subset \{1, \ldots, n\},
\]

der Differentialgleichungs-Nebenbedingungen

\[
\dot{x} = \tilde{f}(t, x, u),
\]

sowie etwaiger innerer Punktbedingungen der Form

\[
k_S(t_S, x_S, x_S^\xi) = 0.
\]

□
Bemerkung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird nur ein einzelner innerer Punkt bei $t_S$ mit den links- und rechtsseitigen Grenzwerten $x_S^-$ bzw. $x_S^+$ betrachtet, da die Bedingungen für weitere innere Punkte analog formuliert werden können.

Das Optimierungsziel wird durch $g(t_0, x_0, t_f, x_f)$ und $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x, u) \, dt$ definiert, wobei die drei Problemklassen

<table>
<thead>
<tr>
<th>Lagrange-Problem</th>
<th>$(g = 0, L \neq 0)$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Mayer-Problem</td>
<td>$(g \neq 0, L = 0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Bolza-Problem</td>
<td>$(g \neq 0, L \neq 0)$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

unterschieden werden.

1.2.2. Ankopplung der Nebenbedingungen

Alle Nebenbedingungen werden mit sog. Lagrange-Variablen (auch Lagrange-Multiplikatoren genannt) an das Zielfunktional angekoppelt, um wieder ein freies Problem zu erhalten. So wird die Punktbedingung (1.3) mittels eines Lagrange-Parameters $\lambda_S \in \mathbb{R}$ an $g$ und die Differentialgleichungs-Nebenbedingungen (1.2) mit den Lagrange-Funktionen $\lambda \in C^1_p([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (auch als adjungierte Variablen bezeichnet) an $L$ angesetzt, und man erhält das nunmehr freie Variationsproblem

**Problem 1.2 (Freies Problem)**

Minimiere

$$\tilde{I}(t_0, x_0, t_S, x_S^-, x_S^+, \lambda_S, t_f, x_f, t, x, u, \lambda)$$

mit

$$\tilde{I}(t_0, x_0, t_S, x_S^-, x_S^+, \lambda_S, t_f, t, x, u, \lambda) = \tilde{g}(t_0, x_0, t_S, x_S^-, x_S^+, \lambda_S, t_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, u, \lambda) \, dt,$$

$$\tilde{g}(t_0, x_0, t_S, x_S^-, x_S^+, \lambda_S, t_f, x_f) = g(t_0, x_0, t_f, x_f) + \lambda_S k_S(t_S, x_S^-, x_S^+)$$

und

$$F(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda^T (\tilde{f}(t, x, u) - \dot{x})$$

als Integranden des erweiterten Zielfunktionals. □

**Definition 1.3 (Hamiltonfunktion)**

*Problem 1.2 besitzt die sog. Hamiltonfunktion*

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u, \lambda) - \dot{x}^T F_u(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda^T \tilde{f}(t, x, u).$$

Bemerkung. In der russischen Literatur und ihren Übersetzungen (wie [37]), sowie z.B. auch in [36], wird die Hamiltonfunktion (wie auch die adjungierten Variablen) mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.
1.2.3. Allgemeine Variation

Ausgehend von der Annahme, dass eine optimale Lösung \( \varphi^* = (x^*, u^*)^T \) für Problem 1.2 existiert, wird diese mit Parametern \( \epsilon \in \mathbb{R}^{n+k} \) wie folgt in eine Schar eingebettet:

\[
\Gamma : \left\{ \begin{array}{c}
[\tau_0, \tau_f] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+k} \\
(\tau, \epsilon) \mapsto (\chi(\tau, \epsilon), \Phi(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon))
\end{array} \right.
\]

Dabei sind \( \tau_0, \tau_f \in \mathbb{R} \) und \( \epsilon_0 \in \mathbb{R}^{n+k} \) feste Parameter. Für die Teilfunktionen der Schar gelte

- \( \chi \) ist \( C^\infty \)-Funktion bezüglich \( \tau \) und \( \epsilon \) und streng monoton zunehmend bezüglich \( \tau \).
- \( \Phi \) ist \( C^\infty \)-Funktion bezüglich \( \epsilon \) und stückweise \( C^1 \)-Funktion bezüglich \( \chi \) (da evtl. Knick / Sprung an einer Stelle \( t_S \)).

Außerdem gelte

\[
\chi(\tau, 0) = t \quad \text{und} \quad \Phi(t, 0) = \varphi^*,
\]

so dass \( \epsilon = 0 \) der optimalen Lösung entspricht und \( \Gamma(\tau, 0) = (t, \varphi^*) \) gilt.

Nach Einbettung des Zielfunktionals

\[
J(\epsilon) := \tilde{I}(\chi(\tau_0, \epsilon), \Phi_1, \ldots, n(\chi(\tau_0, \epsilon), \epsilon), \\
\chi(\tau_S, \epsilon), \Phi_1, \ldots, n(\chi(\tau_S, \epsilon), \epsilon), \epsilon, \lambda_S, \\
\chi(\tau_f, \epsilon), \Phi_1, \ldots, n(\chi(\tau_f, \epsilon), \epsilon), \epsilon, \lambda_f, \\
\chi(\tau, \epsilon), \Phi_1, \ldots, n(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon), \Phi_{n+1}, \ldots, n+k(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon), \lambda)
\]

muss für die Extremale von Problem 1.2 die Bedingung

\[
\frac{dJ}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} = 0 \tag{1.4}
\]

erfüllt sein.

**Definition 1.4 (Variationen)**

*Die ersten Variationen von \( t, x_i \ (i = 1, \ldots, n) \) und \( \tilde{I} \) sind durch*

\[
\begin{align*}
\delta t(\tau) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_j}(\tau, \epsilon) \right]_{\epsilon=0} \\
\delta x_i(\tau) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \chi}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon) \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon_j}(\tau, \epsilon) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \epsilon_j}(\chi(\tau, \epsilon), \epsilon) \right]_{\epsilon=0} \\
\delta \tilde{I} &:= \sum_{j=1}^{n+k} \epsilon_j \left[ \frac{\partial J}{\partial \epsilon_j}(\epsilon) \right]_{\epsilon=0}
\end{align*}
\]

*definiert.*

Mit Hilfe der abkürzenden Schreibweisen von Definition 1.4 erhält man nach Umformung von Bedingung (1.4) folgenden Satz:
Satz 1.5 (Allgemeine Variation)

Unter der Voraussetzung, dass eine optimale Lösung von Problem 1.2 existiert und $F \in C^2$ gilt\(^2\), muss die Bedingung

\[
\delta \tilde{I} = \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_0} - H \right)_{t=t_0} \cdot \delta t_0 
+ \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_S} + H^- - H^+ \right)_{t=t_S} \cdot \delta t_S 
+ \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_f} + H \right)_{t=t_f} \cdot \delta t_f 
+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{0,i}} + \lambda_i \right)_{t=t_0} \cdot \delta x_{0,i} 
+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{S,i}} - \lambda_i \right)_{t=t_S} \cdot \delta x_{S,i} 
+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{f,i}} \right)_{t=t_f} \cdot \delta x_{f,i} 
+ \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \left( H_{x_i} + \dot{\lambda}_i \right) \cdot \epsilon_j \Phi_{n,i,j}(t,0,\ldots,0) \, dt 
+ \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_f} H_{ui} \cdot \epsilon_j \Phi_{n+1,i,j}(t,0,\ldots,0) \, dt 
= 0
\]  

(1.5a) (1.5b) (1.5c) (1.5d) (1.5e) (1.5f) (1.5g) (1.5h) (1.5i)

erfüllt sein.

Die einzelnen Variationen „$\delta \cdot$“ sind für Variablen, die durch die Problemstellung festgelegt sind, gleich Null. Produkte für feste Variablen müssen folglich nicht beachtet werden. Da die übrigen Variablen unabhängig voneinander variieren können, müssen die zugehörigen Faktoren jeweils für sich verschwinden. Daraus ergeben sich alle Optimalitätsbedingungen erster Ordnung.

Bemerkung. Damit alle zu nicht-festgelegten Variablen gehörigen $\delta$-Terme unabängig voneinander frei variieren können, müssen eventuelle Kopplungen (z.B. bei gekoppelten Randdaten) mittels eines Lagrangeparameters an das Zielfunktional angehängt werden. Dadurch wird das Problem wieder frei.

Folgerung 1.6

Aus (1.5h) erhält man die Optimalitätsbedingungen

\[
H_u = 0, \quad (1.6)
\]

und die Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen ergeben sich nach (1.5g) zu

\[
\dot{\lambda} = -H_x. \quad (1.7)
\]

\(^2\)Um hinreichende Bedingungen herleiten zu können, müsste mindestens $F \in C^3$ gelten.
Die Bedingungen (1.5d) und (1.5f) ergänzen die gegebenen Randbedingungen (1.1) um genau so viele Randbedingungen für die adjungierten Variablen wie nötig sind, um das Mehrpunkt Randwertproblem eindeutig zu bestimmen: Für jeden unbestimmten Anfangs- oder Endzustand \( x_i(t_0) \) oder \( x_i(t_f) \) folgt eine sog. \textit{Transversalitätsbedingung} für die zugehörige adjungierte Variable \( \lambda_i(t_0) \) bzw. \( \lambda_i(t_f) \).

Wenn an Punkten im Inneren des Intervalls \((t_0, t_f)\) besondere Bedingungen gestellt werden, müssen die Übergangsbedingungen mit Hilfe von (1.5b) und (1.5e) hergeleitet werden. Das gleiche gilt, wenn die Differenzierbarkeitsforderung an \( F \) an einem inneren Punkt nicht erfüllt werden kann (da \( f \) z.B. abschnittsweise definiert ist).

Die allgemeine Variation (1.5) bildet die Grundlage für viele weitere Folgerungen wie z.B. die Randbedingungen im Falle gekoppelter Randdaten oder das Aufstellen der Sprungbedingungen für Randstücke von Zustandsbeschränkungen.

**Folgerung 1.7 (Hamiltonfunktions-Test)**

Wegen Folgerung 1.6 und Definition 1.3 gilt im Falle autonomer (zeitunabhängiger) Probleme

\[
\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + H_x^T \dot{x} + H_u^T \dot{u} + H_{\lambda}^T \dot{\lambda} = 0 - \dot{\lambda}^T \dot{x} + 0 + \dot{f}^T \dot{\lambda} = 0.
\]

Daher ist die Hamiltonfunktion wegen (1.5b) auf dem gesamten Intervall \([t_0, t_f]\) konstant und bei freier Anfangs- oder Endzeit wegen (1.5a) bzw. (1.5c) sogar identisch Null.

Der Hamiltonfunktions-Test eignet sich hervorragend zur Ergebniskontrolle bei der numerischen Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. Er hilft zum einen, Fehler bei der Herleitung oder Programmierung des Randwertproblems zu entdecken, zum anderen zeigt der Test an, wenn eine Zwischenlösung im Verlauf einer Homotopiekette nicht mehr optimal ist und daher verworfen werden muss.

Aus der zweiten Variation

\[
\frac{d^2 J}{d\epsilon^2} \bigg|_{\epsilon=0} = 0
\]

folgt die sog. \textit{Legendre-Clebsch-Bedingung}

\[
\left( \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ positiv semidefinit,}
\]

für die Hesse-Matrix der Hamiltonfunktion bezüglich den Steuergrößen \( u \).

Es ist zu beachten, dass die bisherigen Optimalitätsbedingungen jeweils für die optimale Trajektorie gelten. Sie sind im Einklang mit dem \textit{Minimumprinzip} [37, 36]. Es besagt, dass die Steuerungen so gewählt werden müssen, dass die Hamiltonfunktion minimiert wird:

\[
u = \arg \min_v H(t, x, v, \lambda)
\]

Dieses Kriterium gilt also global für alle zulässigen Steuerungen und nicht nur in einer Umgebung der optimalen Steuerung.

**Bemerkung.** Wird die Hamiltonfunktion, wie in den Originalarbeiten von Pontryagin, mit umgekehrtem Vorzeichen definiert, so muss sie \textit{maximiert} werden, weshalb in großen Teilen der Literatur vom (Pontryaginschen) \textit{Maximumprinzip} die Rede ist.
1.3. Mehrzielmethode

Die Anwendung der oben beschriebenen Optimalitätsbedingungen führen auf *Mehrpunktrandwertprobleme* folgender Form:

**Problem 1.8 (Mehrpunktrandwertproblem)**

Seien

\[ f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ hinreichend glatt}, \]

\[ r_j : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \ldots, m \]

und die Anfangszeit \( t_0 \) gegeben, dann sind die Funktionen \( y \in C^1_p([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \), die Endzeit \( t_f \) und die inneren Spungstellen \( t_1, \ldots, t_{m-1} \in (t_0, t_f) \) gesucht, so dass die Differentialgleichungen

\[ \dot{y}(t) = f(t, y) \quad (1.10) \]

sowie die Rand- und Übergangsbedingungen

\[ r_m(t_f, y_0, y_f) = 0 \quad \text{und} \quad (1.11a) \]
\[ r_j(t_j, y_j^+, y_j^-) = 0, \quad j = 1, \ldots, m-1 \quad (1.11b) \]

erfüllt sind. □

**Bemerkung.** „Hinreichend glatt“ bedeutet hier, dass aus numerischen Gründen \( f \in C^N_p \) mit \( N \gtrsim 20 \) gelten muss (siehe dazu [8]). Notwendige Bedingungen für die Anzahlen \( n_j \) werden in [23] angegeben.

Zur numerischen Lösung von Problem 1.8 hat sich die Mehrzielmethode\(^3\) als geeignetes Werkzeug herausgestellt. Eine allgemeine Einführung zur Mehrzielmethode findet sich in der Standardliteratur zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen [42, 13]. Im Wesentlichen beruht sie auf einer Erweiterung des einfachen Schießverfahrens durch weitere Unterteilung des Zeitintervalls in mehrere Abschnitte.

Es müssen die Anfangswerte \( y_j^+, j = 0, \ldots, m - 1 \) zu den Punkten \( t_j, j = 0, \ldots, m - 1 \), sowie die Lage der inneren Punkte \( t_1, \ldots, t_{m-1} \) und der Endzeit \( t_f \) gefunden werden, so dass (1.10) und (1.11) erfüllt sind. Die linksseitigen Grenzwerte an den freien Punkten \( t_1, \ldots, t_m = t_f \)

\[ y_j^- = y(t_j; t_{j-1}, y_j^{+, j-1}), \quad j = 1, \ldots, m \]

sind Lösungen der Anfangswertprobleme

\[ \dot{y} = f(t, y), \quad y(t_{j-1}) = y_j^{+, j-1}, \quad j = 1, \ldots, m \quad (1.12) \]

(siehe Abbildung 1.1).

---

\(^3\)Der Begriff „Mehrzielmethode“ wurde u.a. von Bulirsch geprägt. Im Deutschen wird außerdem auch die Bezeichnung „Mehrfachschießen“ gebraucht, die sich vom – im englischen Sprachraum verwendeten – Begriff „multiple shooting“ ableitet.
Setzt man diese Definition der \( y_j^- \) in (1.11) ein, so erhält man das nichtlineare Gleichungssystem

\[
F(z) := \begin{pmatrix}
    r_m(t_f, y_0^+, y(t_f; t_{m-1}, y_{m-1}^-)) \\
r_1(t_f, y_1^+, y(t_1; t_0, y_0^+)) \\
    \vdots \\
r_{m-1}(t_{m-1}, y_{m-1}^+, y(t_{m-1}; t_{m-2}, y_{m-2}^+))
\end{pmatrix} = 0
\]

für die unbekannten Anfangswerte und Zeitpunkte

\[
z := (y_0^+, t_f, y_1^+, t_1, \ldots, y_{m-1}^+, t_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{m(n+1)}.
\]

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann prinzipiell jedes Verfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme verwendet werden. Hier kommt das modifizierte Newtonverfahren mit der Iterationsvorschrift

\[
\tilde{z}^{(i+1)} = \tilde{z}^{(i)} - \nu^{(i)} \left( D_F(\tilde{z}^{(i)}) \right)^{-1} F(\tilde{z}^{(i)})
\]

für die Näherungen

\[
\tilde{z} := (\tilde{y}_0^+, \tilde{t}_f, \tilde{y}_1^+, \tilde{t}_1, \ldots, \tilde{y}_{m-1}^+, \tilde{t}_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{m(n+1)}
\]

durch eine Approximation \( \Delta F \) ersetzt wird. Wird ein geeigneter Startvektor \( \tilde{z}^{(0)} \) vorgegeben, dann läuft ein Iterationsschritt der Mehrzielmethode folgendermaßen ab:

1. Berechne \( F(\tilde{z}^{(i)}) \) durch numerischen Integration der Anfangswertprobleme (1.12) und Auswertung der \( r_j \) aus (1.11).

2. Berechne die Approximation der Jacobimatrix \( \Delta F \).

3. Löse das lineare Gleichungssystem

\[
\Delta F(\tilde{z}^{(i)}) \Delta z^{(i)} = -F(\tilde{z}^{(i)})
\]

und addiere die so berechnete Korrektur \( \Delta z^{(i)} \):

\[
\tilde{z}^{(i+1)} = \tilde{z}^{(i)} + \nu^{(i)} \Delta z^{(i)}
\]

Das Verfahren wird abgebrochen und \( \tilde{z}^{(i+1)} \) als Lösung akzeptiert, falls alle Komponenten von \( \Delta z^{(i)} \) kleiner als eine vorgegebene Schranke sind.

Zur Wahl des Relaxationsfaktors \( \nu^{(i)} \in (0, 1] \), die von einigen Testfunktionen abhängt, und der Approximation der Jacobimatrix sei auf [8] verwiesen.

Seit Ende der 60er Jahre entstanden immer weiter entwickelte Implementierungen der Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen. Beispielhaft seien BOUNDSOL (Oberle), OPTSOL (Bulirsch), DLOPTR (Deuflhard), BNDCSO (Oberle), MUMUS (Hiltmann, [23]) und JANUS (Callies, [8]) genannt. In dieser Arbeit wurde letzteres Programm paket in der Version 1.02 verwendet. Es ist eine Neuentwicklung, die in den Benutzerschnittstellen dem Paket MUMUS ähnelt, ansonsten aber wesentliche Verbesserungen enthält.
1.4. Kombiniertes Newton- und Bisektions-Verfahren


Das für das Verfahren benötigte Startintervall wird durch iterative Halbierung des gesamten für \(\alpha\) zulässigen Bereichs erzeugt.

1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines


1.5.1. Von den klassischen Splines zu Funktionen mit niedrigerer Differenzierbarkeit

Im Folgenden werden sowohl Splines als auch deren Erweiterung auf Funktionen mit noch geringerer Differenzierbarkeitsordnung an den inneren Knoten betrachtet. Letztere werden dann
Kapitel 1. Theoretische und numerische Grundlagen

\[ N_{i,k-1} \rightarrow N_{i,k} \rightarrow N_{i-1,k+1} \]
\[ N_{i+1,k-1} \rightarrow N_{i,k} \rightarrow N_{i,k+1} \]

(a) Abhängigkeitsbereich für \( N_{i,k} \)
(b) Einflussbereich von \( N_{i,k} \)

Abbildung 1.2.: Zur rekursiven Berechnung von B-Splines

in Kapitel 2 zur Approximation von uni- und bivariaten Funktionen verwendet.

**Definition 1.9 (Spline)**
Eine Spline der Ordnung \( k \) (Grad \( k - 1 \)) bezüglich des Gitters

\[ a = t_0 < \cdots < t_{g+1} = b \]

ist eine Funktion \( s \in C^{k-2}[a,b] \), die auf jedem Intervall \([t_i,t_{i+1}], i = 0, \ldots, g\) mit einem Polynom maximal \( k \)-ter Ordnung übereinstimmt.

**Satz 1.10 (Dimension des Splineraums)**
Der Raum aller Splines der Ordnung \( k \) bezüglich eines Gitters \( a = t_0 < \cdots < t_{g+1} = b \) hat die Dimension \( k + g \).

**Beweis.** Die Anzahl der Freiheitsgrade zur Konstruktion einer solchen Spline ist nach oben durch \((g+1)k - g(k-1) = k + g\) beschränkt, da auf jedem der \( g+1 \) Teilintervalle \( k \) Koeffizienten zu bestimmen sind, gleichzeitig aber an jedem der \( g \) inneren Knoten \( k-1 \) Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein müssen. Außerdem lassen sich \( k + g \) linear unabhängige Basisfunktionen finden (siehe Satz 1.13), so dass die Dimension des Splinesraums auch nach unten durch \( k + g \) beschränkt ist.

Solch eine Basis lässt sich z.B. aus den sog. B-Splines konstruieren, die als Verallgemeinerung der charakteristischen Funktion eines Intervalls angesehen werden können:

**Definition 1.11 (B-Splines)**
Sei \( \eta_1 \leq \cdots \leq \eta_n \) eine beliebige Folge von Knoten. Dann sind die B-Splines \( N_{i,k}(x) \) der Ordnung \( k \) für \( i = 1, \ldots, n-k \) rekursiv erklärt durch

\[
N_{i,1}(x) = \begin{cases} 
1, & \text{falls } x \in [\eta_i, \eta_{i+1}) \\
0, & \text{sonst}
\end{cases},
\]

\[
N_{i,k}(x) = \frac{x - \eta_i}{\eta_{i+k-1} - \eta_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\eta_{i+k} - x}{\eta_{i+k} - \eta_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x).
\]

Um in dieser Definition auch mehrfache (zusammenfallende) Knoten und damit verschwindende Nenner zu berücksichtigen, soll hierbei die Konvention \( 0/0 = 0 \) gelten.

Abbildung 1.2 veranschaulicht die Abhängigkeiten der Rekursionsformel aus Definition 1.11.

Per Induktion ergeben sich aus Definition 1.11 bereits folgende Eigenschaften der B-Splines:
1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines

- \( \text{supp} N_{i,k} = [\eta_i, \eta_{i+k}] \) (lokaler Träger)
- \( N_{i,k} \geq 0 \) (Nichtnegativität)
- \( N_{i,k} \) ist ein stückweises Polynom der Ordnung \( k \) bezüglich der Intervalle \([\eta_j, \eta_{j+1}]\).

Außerdem kann durch eine explizite Darstellung der B-Splines mit Hilfe von abgebrochenen Potenzen und dividierten Differenzen (die hier nicht betrachtet werden soll) folgende Aussage über ihre Differenzierbarkeitseigenschaften getroffen werden:

**Lemma 1.12 (Differenzierung von B-Splines)**

* Ist \( \eta_j \) ein \( r \)-facher Knoten, d.h.
  \[ \eta_{j-1} < \eta_j = \cdots = \eta_{j+r-1} < \eta_{j+r}, \]
  so ist \( N_{i,k} \) an der Stelle \( \eta_j = \cdots = \eta_{j+r-1} \) mindestens \( (k-r-1) \)-mal stetig differenzierbar. Ist \( N_{i,k} \) an der Stelle \( x \) mindestens einmal stetig differenzierbar, so gilt für die Ableitung
  \[
  N'_{i,k}(x) = (k-1) \left( \frac{N_{i,k-1}(x)}{\eta_{k-1} - \eta_i} - \frac{N_{i+1,k-1}(x)}{\eta_{k} - \eta_{i+1}} \right).
  \]

Mit diesen Eigenschaften ist es nun möglich, die im Beweis zu Satz 1.10 angekündigte Basis zu erstellen:

**Satz 1.13 (Basis des Splineraums)**

* Wählt man den Knotenvektor \( \eta \in \mathbb{R}^n \) mit \( n = 2k + g \) so, dass man je \( k \)-fache Endknoten
  \[ \eta_1 = \cdots = \eta_t = t_0 \quad \text{und} \quad \eta_{k+1} = \cdots = \eta_{2k+g} = t_{g+1} \]
  sowie \( g \) einfache innere Knoten
  \[ \eta_{k+1} = t_1 < \cdots < \eta_{k+g} = t_g \]
  hat, so sind die dadurch festgelegten B-Splines
  \[ N_{1,k}, \ldots, N_{k+g,k} \]
  eine Basis für den \((k+g)\)-dimensionalen Raum der Splines der Ordnung \( k \) bezüglich des Gitters \( \eta_k = t_0 < \cdots < \eta_{k+g+1} = t_{g+1} \).

**Beweis.** Da die B-Splines \( N_{1,k}, \ldots, N_{k+g,k} \) zum gewählten Knotenvektor \( \eta^{2k+g} \) laut obigen Folgerungen stückweise Polynome mit \((k-2)\)-facher Differenzierbarkeit an den inneren Knoten sind, sind sie selbst Splines der Ordnung \( k \) bezüglich des Gitters \( \eta_k < \cdots < \eta_{k+g+1} \). Weil ihre Anzahl \( k+g \) mit der Dimension des Splineraums übereinstimmt und sie linear unabhängig sind (zum Beweis dazu sei auf [14] verwiesen), bilden sie eine Basis des Splineraumes.

Erlaubt man bei der Wahl des Knotenvektors \( \eta \) auch mehrfache innere Knoten, so erweitert man den Raum der durch die zugehörigen B-Splines darstellbaren Funktionen auch auf solche mit weniger als \((k-2)\)-facher Differenzierbarkeit an diesen Stellen. In diesem Raum
Abbildung 1.3.: B-Spline-Basis $N_{i,4}(h)$, $i = 1, \ldots, 7$ bezüglich den je vierfachen Randknoten 0 km und 141 km sowie dem dreifachen inneren Knoten 85 km zur Approximation der Schallgeschwindigkeit durch stückweise kubische Polynome, die am inneren Knoten stetig aber nicht stetig differenzierbar sind.

werden die Approximationen in Kapitel 2 durchgeführt. So wurde für die Approximation der Schallgeschwindigkeit beispielsweise die Basis aus Abbildung 1.3 verwendet.

Die Verwendung einer solchen B-Spline-Basis zur Datenapproximation ist aus mehreren Gründen vorteilhaft. So besitzen Funktionen

$$s = \sum_{i=1}^{k+g} c_i N_{i,k} \quad (1.13)$$


1.5.2. Auswertung von Funktionen in B-Spline-Darstellung

 Folgendes Schema zur Auswertung von (1.13) nutzt die Lokalität der B-Splines aus und vermeidet außerdem die mehrfache Berechnung von Zwischenergebnissen: Um $s$ an der Stelle $x$ auszuwerten, werden zunächst die beiden benachbarten Knoten $\eta_j$ und $\eta_{j+1}$ so bestimmt,
1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines

Abb. 1.4.: Tableau zur Auswertung der nicht-negativen B-Splines am Punkt \( x \in [\eta_j, \eta_{j+1}) \)

dass

\[ x \in [\eta_j, \eta_{j+1}) \]

gilt. Damit hat man automatisch die einzige B-Spline der Ordnung 1 gefunden, die in \( x \) nicht verschwindet, nämlich \( N_{j,1} \). Wendet man nun Definition 1.11 an, um die B-Splines der Ordnung 2 und höher zu berechnen, so sieht man leicht (vgl. Abb. 1.2(b)), dass die Anzahl der nicht verschwindenden B-Splines jeweils gleich der Ordnung dieser B-Splines ist. Die stufenweise Auswertung der B-Splines wird wie in Abb. 1.4 dargestellt durchgeführt. Für die Auswertung von \( s(x) \) muss dann lediglich noch das Skalarprodukt der nicht-verschwindenden B-Splines (die in der letzten Spalte des Tableaus stehen) mit den entsprechenden Koeffizienten \( c_{j-k+1}, \ldots, c_j \) berechnet werden:

\[
s(x) = \sum_{i=j-k+1}^j c_i N_{i,k}(x) \tag{1.14}
\]

Um (1.14) \( \nu \)-mal zu differenzieren, gibt es unter Verwendung von Lemma 1.12 grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

- Ableitung der B-Spline-Basisfunktionen \( N_{i,k} \rightarrow N_{i,k}^{(\nu)} \) und anschließende Linearkombination mit den Koeffizienten \( c_i \).

- Umrechnung der Koeffizienten \( c_i \rightarrow c_i^{(\nu)} \) und Linearinterpolation mit den B-Splines \( N_{i,k-\nu} \) entsprechender niedrigerer Ordnung.

Diese beiden Ansätze führen auf die Darstellungen

\[
s^{(\nu)}(x) = \sum_{i=j-k+1}^j c_i N_{i,k}^{(\nu)}(x) \tag{1.15}
\]
Kapitel 1. Theoretische und numerische Grundlagen

bzw.

\[ s^{(\nu)}(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (k - i) \sum_{i=j-k+1+\nu}^{j} c^{(\nu)}_{i} \cdot N_{i,k-\nu}(x) \quad \text{mit} \quad c^{(l)}_{i} = \begin{cases} c_{i}, & \text{falls } l = 0 \\ \frac{c^{(l-1)}_{i} - c^{(l-1)}_{i-1}}{\eta_{i+k-l} - \eta_{i}}, & \text{sonst.} \end{cases} \]

Der erste Ansatz ist anschaulicher, hat aber den Nachteil, dass für jede Auswertung von (1.15) die Ableitungen der Basis-B-Splines durch Rekursion bestimmt werden müssen. Beim zweiten Ansatz dagegen müssen die \( c^{(\nu)}_{i} \) nur einmal durch Rekursion bestimmt werden. Die B-Splines der Ordnung \( k - \nu \) fallen ohnehin bei Verwendung des Tableaus aus Abbildung 1.4 als Zwischenergebnisse an.

Bei der Implementierung stückweiser Modelle für die Mehrzielmethode ist zu beachten, dass an jedem Punkt, an dem die rechte Seite des Randwertproblems nicht hinreichend oft stetig differenzierbar ist, ein Schaltpunkt eingefügt werden muss (siehe auch Kapitel 3). Weil aber bei der Durchführung von Homotopen diese Schaltpunkte im Allgemeinen nicht a priori exakt bestimmt sind, müssen die abschnittsweise glatten rechten Seiten auch ein gewisses Stück über den Teildefinitionsbereich hinaus „verlängerbar“ sein.

Um das zu erreichen, werden die B-Spline-Approximationen hier in Polynomdarstellung umge- rechnet. Dazu betrachte man zunächst die Taylor-Entwicklung von \( s(x) \) im Intervall \([\eta_{j}, \eta_{j+1}]\) um einen Punkt \( x_{0} \in [\eta_{j}, \eta_{j+1}] \). Weil B-Splines der Ordnung \( k \) Polynome vom Grad \( k - 1 \) sind, sind nur die ersten \( k \) Glieder von Null verschieden, so dass

\[ s(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{s^{(i)}(x_{0})}{i!}(x - x_{0})^{i} \quad \forall x \in [\eta_{j}, \eta_{j+1}] \quad (1.16) \]

gilt. Die Berechnung der benötigten Ableitungen \( s^{(i)}(x_{0}) \) wird nach einer der oben beschriebenen Möglichkeiten durchgeführt. Der Definitions bereich der so berechneten Polynomdarstellung ist nun problemlos auf ein Intervall \([\eta_{j} - \varepsilon, \eta_{j+1} + \varepsilon]\) mit beliebigem \( \varepsilon > 0 \) erweiterbar. Bei der Umrechnung in eine stückweise Polynomdarstellung ist zu beachten, dass die ursprünglichen Stetigkeitsanforderungen an die Approximation wegen der unvermeidlichen Rundung der Polynomkoeffizienten nun nicht mehr exakt erfüllt werden können und die Polynomkoeffizienten \( \frac{s^{(i)}(x_{0})}{i!} \) mit höherer Genauigkeit abgespeichert werden müssen. Trotz dieser Einschränkungen ist der Einsatz einer B-Spline-Basis gerechtfertigt, da er die Errechnung der Approximation vereinfacht.

1.5.3. Tensorproduktsplines

Die Verwendung von B-Splines als Basis zur Approximation von Kennlinien lässt sich auch auf Tensorproduktsplines zur Approximation von Kennfeldern höherer Dimension erweitern. Das sei im Folgenden an den ebenfalls zur Anwendung kommenden bivariaten Tensorproduktsplines gezeigt.

Seien nun \( \eta_{x} \in \mathbb{R}^{k+g} \) und \( \eta_{y} \in \mathbb{R}^{l+h} \) Knotenvektoren sowie \( N_{i,k} \) und \( M_{j,l} \) die zugehörigen B-Splines der Ordnungen \( k \) bzw. \( l \) in \( x- \) bzw. \( y \)-Richtung. Dann lassen sich bivariate Funktionen
1.5. Approximationen mit Hilfe von B-Splines

durch Tensorproduktsplines der Form

\[
s(x, y) = \sum_{i=1}^{k+q} \sum_{j=1}^{l+h} c_{i,j} N_{i,k}(x) M_{j,l}(y) = N_k^T(x) C M_l(y)
\]

approximieren.

Die Eigenschaften so konstruierter Funktionen lassen sich leicht aus den Eigenschaften im univariaten Fall ableiten. Deswegen sei hier lediglich erwähnt, wie sich (1.16) auf den bivariaten Fall übertragen lässt: Aus der Taylor-Entwicklung für Skalarfelder (siehe z.B. [2]) folgt nach Wahl eines \( x_0 \in [\eta_{x,j}, \eta_{x,j+1}) \) und eines \( y_0 \in [\eta_{y,j}, \eta_{y,j+1}) \) für alle \((x, y) \in [\eta_{x,j}, \eta_{x,j+1}) \times [\eta_{y,j}, \eta_{y,j+1})\)

\[
s(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{i! j!} \frac{\partial^{i+j} s}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^i (y-y_0)^j
\]

\[
= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{i! j!} N_k^{(i) T}(x_0) C M_l^{(j)}(y_0) \cdot (x-x_0)^i (y-y_0)^j.
\]

Somit müssen für jedes der rechteckigen Grundgebiete, die sich durch Wahl der inneren Knoten ergeben, die Terme \( \frac{1}{i! j!} N_k^{(i) T}(x_0) C M_l^{(j)}(y_0) \) nur einmal im Voraus berechnet werden.
Kapitel 2

Modellbildung

Im Folgenden werden alle relevanten physikalischen Zusammenhänge durch Modellfunktionen beschrieben. Dazu gehören Modelle des Mars, seiner Atmosphäre, der aerodynamischen Beiwerte des X-38-Raumgleiters, sowie ein Modell für dessen Aufheizung im Staupunkt.

2.1. Marsoberfläche, -gravitation und -rotation

Der Mars wird als homogene Kugel mit Radius $R_0$ angenommen. Daraus ergibt sich folgende Formel für die Gravitationsbeschleunigung in Abhängigkeit von der Höhe über der Oberfläche

$$ g(h) = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2. $$

Nach Differentiation erhält man

$$ g'(h) = -2g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^3}. $$

Die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche $g_0$ wurde aus der Masse und dem Radius des Mars, sowie der Gravitationskonstanten errechnet. Die Zahlenwerte der verwendeten Parameter sowie der Rotationsgeschwindigkeit $\Omega$ des Mars sind Tabelle B.4 zu entnehmen.

2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit


$$ a_D = -\frac{S}{2m} C_D \rho v^2 $$
Kapitel 2. Modellbildung

Abbildung 2.1.: Mosaik aus Viking 1 Orbiter-Bildern des Mars mit dem 3000 km langen und bis zu 8 km tiefen Valles Marineris in der Bildmitte (NASA Image ID number: MG075078-334SP)

konnte nun die Dichte $\rho$ in Abhängigkeit der Höhe bestimmt werden. Das Druckprofil wurde durch Integration der hydrostatischen Gleichung

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

gewonnen und schließlich die Temperatur aus der Gleichung

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$


Da die Atmosphäredaten von Pathfinder nur bis zur Öffnung seines Bremsfallschirms in ca. 9 km Höhe vorliegen, wurde für die folgenden Modelle jeweils noch ein Wert für die Temperatur und den Druck an der Oberfläche hinzugenommen. Aus den Messungen, die Pathfinder in den Wochen nach der Landung an der Oberfläche durchführte (siehe [35] und [41]), wurde eine der Tageszeit der Landung$^1$ entsprechende Messreihe ausgewählt$^2$ und für die Temperatur und den Druck an der Oberfläche Werte von 200 K bzw. 671 Pa angenommen.

Die gesamte Datenbasis ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Im Temperaturverlauf fallen mehrere Wellen auf, die verschiedene Ursachen haben. So ist z.B. die starke Inversion in einer Höhe von ca. 9 km bis 16 km wahrscheinlich auf eine CO$_2$-Wolke zurückzuführen [40]. Obwohl sich dieser

$^1$Pathfinder landete um ca. 3 Uhr nachts (lokaler Marszeit).
$^2$Messungen wurden erstmals am dritten Tag auf der Oberfläche zur passenden Uhrzeit durchgeführt und stehen in den Dateien [http://atmos.mssu.edu/PDS/data/mpam_0001/surf rdr/scidata/sr00xxs/sr0090s.lbl bzw. sr0090s.tab (zuletzt besucht im April 2003)] zur Verfügung.
2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit

Abbildung 2.2.: Atmosphärendaten der Pathfinder-Mission inkl. einer Bodenmessung
Effekt stark auf die Berechnung der Schallgeschwindigkeit auswirken würde, wird er in der Modellbildung nicht gesondert berücksichtigt. Zum einen würde es die Anzahl der notwendigen Schaltpunkte der Optimalsteuerungsprobleme wesentlich erhöhen und zum anderen liegt auf dem Mars nur äußerst selten Wolkenbildung vor, so dass der Effekt ohnehin vernachlässigt werden sollte.

### 2.2.1. Dichte

Die Dichte wird als exponentiell abhängig von der Höhe angenommen und durch die Formel

\[ \varrho(h) = \varrho_0 e^{-\beta h} \]  

(2.2)

beschrieben. \( \varrho_0 \) wurde mittels Gleichung (2.1) aus den Bodenmessungen von Temperatur und Druck errechnet und \( \beta \) durch „least squares fit“ an das Dichteprofil bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass durch eine Logarithmus-Transformation von (2.2) das Ausgleichsproblem zur Bestimmung von \( \beta \) zwar linearisiert werden könnte, wodurch jedoch die sehr kleinen Dichtewerte der oberen Atmosphäre zu stark gewichtet würden. Das würde wiederum zu einer schlechten Approximation in Bodennähe führen. Da aber gerade dort Wert auf eine gute Approximation gelegt werden sollte, wird das ursprüngliche, nichtlineare Ausgleichsproblem gelöst. Das Ergebnis dieser Approximation kann Tabelle B.4 sowie Abbildung 2.3 entnommen werden.

Die Ableitung ergibt sich zu

\[ \varrho'(h) = -\beta \varrho_0 e^{-\beta h}. \]
2.2. Marsatmosphäre und Schallgeschwindigkeit

Tabelle 2.1.: Bestandteile der Marsatmosphäre (Quelle: [33])

<table>
<thead>
<tr>
<th>Stoff</th>
<th>chem. Formel</th>
<th>Anteil (%)</th>
<th>molare Masse (kg mol(^{-1}))</th>
<th>Adiabatenexponent</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Kohlendioxid</td>
<td>CO(_2)</td>
<td>95,32</td>
<td>0,044009</td>
<td>1,33</td>
</tr>
<tr>
<td>Stickstoff</td>
<td>N(_2)</td>
<td>2,7</td>
<td>0,028014</td>
<td>1,4</td>
</tr>
<tr>
<td>Argon</td>
<td>Ar</td>
<td>1,6</td>
<td>0,039948</td>
<td>1,66</td>
</tr>
<tr>
<td>Sauerstoff</td>
<td>O(_2)</td>
<td>0,13</td>
<td>0,031998</td>
<td>1,4</td>
</tr>
<tr>
<td>Kohlenmonoxid</td>
<td>CO</td>
<td>0,08</td>
<td>0,02801</td>
<td>1,41</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\[ \Sigma: 99,83 \quad \phi: 0,043483 \quad \phi: 1,34 \]

2.2.2. Schallgeschwindigkeit

Da die vorliegenden aerodynamischen Beiwerte nicht nur vom Anstellwinkel, sondern auch von der Machzahl abhängen (siehe Abschnitt 2.3.2), muss die Schallgeschwindigkeit in der Atmosphäre bekannt sein, um die Geschwindigkeit in Mach ausdrücken zu können. Die Schallgeschwindigkeit \( a \) hängt vom Druck und der Dichte bzw. der Temperatur und der molaren Masse ab:\(^3\)

\[ a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} \quad (2.3) \]

Außerdem geht in (2.3) der Adiabatenexponent \( \kappa \) ein. Er ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen und ist für die meisten realen Gase über weite Bereiche temperaturunabhängig. Daher wurde er hier als (mit der molaren Masse) gewichtetes Mittel der Adiabatenexponenten der in der Atmosphäre vorkommenden Gase zu

\[ \kappa = 1,34 \]

berechnet (siehe Tabelle 2.1).

Um nun aus den Atmosphärendaten der Pathfinder-Mission ein Modell für die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe über der Marsoberfläche aufzustellen, ist es unerheblich, welche der beiden Formeln aus (2.3) verwendet wird, da – wie in Abschnitt 2.2 beschrieben – die Temperaturdaten aus den anderen Daten errechnet wurden.

Es wurden zwei unterschiedliche Modelle erstellt. Das erste Modell wird zur Errechnung der Startlösung verwendet und sollte aus zwei Gründen möglichst einfach sein:

- Eine einfache Funktion beschleunigt die Auswertung der rechten Seiten der Differentialgleichungen. Das ist insbesondere bei der Errechnung einer Startlösung wichtig, da hier u.U. viele Versuche nötig sind bis eine zufriedenstellende Trajektorie vorliegt (siehe Kapitel 5.1).

- Eine abschnittsweise definierte Funktion würde mehrfache Neustarts des Integrators zu a priori unbekannten Zeitpunkten erfordern, was mit den verwendeten Integratoren nicht automatisiert möglich ist.

\(^3\)Die beiden Formeln hängen über Gleichung (2.1) zusammen.
Kapitel 2. Modellbildung

Es bietet sich also beispielsweise ein Polynom an. Allerdings liegen nur Daten bis zu einer Höhe von ca. 141 km vor, was dazu führt, dass ein Approximationspolynom außerhalb dieses Bereichs völlig unrealistische Werte für die Schallgeschwindigkeit liefert. Daher wird zunächst die konstante Funktion

\[ a(h) = 0,205 \text{ km s}^{-1} \]  

verwendet.

Das zweite Modell wird erst im Verlauf der Homotopiekette verwendet. Es wird mit Hilfe von B-Splines der Ordnung 4 durch

\[ a(h) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{4+3} a_i N_{i,4}(h), & \text{falls } h < 141 \text{ km} \\ 0,205 \text{ km s}^{-1}, & \text{falls } h \geq 141 \text{ km} \end{cases} \]  

mit dem Knotenvektor

\[ \eta_h = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 85 \ 85 \ 85 \ 141 \ 141 \ 141 \ 141) \text{ km} \]  

und dem Koeffizientenvektor

\[ a = (0,225 \ 0,226 \ 0,194 \ 0,158 \ 0,229 \ 0,113 \ 0,221) \text{ km s}^{-1} \]  

definiert und besteht folglich aus zwei beim dreifachen Knoten \( h = 85 \text{ km} \) stetig zusammengefügten, kubischen Polynomen, sowie einer bei \( h = 141 \text{ km} \) unstetig angefügten konstanten Funktion (siehe Abbildung 2.4). Dieser konstante Funktionsteil ist notwendig, weil für \( h > 141 \text{ km} \) keine Atmosphäredaten mehr vorliegen. Er soll erzwingen, dass die Machzahl in der oberen Atmosphäre im Approximationsgebiet der aerodynamischen Beiwerte bleibt. Die kubischen Polynome im Datenbereich minimieren die Summe der Fehlerquadrate, wobei der Datenpunkt am Boden 10-fach gewichtet wurde. Die errechneten Koeffizienten wurden auf drei gültige Stellen gerundet.

Durch das verfeinerte Modell gelang eine Reduzierung des mittleren relativen Fehlers auf 1,64 %. Der maximale relative Fehler beträgt 9,51 %.

**Bemerkung.** Da die B-Splines eine Zerlegung der Eins bilden, ließe sich obige Funktion durch Einfügen eines zusätzlichen vierfachen Knotens an \( \eta_h \) und viermaliges Anfügen von 0,205 \text{ km s}^{-1} an \( a \) auch als reine Linearkombination von B-Splines darstellen. Dabei wäre darauf zu achten, dass der neue vierfache Knoten größer als das maximal auftauchende \( h \) sein muss.

Für die Machzahl und ihre Ableitungen gilt dann

\[ Ma(v, h) = \frac{v}{a(h)}, \]

\[ \frac{\partial Ma}{\partial v}(v, h) = \frac{1}{a(h)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Ma}{\partial h}(v, h) = -\frac{v a'(h)}{a^2(h)}, \]

wobei zur Berechnung der Ableitung der Schallgeschwindigkeit nach der Höhe Lemma 1.12 verwendet werden kann.
2.3. Raumgleiter X-38/CRV


Ein anderer geeigneter Gleiter wäre das Demonstrationsmodell PHOENIX⁸ gewesen, von dem aber leider nur wenige Aerodynamikdaten zur Verfügung stehen [21, 22]. Insbesondere existieren bisher keinerlei Daten für Machzahlen größer als 20.

Es ist zwar (zumindest vorerst) unrealistisch, ein Vehikel in der Größe der X-38 auf dem

---

⁴Crew Return Vehicle  
⁵International Space Station  
⁶Das private Unternehmen Scaled Composites (das zuletzt durch den Gewinn des Anzari X Prize und den Bau des von Steve Fosset geflogenen GlobalFlyer auf sich aufmerksam machte) lieferte einige Prototypen bis zu einem Maßstab von 90 % der geplanten Größe.  
⁷Technologie für zukünftige Raumtransportsysteme: Nationales Technologieprogramm, Oktober 1997 – Juni 2002  
⁸PHOENIX ist ein zu Demonstrations- und Testzwecken gebautes Modell des geplanten europäischen Raumtransportsystems HOPPER.
Mars landen zu lassen, allerdings hat eine Skalierung keinerlei Einfluss auf das betrachtete Systemverhalten beim Eintritt in die Atmosphäre: Da in den Bewegungsdifferentialgleichungen (2.12) die angeströmte Fläche und Masse des Gleiters lediglich als Quotient $\frac{S}{m}$ auftreten, ändert sich durch eine proportionale Verkleinerung beider Größen nichts. Es ist also durchaus gerechtfertigt, die Daten dieses Fluggeräts hier einzusetzen.

2.3.1. Kräfte

Im Folgenden werden die am Gleiter angreifenden Kräfte, sowie der durch die Luftreibung erzeugte Wärmestrom modelliert, wobei die Hauptarbeit in der Approximation der aerodynamischen Beiwerte liegt.

Die Gravitationskraft beträgt

$$F_G = m g(h)$$

und wirkt immer in Richtung des Marsmittelpunkts.

Die aerodynamischen Kräfte Auftrieb und Widerstand werden in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $v$, des Anstellwinkels $\alpha$ und der aerodynamisch wirksamen Fläche $S$ des Gleiters, sowie der Luftdichte $\varrho(h)$ und der Machzahl $Ma$ modelliert. Eine Abhängigkeit von der Reynoldszahl wurde nicht berücksichtigt, da zum Ersten ihr Einfluss bei hohen Geschwindigkeiten vernachlässigbar ist und zum Zweiten die vorliegenden Daten für die Beiwerte diese Abhängigkeit nicht berücksichtigen.

Der Einfluss von Machzahl, Anstellwinkel und Form des Gleiters auf Auftrieb und Widerstand wird in den aerodynamischen Beiwerten $C_L(Ma, \alpha)$ und $C_D(Ma, \alpha)$ zusammengefasst. Die
restlichen Größen gehen in die Kraft des Staudrucks auf die aerodynamisch wirksame Fläche ein:

\[ \frac{1}{2} \varrho(h) v^2 S \]

Damit erhält man für die entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirkende Widerstandskraft

\[ F_D = \frac{S}{2} \varrho(h) v^2 C_D(Ma, \alpha), \]

sowie für die senkrecht zur Bewegungsrichtung nach oben\(^9\) wirkende Auftriebskraft

\[ F_L = \frac{S}{2} \varrho(h) v^2 C_L(Ma, \alpha). \]

### 2.3.2. Aerodynamische Beiwerte

Für die aerodynamischen Beiwerte \( C_L \) (Auftrieb) und \( C_D \) (Widerstand) lagen Kennfelder in Abhängigkeit der Machzahl \( Ma \) und des Anstellwinkels \( \alpha \) vor [10, 31]. Die Abhängigkeit der Beiwerte von den Ruderausschlägen wurde dabei bereits in den Daten berücksichtigt. Nur der relevante Teil (2 \( \leq \) Ma \( \leq \) 50 und 30\(^\circ\) \( \leq \) \( \alpha \) \( \leq \) 55\(^\circ\)) der Daten wurde verwendet und durch biquadratische Tensorproduktsplines (Ordnung \( k_{Ma} = k_{\alpha} = 3 \)) approximiert.

Seien

\[ N(Ma) = \begin{pmatrix} N_1(Ma) \\ \vdots \\ N_{3+l_{Ma}}(Ma) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M(\alpha) = \begin{pmatrix} M_1(\alpha) \\ \vdots \\ M_{3+l_{\alpha}}(\alpha) \end{pmatrix} \]

die B-Spline-Basen der Ordnung 3 zu den Knotenvektoren \( \eta_{Ma} \) bzw. \( \eta_{\alpha} \). Dann lassen sich die Approximationen der aerodynamischen Beiwerte als

\[
C_L(Ma, \alpha) = N^T(Ma) \; L \; M(\alpha) = \sum_{i=1}^{3+l_{Ma}} \sum_{j=1}^{3+l_{\alpha}} l_{i,j} \cdot N_i(Ma) M_j(\alpha) \tag{2.6a}
\]

und

\[
C_D(Ma, \alpha) = N^T(Ma) \; D \; M(\alpha) = \sum_{i=1}^{3+l_{Ma}} \sum_{j=1}^{3+l_{\alpha}} d_{i,j} \cdot N_i(Ma) M_j(\alpha) \tag{2.6b}
\]

darstellen. Die Anzahl und Lage der inneren Knoten \( (l_{Ma} \text{ und } l_{\alpha}) \) beeinflusst dabei die Genauigkeit der Approximation, sowie die Differenzierbarkeitsordnung und die Größe der Koeffizientenmatrizen \( L, D \in \mathbb{R}^{(3+l_{Ma}) \times (3+l_{\alpha})} \).

Da die Gleichungen (2.6) linear in den Einträgen der jeweiligen Koeffizientenmatrizen sind, muss wieder ein lineares Ausgleichsproblem gelöst werden, um sie zu bestimmen.

Um die Ableitungen in \( Ma \) - und \( \alpha \)-Richtung zu berechnen, kann auch im bivariaten Fall Lemma 1.12 verwendet werden.

\(^9\)"Oben" im Sinne des Gleiters.
Für die aerodynamischen Beiwerte wurde – ebenso wie für die Schallgeschwindigkeit – ein Grob- und ein Feinmodell entwickelt.

In einer ersten groben Approximation wurden die Beiwerte ohne innere Knoten \((I_{\text{Ma}} = l_{\alpha} = 0)\) im Bereich \(Ma \in [2, 50]\) und \(\alpha \in [29^\circ, 56^\circ]\) mit den Koeffizientenmatrizen

\[
L = \begin{pmatrix}
0.4690 & 0.6949 & 0.7089 \\
0.1436 & 0.3124 & 0.3862 \\
0.6961 & 1.0383 & 0.9546
\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix}
0.3764 & 0.7282 & 0.9904 \\
0.1315 & 0.1618 & 0.9162 \\
0.6995 & 1.3919 & 1.3119
\end{pmatrix}
\]

approximiert.

Eine genauere Approximation wird durch Erweiterung des Knotenvektors \(\eta_{\text{Ma}}\) um einen doppelten inneren Knoten \((I_{\text{Ma}} = 2)\) bei \(Ma = 5\) auf \(\eta_{\text{Ma}} = (2 \ 2 \ 2 \ 5.5 \ 5.5 \ 50 \ 50 \ 50)^T\) erreicht. Die Koeffizienten dafür lauten

\[
L = \begin{pmatrix}
0.5335 & 0.7180 & 0.7796 \\
0.4280 & 0.5376 & 0.8879 \\
0.3864 & 0.6255 & 0.5922 \\
0.3610 & 0.5024 & 0.6562 \\
0.3269 & 0.7306 & 0.5236
\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix}
0.4466 & 0.7236 & 1.1279 \\
0.3030 & 0.6460 & 0.9902 \\
0.3263 & 0.5988 & 0.9773 \\
0.2739 & 0.5163 & 0.9481 \\
0.4809 & 0.8336 & 1.3135
\end{pmatrix}
\]

(siehe auch Abbildung 2.6). Diese verbesserte Approximation verringerte den mittleren relativen Fehler auf 1,00 % und den maximalen relativen Fehler auf 3,99 %.

Um die Endgeschwindigkeit noch weiter zu drosseln, wurde weiterhin das Ausfahren von Bremsklappen unterhalb einer Machzahl von 5 simuliert. Der dadurch erhöhte Luftwiderstand wird durch eine Verdoppelung des Widerstandsbeiwertes \(C_D\) modelliert.

### 2.3.3. Wärmestrom

Da die größte Wärmebelastung beim Eintritt in die Marsatmosphäre in der Umgebung des Staupunktes auftritt (vgl. Abbildung 2.7), wird für den Wärmestrom folgendes semi-empirische Staupunktmodell aus [26] übernommen, wobei \(\{r_N\} = \frac{r_N}{\text{km}}, \{v\} = \frac{v}{\text{km/s}}\) und \(\{\varrho\} = \frac{\varrho}{\text{kg/km}^3}\) die reinen Zahlenwerte der entsprechenden Größen sind:

\[
\dot{q}(v, \varrho) = \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \{v\}^{3.15} \sqrt{\{\varrho\}} \text{ MW m}^{-2}
\]


Differentiation nach den beiden Argumenten \(v\) und \(\varrho\) liefert

\[
\frac{\partial \dot{q}}{\partial v}(v, \varrho) = 3.15 \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \{v\}^{2.15} \sqrt{\{\varrho\}} \text{ MW m}^{-2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \varrho}(v, \varrho) = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{\{r_N\}}} \{v\}^{3.15} \sqrt{\{\varrho\}} \text{ MW m}^{-2} \quad \text{kg km}^{-3}
\]
2.3. Raumgleiter X-38/CRV

Abbildung 2.6.: Verfeinerte Approximation der aerodynamischen Beiwerte
Kapitel 2. Modellbildung

Abbildung 2.7.: Experimentelle Aufheizung eines X-38-Modells (Bildquelle: [24])

2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen


2.4.1. Koordinatensysteme


**Notation.** Im Folgenden wird das Koordinatensystem eines Vektors durch die Indizes „i“, „m“, „t“ bzw. „a“ angezeigt. Es ist zu beachten, dass nur Vektoren aus demselben Koordinatensystem miteinander verknüpft und verglichen werden dürfen. $^{\ast}T_y$ bezeichnet die Transformationsmatrix, mit der Koordinaten aus dem System „y“ multipliziert werden müssen, um sie in Koordinaten des Systems „x“ umzurechnen (siehe dazu auch [39]). $R_x$, $R_y$ und $R_z$ kennzeichnen die Rotationsmatrizen um die entsprechenden Koordinatenachsen.
2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen

**Inertialsystem**

Da die Bewegung des Gleiters nur in der Umgebung des Mars betrachtet wird, kann die Bewegung des Mars um die Sonne vernachlässigt und das Inertialsystem wie folgt gewählt werden:

**Inertialsystem i**

- x-Achse: in der Äquatorebene in Richtung der Tag- und Nachtgleiche
- y-Achse: so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht
- z-Achse: Rotationsachse des Mars (Richtung Nordpol)

**Marsfestes System**

Das marsfeste System rotiert gegenüber dem Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um die z-Achse:

**Marsfestes System m**

- x-Achse: in der Äquatorebene in Richtung des Nullmeridians
- y-Achse: so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht
- z-Achse: Rotationsachse des Mars (Richtung Nordpol)

Die Transformation von Koordinaten im marsfesten System in Koordinaten im Inertialsystem lautet

$$iT_m = R_z(\Omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ 

Außerdem kann die Rotation des marsfesten Systems um das Inertialsystem mit den Vektoren

$$\omega^{m/i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}_{m}$$

in Inertial- bzw. marsfesten Koordinaten angegeben werden.

**Tangentialsystem**

Das Tangentialsystem spiegelt die Position des Gleiters über der Marsoberfläche wieder: Seine x- und y-Achse liegen parallel zur Tangentialebene an die Marsoberfläche durch die senkrecht auf die Oberfläche projizierte Position des Gleiters, während die z-Achse senkrecht zu dieser Tangentialebene steht und in Richtung des Gleiters zeigt.

**Tangentialsystem t**

- x-Achse: parallel zur Tangentialebene Richtung Norden
- y-Achse: parallel zur Tangentialebene Richtung Westen
- z-Achse: senkrecht zur Tangentialebene in Richtung der Position des Gleiters

Die Transformation von Koordinaten im Tangentialsystem in Koordinaten im marsfesten System lautet

\[
^mT_t = R_x(\Theta)R_y(-\Lambda)R_y(-\frac{\pi}{2})R_x(\pi) = \begin{pmatrix} -\cos \Theta \sin \Lambda & \sin \Theta & \cos \Theta \cos \Lambda \\ -\sin \Theta \sin \Lambda & -\cos \Theta & \sin \Theta \cos \Lambda \\ \cos \Lambda & 0 & \sin \Lambda \end{pmatrix}.
\]

Die Rotation des Tangentialsystems um das marsfeste System kann in Tangentialkoordinaten mit dem Vektor

\[
\omega^{t/m} = \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \cos \Lambda \\ \dot{\Lambda} \\ \dot{\Theta} \sin \Lambda \end{pmatrix}_t
\]

angegeben werden.
2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen

Das aerodynamische System schließlich orientiert sich an der momentanen Bewegungsrichtung des Gleiters und erleichtert die Modellierung der äußeren Kräfte.

Aerodynamisches System

<table>
<thead>
<tr>
<th>Koordinate</th>
<th>Beschreibung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$x$-Achse</td>
<td>Bewegungsrichtung</td>
</tr>
<tr>
<td>$y$-Achse</td>
<td>so definiert, dass ein Rechtssystem entsteht</td>
</tr>
<tr>
<td>$z$-Achse</td>
<td>Auftriebsrichtung</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Die Transformation von Koordinaten im aerodynamischen System in Koordinaten im Tangentialsystem lautet

\[
^tT_a = R_z(-\chi)R_y(-\gamma)R_x(\mu)
\]

\[
= \begin{pmatrix}
\cos \chi \cos \gamma & \sin \chi \cos \mu - \cos \chi \sin \gamma \sin \mu & -\sin \chi \sin \mu - \cos \chi \sin \gamma \cos \mu \\
-\sin \chi \cos \gamma & \cos \chi \cos \mu + \sin \chi \sin \gamma \sin \mu & -\cos \chi \sin \mu + \sin \chi \sin \gamma \cos \mu \\
\sin \gamma & \cos \gamma \sin \mu & \cos \gamma \cos \mu
\end{pmatrix}.
\]
Kapitel 2. Modellbildung

2.4.2. Kinematik

Satz 2.1 (Zeitableitung in rotierenden Systemen)

Um die Zeitableitung einer Größe in einem rotierenden System auf ein feststehendes System umzurechnen, muss der Differentialoperator durch

\[ \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{fest}} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{rot}} + \omega \times \]  (2.7)

transformiert werden, wobei \( \omega \) die vektorielle Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Systems „rot“ im System „fest“ ist (siehe z.B. [12] oder [17]).

Die Differentialgleichungen für die Position des Gleiters werden ausgehend von der vektoriellen Identität

\[ \left( \frac{d}{dt} \right)_{\text{m}} r = v \]  (2.8)

hergeleitet. Es ist grundsätzlich egal, in welchem System diese Gleichung ausgewertet wird, allerdings ist die Auflösung nach den gesuchten Variablen im Tangentialsystem am Einfachsten.

Es ist aber zu beachten, dass die Ableitung auf der linken Seite von (2.8) die Zeitableitung in marsfesten Koordinaten ist, da die Geschwindigkeit im marsfesten System betrachtet werden soll. Satz 2.1 vereinfacht dabei den Rechenweg erheblich, weil er es erlaubt, den Positionsvektor
2.4. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichungen

im einfachen Tangentialsystem nach der Zeit zu differenzieren, anstatt ihn zuerst in das marsfeste System umzurechnen, zu differenzieren und anschließend wieder ins Tangentialsystem zurück zu transformieren.

Die linke Seite von (2.8) wird unter Verwendung von Satz 2.1 zu

\[
\begin{align*}
\left( \frac{d}{dt} \right)_m r &= \left( \frac{d}{dt} \right)_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0 + h \end{pmatrix} = \left( \left( \frac{d}{dt} \right)_t + \omega^{t/m} \times \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_0 + h \end{pmatrix}_t \\
&= \left( \begin{pmatrix} R_0 + h \end{pmatrix} \hat{A} \\ -(R_0 + h) \hat{\Theta} \cos A \end{pmatrix}_t
\end{align*}
\]

und die rechte Seite entspricht

\[
\begin{align*}
v &= \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v \cos \chi \cos \gamma \\ -v \sin \chi \cos \gamma \\ v \sin \gamma \end{pmatrix}_t.
\end{align*}
\]

Durch Koordinatenvergleich erhält man schließlich die Differentialgleichungen für \( \Theta, \Lambda \) und \( h \):

\[
\begin{align*}
\dot{\Theta} &= \frac{v \cos \gamma \sin \chi}{R_0 + h \cos A} \\
\dot{A} &= \frac{v \cos \gamma \cos \chi}{R_0 + h} \\
\dot{h} &= v \sin \gamma 
\end{align*}
\]

2.4.3. Dynamik

Die Dynamik des Gleiters wird mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes

\[
\frac{F}{m} = \ddot{r}
\]

hergeleitet. Da dieses Gesetz nur in Inertialsystemen gilt, beziehen sich die darin enthaltenen Differentialoperatoren auf das Inertialsystem „i“. Mit Hilfe von Satz 2.1 können diese Differentialoperatoren jedoch wieder transformiert werden:

\[
\begin{align*}
\left( \frac{d^2}{dt^2} \right)_i r &= \left( \frac{d}{dt} \right)_i \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)_m r + \omega^{m/i} \times r \right]^{(2.8)} = \left( \frac{d}{dt} \right)_i \left( v + \omega^{m/i} \times r \right) \\
&= \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)_m + \omega^{m/i} \times \right] \left( v + \omega^{m/i} \times r \right) \\
&= \left( \frac{d}{dt} \right)_m v + \left( \frac{d}{dt} \right)_m \left( \omega^{m/i} \times r \right) + \omega^{m/i} \times v + \omega^{m/i} \times \left( \omega^{m/i} \times r \right) \\
&= \left( \omega^{m/i} \times v \right) + \omega^{t/m} \times v + \omega^{m/i} \times \left( \omega^{m/i} \times r \right)
\end{align*}
\]

Dabei entspricht \(2\omega^{m/i} \times v\) der negativen Coriolisbeschleunigung und \(\omega^{m/i} \times (\omega^{m/i} \times r)\) der Zentrifugalbeschleunigung.
Kapitel 2. Modellbildung

Mit \( v \) aus (2.9) und

\[
\omega^{m/i} = \left( \begin{array}{c} \Omega \cos A \\ 0 \\ \Omega \sin A \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{array} \right) \quad \text{und}\quad \omega^{\text{t/m}} = \left( \begin{array}{c} \dot{\Theta} \cos A \\ \dot{\Lambda} \\ \dot{\Theta} \sin A \end{array} \right)
\]

ergibt sich für die rechte Seite von (2.11)

\[
\left( \frac{d^2}{dt^2} \right) r = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \chi & -v \sin \gamma \cos \chi & -v \cos \gamma \sin \chi \\ -\cos \gamma \sin \chi & v \sin \gamma \sin \chi & -v \cos \gamma \cos \chi \\ \sin \gamma & v \cos \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\chi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \gamma \cos \chi + \tan \Lambda \cos \gamma \sin^2 \chi \\ \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi \cos \chi - \sin \gamma \sin \chi \\ -\cos \gamma \end{pmatrix}
\]

Für die linke Seite von (2.11) werden die Beschleunigungen durch Gravitation, Auftrieb und Widerstand wie folgt modelliert:

\[
\frac{F}{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(h) \end{pmatrix} + \frac{S}{2m} \rho(h) v^2 \begin{pmatrix} -C_D(Ma, \alpha) \\ 0 \\ C_L(Ma, \alpha) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{F_L}{m}
\]
Nach Berechnung der Zwischenergebnisse

\[
\begin{align*}
M^{-1}a_t &= -\frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan \Lambda \sin \chi \end{pmatrix} \\
M^{-1}a_c &= -2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \Lambda \sin \chi \\ \sin \Lambda - \cos \Lambda \tan \gamma \cos \chi \end{pmatrix} \\
M^{-1}a_z &= -\Omega^2(R_0 + h) \cos \Lambda \left( \frac{1}{v} \left( \sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma \right) \right) \\
M^{-1}a_g &= g(h) \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \frac{-\cos \gamma}{v} \\ 0 \end{pmatrix} \\
M^{-1}a_a &= \frac{S}{2m} \varrho(h) v \begin{pmatrix} -vC_D(Ma, \alpha) \\ \sin \mu \cos \gamma C_L(Ma, \alpha) \end{pmatrix} \\
\end{align*}
\]

folgen die Differentialgleichungen für die Gleiter-Dynamik

\[
\begin{align*}
\dot{v} &= \Omega^2(R_0 + h) \cos \Lambda (\cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi) - g(h) \sin \gamma - \frac{S}{2m} \varrho(h) v^2 C_D(Ma, \alpha) \\
\dot{\gamma} &= \frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} + 2\Omega \cos \Lambda \sin \chi + \frac{\Omega^2(R_0 + h)}{v} \cos \Lambda (\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \\
&\quad - g(h) \frac{\cos \gamma}{v} + \frac{S}{2m} \varrho(h) v \cos \mu C_L(Ma, \alpha) \\
\dot{\chi} &= \frac{v \cos \gamma}{R_0 + h} \tan \Lambda \sin \chi + 2\Omega (\sin \Lambda - \cos \Lambda \tan \gamma \cos \chi) \\
&\quad + \frac{\Omega^2(R_0 + h)}{v \cos \gamma} \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi + \frac{S}{2m} \varrho(h) v \sin \mu \cos \gamma C_L(Ma, \alpha).
\end{align*}
\]
2.4.4. Zusammenfassung der Bewegungsdifferentialgleichungen

Zusammenfassend erhält man aus den beiden vorigen Abschnitten die sechs Bewegungsdifferentialgleichungen

\[
\begin{align*}
\dot{\Theta} &= \frac{v}{R_0 + h} \cos \gamma \sin \chi \\ 
\dot{A} &= \frac{v}{R_0 + h} \cos \gamma \cos \chi \\ 
\dot{h} &= v \sin \gamma \\ 
\dot{v} &= -\frac{S}{2m} \rho(h) v^2 C_D(Ma, \alpha) - g(h) \sin \gamma \\
&\quad + \Omega^2 (R_0 + h) \cos A (\cos A \sin \gamma - \sin A \cos \gamma \cos \chi) \\ 
\dot{\gamma} &= \cos \mu \frac{S}{2m} \rho(h) v C_L(Ma, \alpha) - \left( \frac{g(h)}{v} - \frac{v}{R_0 + h} \right) \cos \gamma \\
&\quad + 2\Omega \cos A \sin \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \cos A (\sin A \sin \gamma \cos \chi + \cos A \cos \gamma) \\ 
\dot{\chi} &= \sin \mu \frac{S}{\cos \gamma 2m} \rho(h) v C_L(Ma, \alpha) + \frac{v}{R_0 + h} \tan A \cos \gamma \sin \chi \\
&\quad + 2\Omega \sin A - \cos A \tan \gamma \cos \chi + \frac{\Omega^2 (R_0 + h) \sin A \cos A \sin \chi}{v} \cos \gamma.
\end{align*}
\]
Kapitel 3

Optimalsteuerungsproblem

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Optimalsteuerungstheorie aus Abschnitt 1.2 auf das hier vorliegende Problem der optimalen Steuerung eines Gleiters beim Eintritt in die Marsatmosphäre angewandt.

3.1. Problemstellung

3.1.1. Zielfunktional

Da die Aufheizung des Gleiters beim Eintritt in die Atmosphäre den Aufwand zur Isolierung bestimmt, ist die während der gesamten Flugzeit vom Gleiter aufgenommene Wärme $q(t_f)$ zu minimieren. Bei fester Anfangszeit $t_0 = 0$ und freier Endzeit $t_f$ lässt sie sich durch

$$q(t_f, x) = \int_0^{t_f} \dot{q}(v, \varrho) \, dt, \quad q(0) = 0$$

ausdrücken. Somit ergibt sich als Zielfunktional

$$I(t_f, x) = g + \int_0^{t_f} L(x) \, dt$$

mit

$$g = 0 \quad \text{und} \quad L(x) = \dot{q}(v, \varrho).$$

3.1.2. Nebenbedingungen

Die Bewegungsdifferentialgleichungen (2.12) sind Nebenbedingungen im Sinne der Optimalsteuerungsaufgabe und seien zu

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, u)$$

zusammengefasst.

Außerdem treten im untersuchten Problem noch drei verschiedene Typen von Punktbedingungen im Inneren des Intervalls $[t_0, t_f]$ auf. Sie entstehen im Verlauf der Homotopie-Kette einerseits durch nichtglatte Approximationen von Schallgeschwindigkeit und aerodynamischen Beiwerten, andererseits durch die unten beschriebene, punktweise Festlegung der Flughöhe. Im Folgenden
Kapitel 3. Optimalsteuerungsproblem

wird für alle drei Typen jeweils nur ein exemplarischer Punkt \( t_{S_a}, t_{S_b}, t_{S_c} \in (t_0, t_f) \) betrachtet. Die Erweiterung auf mehrere solche inneren Punkte ist trivial.

Immer wenn die Trajektorie einen Punkt niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung der Modellgleichungen durchläuft, muss ein Mehrzielknoten eingefügt werden. Einerseits benötigen Schrittweitensteuerungen der numerischen Integratoren eine hohe Differenzierbarkeitsordnung, da sie die rechte Seite des gegebenen Differentialgleichungssystems nur an endlich vielen Zwischenpunkten auswerten, um damit die Ableitung approximieren. Deshalb muss zumindest ein Stützpunkt eingefügt werden, der einen Neustart des Integrators veranlasst. Andererseits führen Unstetigkeiten der rechten Seite im Allgemeinen zu Sprüngen in den adjungierten Variablen, die als innere Punktbedingungen berücksichtigt werden müssen und den Stützpunkt damit zum Schaltpunkt machen. Die beiden verfeinerten Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte führen zu Mehrzielknoten, die durch die Bedingungen

\[
\begin{align*}
  h_{S_a} &= h_{\text{fest}} \\
  \text{Ma}(v_{S_b}, h_{S_b}) &= \text{Ma}_{\text{fest}}
\end{align*}
\]

bzw.

festgelegt sind. Dabei stehen \( h_{\text{fest}} \) und \( \text{Ma}_{\text{fest}} \) für Elemente der Knotenvektoren \( \eta_h \) bzw. \( \eta_{\text{Ma}} \).

**Bemerkung.** Die Zuschaltung einer Bremsklappe bei einer Geschwindigkeit von \( \text{Ma} = 5 \) kann ebenfalls als Unstetigkeit des Widerstandsbeiwertes an dieser Stelle aufgefasst werden, so dass dieser Fall nicht gesondert betrachtet wird.

Neben diesen beiden Typen von inneren Punktbedingungen existiert auch noch ein dritter. Er entsteht durch die punktweise Festlegung der minimalen Flughöhe des Gleiters beim ersten Eintritt in die untere Marsatmosphäre. Da die minimale Höhe an dem durch

\[
\dot{h} = v \sin \gamma = 0 \quad v \neq 0 \quad \iff \quad \sin \gamma = 0 \quad \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \gamma = 0
\]

definierten Punkt angenommen wird, werden dort die beiden Bedingungen

\[
\begin{align*}
  \gamma_{S_c} &= 0 \quad \text{und} \quad h_{S_c} &= h_{\text{fest}}
\end{align*}
\]

gefordert. Durch Vergrößern von \( h_{\text{fest}} \) kann damit die minimale Höhe heraufgesetzt werden.

### 3.1.3. Steuerbeschränkungen

Zur Steuerung des Gleiters stehen der Anstellwinkel \( \alpha \) und der Querneigungswinkel \( \mu \) zur Verfügung.

Der Anstellwinkel legt im Wesentlichen den Staupunkt (und damit den Punkt des maximalen Wärmeflusses auf der Oberfläche des Gleiters) fest. Daher erscheint es sinnvoll, \( \alpha \) auf einen sehr engen Bereich zu beschränken, damit die besonders stark zu isolierende Fläche möglichst
klein gehalten werden kann. Um den Anstellwinkel $\alpha$ auf das kompakte Intervall $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ zu beschränken, wird die Transformation

$$\alpha(\varphi) = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \sin^2 \varphi$$

auf die unbeschränkte Steuervariable $\varphi \in \mathbb{R}$ durchgeführt. Ebenso wird der Querneigungswinkel $\mu$ durch

$$\mu(\psi) = \mu_{\min} + (\mu_{\max} - \mu_{\min}) \sin^2 \psi$$

auf $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ beschränkt, um zu starke Rollbewegungen zu vermeiden.

Durch Optimierung der neuen Steuervariablen $\varphi$ und $\psi$ werden die Beschränkungen für $\alpha$ und $\mu$ implizit eingehalten und die Einführung von zusätzlichen Steuerbeschränkungen vermieden.

### 3.2. Ankopplung der Nebenbedingungen

Zunächst werden – wie in Abschnitt 1.2.2 beschrieben – die Differentialgleichungsnebenbedingungen an das Zielfunktional angekoppelt. Man erhält dann als Integranden des erweiterten Zielfunktionals

$$F(x, u, \lambda) = L(x) + \lambda^T (\tilde{f}(x, u) - \dot{x}).$$

Da aber das Zielfunktional somit nichtglatte Modellfunktionen enthalten kann, müssen Punkte niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung – wie oben erwähnt – gesondert berücksichtigt werden. Zusammen mit der Punktbedingung für die Festlegung der minimalen Höhe folgt nach Ankopplung an das Zielfunktional

$$\tilde{g}(x_{S_a}, x_{S_h}, x_{S_s}, \lambda_{S_a}, \lambda_{S_h}, \lambda_{S_s}, \lambda_{S_c}, \lambda_{S_{c1}}, \lambda_{S_{c2}}) = \lambda_{S_a}(h_{S_a} - h_{\text{fest}}) + \lambda_{S_h}(M_a(v_{S_h} - h_{S_h}) - M_{a\text{fest}}) + \lambda_{S_{c1}}(\gamma_{S_c} - \lambda_{S_{c2}}(h_{S_c} - h_{\text{fest}}).$$

(3.1)

**Bemerkung.** Da die Stetigkeit der Zustände an allen inneren Punkten gefordert wird, ist es unerheblich, ob in der Ankopplung (3.1) die links- oder rechtsseitigen Grenzwerte der Zustandsvariablen verwendet werden.

Für die Hamiltonfunktion gilt nach Definition 1.3

$$H(x, u, \lambda) = \dot{q}(x) + \lambda_0 \dot{\Theta}(x) + \lambda_1 \dot{A}(x) + \lambda_\mu \dot{h}(x) + \lambda_v \dot{v}(x, u) + \lambda_\gamma \dot{\gamma}(x, u) + \lambda_\chi \dot{\chi}(x, u).$$

(3.2)

Da sowohl die angekoppelten Punktbedingungen (3.1) als auch die Hamiltonfunktion (3.2) autonom sind, kann laut Folgerung 1.7 der Test auf $H \equiv 0$ durchgeführt werden.

### 3.3. Innere Punktbedingungen

Die aus (3.1) und der allgemeinen Variation (1.5b) und (1.5e) folgenden Sprungbedingungen werden nun jeweils für einen exemplarischen Punkt hergeleitet.
Kapitel 3. Optimalsteuerungsproblem

3.3.1. Nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit

Stellen, an denen das verfeinerte Modell für die Schallgeschwindigkeit \(a(h)\) eine niedrigere Differenzierbarkeit hat, sind durch Bedingungen der Form

\[ h(t_{S_a}) = h_{\text{fest}} \]  

festgelegt. Koppelt man diese Punktbedingung, wie in (3.1) gezeigt, mit einem Lagrangeparameter \(\lambda_{S_a} \in \mathbb{R}\) an das Zielfunktional an und fordert zusätzlich

\[ x(t_{S_a}^+) = x(t_{S_a}^-), \]  

also die Stetigkeit aller Zustände an dieser Sprungstelle, so erhält man aus (1.5b)

\[ H(t_{S_a}^+) = H(t_{S_a}^-) \]  

und aus (1.5e)

\[ \lambda_{\theta}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\theta}(t_{S_a}^-) \]  
\[ \lambda_{A}(t_{S_a}^+) = \lambda_{A}(t_{S_a}^-) \]  
\[ \lambda_{h}(t_{S_a}^+) = \lambda_{h}(t_{S_a}^-) - \lambda_{S_a} \]  
\[ \lambda_{\omega}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\omega}(t_{S_a}^-) \]  
\[ \lambda_{\gamma}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\gamma}(t_{S_a}^-) \]  
\[ \lambda_{\chi}(t_{S_a}^+) = \lambda_{\chi}(t_{S_a}^-) \].

**Bemerkung.** Die Stetigkeit der Zustände wurde hier direkt durch \(\delta x_{S_a}^+ = \delta x_{S_a}^-\) berücksichtigt. Das gleiche Ergebnis erhält man bei unabhängiger Variation der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von \(x_{S_a}\) durch Ankoppeln der Stetigkeitsbedingung (3.3b), wenn man die Ankopplungsparameter anschließend wieder aus den resultierenden Gleichungen eliminiert.

Insgesamt erhält man so also die 14 Bedingungen (3.3) für die 12 Differentialgleichungsvariablen, den Sprungparameter \(\lambda_{S_a}\) und zur Festlegung des Schaltpunktes \(t_{S_a}\). Da der Sprungparameter \(\lambda_{S_a}\) aber nur einmal auftritt, muss er nicht bestimmt werden und man kann durch Weglassen der Bedingung (3.3f) einen freien Sprung in \(\lambda_{h}\) zulassen, so dass man nur noch 13 Bedingungen zur Festlegung von ebenso vielen Variablen hat.

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen, dass \(\tilde{f}\) stetig ist, sowie \(h(t_S) \neq 0\) gilt, lässt sich aus (3.3c–3.3e) und (3.3g–3.3i) auch die Stetigkeit von \(\lambda_{h}\) folgen. Diese zusätzlichen Voraussetzungen werden im vorliegenden Fall jedoch bei \(h = 141\) km verletzt, weil dort die Schallgeschwindigkeit unstetig approximiert wurde, was zu einer unstetigen rechten Seite \(\tilde{f}\) führt. Selbst bei \(h = 85\) km kann wegen der Umrechnung der unstetigen B-Spline-Darstellung in stückweise Polynome (die durch die Rundung der Polynomkoeffizienten nicht mehr stetig sind) nicht von stetigem \(\tilde{f}\) ausgegangen werden.
3.3.2. Nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte

Analog können auch die Übergangsbedingungen für Stellen niedrigerer Differenzierbarkeit des verfeinerten Modells der aerodynamischen Beiwerte hergeleitet werden. Hier sind die Schaltpunkte durch

\[ M_a \left( v(t_{S_h}), h(t_{S_h}) \right) = M_{\text{fest}} \] (3.4a)

festgelegt. Nach der Ankopplung mit \( \lambda_{S_h} \) in (3.1) und der Stetigkeitsforderung

\[ x(t_{S_h}^+) = x(t_{S_h}^-) \] (3.4b)

erhält man hier

\[ H(t_{S_h}^+) = H(t_{S_h}^-) \] (3.4c)

sowie

\[ \lambda_{\Theta}(t_{S_h}^+) = \lambda_{\Theta}(t_{S_h}^-) \] (3.4d)

\[ \lambda_{\Lambda}(t_{S_h}^+) = \lambda_{\Lambda}(t_{S_h}^-) \] (3.4e)

\[ \lambda_h(t_{S_h}^+) = \lambda_h(t_{S_h}^-) + \lambda_{S_h} \left[ \frac{v a'(h)}{a(h)} \right] t_{S_h} \] (3.4f)

\[ \lambda_v(t_{S_h}^+) = \lambda_v(t_{S_h}^-) - \lambda_{S_h} \left[ \frac{1}{a(h)} \right] t_{S_h} \] (3.4g)

\[ \lambda_{\gamma}(t_{S_h}^+) = \lambda_{\gamma}(t_{S_h}^-) \] (3.4h)

\[ \lambda_{\chi}(t_{S_h}^+) = \lambda_{\chi}(t_{S_h}^-) \] (3.4i)

Elimination von \( \lambda_{S_h} \) aus den beiden Sprungbedingungen (3.4f) und (3.4g) liefert die neue Bedingung

\[ \lambda_h(t_{S_h}^+) - \lambda_h(t_{S_h}^-) + \left[ \frac{v a'(h)}{a(h)} \right] t_{S_h} \left( \lambda_v(t_{S_h}^+) - \lambda_v(t_{S_h}^-) \right) = 0. \] (3.4j)

Ersetzt man die beiden verwendeten Gleichungen durch diese neue Verknüpfung der Sprünge in \( \lambda_h \) und \( \lambda_v \) und verzichtet auf die Bestimmung des eliminierten Parameters \( \lambda_{S_h} \), so erhält man auch hier wieder 13 Bedingungen für die 12 Differentialgleichungsvariablen und zur Festlegung des Schaltpunktes.

Für eine stetige rechte Seite \( \tilde{f} \) ließe sich (unter im Allgemeinen erfüllten Zusatzvoraussetzungen wie z.B. \( \dot{h} \neq 0 \), sowie \( \frac{\dot{v}}{\dot{h}} \neq \left[ \frac{v a'(h)}{a(h)} \right] t_{S_h}^- \)) wiederum zeigen, dass \( \lambda_h \) und \( \lambda_v \) stetig sind.

3.3.3. Punktweise Beschränkung der Höhe

Schließlich werden noch die Übergangsbedingungen für eine Festlegung der minimalen Höhe durch die beiden Gleichungen

\[ \gamma(t_{S_c}) = 0 \] (3.5a)

und

\[ h(t_{S_c}) = h_{\text{fest}} \] (3.5b)
hergeleitet. Nach der Ankopplung mit \( \lambda_{S,1} \) und \( \lambda_{S,2} \) in (3.1) und der Stetigkeitsforderung
\[
x(t_{S_+}) = x(t_{S_-}) \quad (3.5c)
\]
erhält man hier
\[
H(t_{S_+}) = H(t_{S_-}) \quad (3.5d)
\]
sowie
\[
\lambda_{\Theta}(t_{S_+}) = \lambda_{\Theta}(t_{S_-}) \quad (3.5e)
\]
\[
\lambda_{A}(t_{S_+}) = \lambda_{A}(t_{S_-}) \quad (3.5f)
\]
\[
\lambda_{h}(t_{S_+}) = \lambda_{h}(t_{S_-}) - \lambda_{S,2} \quad (3.5g)
\]
\[
\lambda_{v}(t_{S_+}) = \lambda_{v}(t_{S_-}) \quad (3.5h)
\]
\[
\lambda_{\gamma}(t_{S_+}) = \lambda_{\gamma}(t_{S_-}) - \lambda_{S,1} \quad (3.5i)
\]
\[
\lambda_{\chi}(t_{S_+}) = \lambda_{\chi}(t_{S_-}) \quad (3.5j)
\]

Die beiden Lagrange-Parameter \( \lambda_{S,1} \) und \( \lambda_{S,2} \) tauchen je einmal auf, so dass durch Weglassen von (3.5g) und (3.5i) wieder die benötigten 13 Bedingungen zur Verfügung stehen.

Bei dieser dritten Punktbedingung ist zu beachten, dass aus der Stetigkeit der rechten Seite im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der beiden Adjungierten \( \lambda_{h} \) und \( \lambda_{\gamma} \) folgt. Aus der Stetigkeit der Hamiltonfunktion und den Übergangsbedingungen für die adjungierten Variablen folgt hier
\[
\left( \lambda_{h}(t_{S_+}) - \lambda_{h}(t_{S_-}) \right) \dot{h}(t_{S_+}) + \left( \lambda_{\gamma}(t_{S_+}) - \lambda_{\gamma}(t_{S_-}) \right) \dot{\gamma}(t_{S_+}) = 0.
\]
Da aber
\[
\dot{h}(t_{S_+}) = v \sin \gamma(t_{S_+}) \quad (3.5a) \quad 0
\]
gilt, ist der Sprung in \( \lambda_{h} \) völlig frei, während \( \lambda_{\gamma} \) für \( \dot{\gamma}(t_{S_+}) \neq 0 \) stetig sein muss.

### 3.4. Adjungierte Differentialgleichungen

Die Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen werden durch Anwendung von (1.7) auf (3.2) hergeleitet:
\[
\dot{\lambda}_{\Theta} = 0 \quad (3.6a)
\]
\[
\dot{\lambda}_{A} = -\lambda_{\Theta} \frac{v}{R_0 + h} \tan A \cos \gamma \sin \chi \\
+ \lambda_{v} \Omega^2(R_0 + h) \left[ 2 \sin A \cos A \sin \gamma + (1 - 2 \sin^2 A) \cos \gamma \cos \chi \right] \\
+ \lambda_{\gamma} \left\{ 2 \Omega \sin A \sin \chi + \frac{\Omega^2(R_0 + h)}{v} \left[ 2 \sin A \cos A \cos \gamma - (1 - 2 \sin^2 A) \sin \gamma \cos \chi \right] \right\} \\
- \lambda_{\chi} \left[ \frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \sin \chi}{\cos^2 A} + 2 \Omega (\cos A + \sin A \tan \gamma \cos \chi) \\
+ \frac{\Omega^2(R_0 + h)}{v} (1 - 2 \sin^2 A) \sin \chi \right] \quad (3.6b)
\]
3.4. Adjungierte Differentialgleichungen

\[
\dot{\lambda}_h = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial \varrho}(v, \varrho)\varrho'(h)
+ \lambda \Theta \frac{v}{(R_0 + h)^2} \cos \gamma \sin \chi \cos \Lambda
+ \lambda \Lambda \frac{v}{(R_0 + h)^2} \cos \gamma \cos \chi
+ \lambda_v \left[ \frac{S}{2m} v^2 \left( \varrho'(h)C_D(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_D(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right) + \varrho'(h) \sin \gamma \right.
- \Omega^2 \cos \Lambda(\cos \Lambda \sin \gamma - \sin \Lambda \cos \gamma \cos \chi) \right]
- \lambda \gamma \left[ \cos \mu \frac{S}{2m} v \left( \varrho'(h)C_L(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_L(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right)
- \left( \frac{\varrho'(h)}{v} + \frac{v}{(R_0 + h)^2} \right) \cos \gamma + \frac{\Omega^2}{v} \cos \Lambda(\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \right]
- \lambda \chi \left[ \sin \mu \frac{S}{2m} v \left( \varrho'(h)C_L(Ma, \alpha) - \varrho(h) \frac{\partial C_L(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{va'(h)}{a^2(h)} \right)
- \frac{v}{(R_0 + h)^2} \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi + \frac{\Omega^2}{v} \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi \right]
\]

(3.6c)

\[
\dot{\lambda}_v = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial v}(v, \varrho)
- \lambda \Theta \frac{1}{R_0 + h} \cos \gamma \sin \chi \cos \Lambda
- \lambda \Lambda \frac{1}{R_0 + h} \cos \gamma \cos \chi
- \lambda \varrho \sin \gamma
+ \lambda_v \frac{S}{2m} \varrho(h) v \left( 2C_D(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_D(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{1}{a(h)} \right)
- \lambda \gamma \left[ \cos \mu \frac{S}{2m} \varrho(h) \left( C_L(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_L(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{1}{a(h)} \right)
+ \left( \frac{\varrho(h)}{v^2} + \frac{1}{R_0 + h} \right) \cos \gamma - \frac{\Omega^2}{v} \frac{(R_0 + h)}{v^2} \cos \Lambda(\sin \Lambda \sin \gamma \cos \chi + \cos \Lambda \cos \gamma) \right]
- \lambda \chi \left[ \sin \mu \frac{S}{2m} \varrho(h) \left( C_L(Ma, \alpha) + v \frac{\partial C_L(Ma, \alpha)}{\partial Ma} \frac{1}{a(h)} \right)
+ \frac{1}{R_0 + h} \tan \Lambda \cos \gamma \sin \chi - \frac{\Omega^2}{v} \frac{(R_0 + h)}{v^2} \cos \Lambda \sin \Lambda \sin \chi \right] \right]
\]

(3.6d)
Kapitel 3. Optimalsteuerungsproblem

\[ \dot{\lambda}_\gamma = \lambda_0 \frac{v}{R_0 + h} \frac{\sin \gamma \sin \chi}{\cos \Lambda} \]
\[ \dot{\lambda}_\chi = -\lambda_0 \frac{v}{R_0 + h} \frac{\cos \gamma \cos \chi}{\cos \Lambda} \]
\[ + \lambda_A \frac{v}{R_0 + h} \frac{\sin \gamma \cos \chi}{\cos \Lambda} \]
\[ - \lambda_\gamma \left( 2 \frac{\Omega \cos \Lambda \cos \gamma}{v} \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \sin \Lambda \cos \Lambda \sin \gamma \sin \chi \right) \]
\[ - \lambda_\chi \left( \frac{v}{R_0 + h} \tan \Lambda \cos \gamma \cos \chi + 2 \frac{\Omega \cos \Lambda \cos \gamma}{\cos \chi} \frac{\Omega^2 (R_0 + h)}{v} \sin \Lambda \cos \Lambda \cos \gamma \right) \]

(3.6e)

\[ (3.6f) \]

3.5. Optimale Steuerung

Bemerkung (zu den Annahmen in diesem Abschnitt). \( S, m \) und \( \varrho(h) \) sind per definitionem größer als Null. Zusätzlich wird von einer stets positiven Bahngeschwindigkeit \( v \), sowie von einem stets positivem Auftiebskoeffizienten \( C_L(Ma, \alpha) \) ausgegangen. Letztere Annahme ist für den in dieser Arbeit betrachteten Anstellwinkelbereich zutreffend. Würden hingegen auch Fluglagen mit Anstellwinkeln nahe oder unter \( 0^\circ \) zugelassen, so müsste diese Annahme verworfen werden. Zu guter Letzt wird davon ausgegangen, dass sowohl \( \alpha_{\text{max}} > \alpha_{\text{min}} \) als auch \( \mu_{\text{max}} > \mu_{\text{min}} \) gilt.

Notation. In den Diagrammen zu den Schaltfunktionen und Legendre-Clebsch-Bedingungen wird jeweils die durch \( \frac{S}{m \varrho v} \) geteilte Hamiltonfunktion verwendet. Sie wird mit \( \tilde{H} \) bezeichnet. Das führt zu einem wesentlich besser skalierten Wertebereich und erleichtert damit die Festlegung der Steuerstruktur (v.a. in großer Höhe, wo die Dichte nahezu Null ist).

Die Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung folgen aus der Anwendung von (1.6) und (1.8) auf die transformierten Steuergrößen \( \varphi \) und \( \psi \) und lauten

\[ H_\varphi = H_\alpha \alpha_\varphi = 0 \] (3.7)

und

\[ H_\psi = H_\mu \mu_\psi = 0, \] (3.8)
Satz 3.1
Unter den zu Beginn dieses Abschnitts getroffenen Annahmen ist die Legendre-Clebsch-Bedingung (3.9) hier äquivalent zu den beiden Bedingungen

\[ H_{\varphi\varphi} \geq 0 \] (3.10a)

\[ H_{\psi\psi} \geq 0. \] (3.10b)

Beweis. Betrachte zunächst Optimalitätsbedingung (3.8)

\[ H_{\psi} = \frac{S}{2m} q v C_L(Ma, \alpha) \left( -\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \mu_\psi = 0, \]

die wegen \( \frac{S}{2m} q v C_L(Ma, \alpha) \neq 0 \)

\[ \left( -\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \mu_\psi = 0 \] (3.11)
erzwungen. Dieser Term taucht auch in den gemischten partiellen Ableitungen

\[ H_{\varphi\psi} = H_{\psi\varphi} = \frac{S}{2m} q v \delta C_L(Ma, \alpha) \left( -\lambda_\gamma \sin \mu + \lambda_\chi \frac{\cos \mu}{\cos \gamma} \right) \alpha_\varphi \mu_\psi = 0 \] (3.11)
auf, so dass diese ebenfalls verschwinden. Die positive Semidefinitheit der Matrix

\[ \begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} & H_{\varphi\psi} \\ H_{\psi\varphi} & H_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & H_{\psi\psi} \end{pmatrix} \]

ist äquivalent zur Nichtnegativität ihrer beiden Eigenwerte, die nun direkt als \( H_{\varphi\varphi} \) und \( H_{\psi\psi} \) ablesbar sind. Damit folgt die Behauptung.

3.5.1. Anstellwinkel \( \alpha \)

Um die Optimalitätsbedingung (3.7) zu erfüllen, muss zumindest einer der beiden Terme \( H_\alpha \) oder \( \alpha_\varphi \) verschwinden. Der erste Fall entspricht einem freien Teilstück, während der zweite Fall zu einem Randstück von \( \alpha \) führt (was aber kein Randstück der transformierten Steuerung \( \varphi \) ist).

Freies Teilstück

Sei

\[ \alpha_\varphi \neq 0, \] (3.12)
dann liefert die Auswertung der Bedingung

\[ H_\alpha = 0 \] (3.13)
und Division durch $\frac{S}{2m}qv$ die Gleichung

$$\tilde{H}_\alpha = -\lambda _v v \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} + \left( \lambda _\gamma \cos \mu + \lambda _\chi \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \right) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 0$$  \hspace{1cm} (3.14)

zur Bestimmung von $\alpha$. Sie ist nichtlinear in $\alpha$ und enthält außerdem auch die zweite Steuergröße $\mu$. Da die Bestimmungsgleichung für $\mu$ (3.20) aber nicht von $\alpha$ abhängt, kann nach expliziter Berechnung von $\mu$ ein eindimensionales Newton-Verfahren für $\alpha$ verwendet werden.

Die umgeformte Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10a)

$$H_{\varphi \varphi} = H_{\alpha \alpha} \alpha _\varphi ^2 + H_{\alpha} \alpha _\varphi \overset{(3.13)}{=} H_{\alpha \alpha} \alpha _\varphi ^2 \geq 0 \quad \overset{(3.12)}{\Leftrightarrow} \quad H_{\alpha \alpha} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{H}_{\alpha \alpha} = -\lambda _v v \frac{\partial ^2 C_D}{\partial \alpha^2} + \left( \lambda _\gamma \cos \mu + \lambda _\chi \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \right) \frac{\partial ^2 C_L}{\partial \alpha^2} \geq 0$$  \hspace{1cm} (3.15)

muss a posteriori überprüft werden.

**Randstück**

Die Bedingung

$$\alpha _\varphi = 0$$  \hspace{1cm} (3.16)

liefert

$$(\alpha _{\text{max}} - \alpha _{\text{min}}) \sin 2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$  \hspace{1cm} (3.17)

also

$$\alpha = \alpha _{\text{min}} + (\alpha _{\text{max}} - \alpha _{\text{min}}) \sin ^2 \varphi \overset{(3.17)}{=} \alpha _{\text{min}} + (\alpha _{\text{max}} - \alpha _{\text{min}}) \sin ^2 \frac{k \pi}{2} = \begin{cases} \alpha _{\text{min}}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \alpha _{\text{max}}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$  \hspace{1cm} (3.18)

Um zu bestimmen, ob $\alpha _{\text{min}}$ oder $\alpha _{\text{max}}$ angenommen wird, wird nun (3.10a) verwendet:

$$H_{\varphi \varphi} = H_{\alpha \alpha} \alpha _\varphi ^2 + H_{\alpha} \alpha _\varphi \overset{(3.16)}{=} H_{\alpha \alpha} \alpha _\varphi ^2 = 2H_{\alpha} (\alpha _{\text{max}} - \alpha _{\text{min}}) \cos 2 \varphi = 2H_{\alpha} (\alpha _{\text{max}} - \alpha _{\text{min}}) \cos k \pi \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{H}_\alpha \geq 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \tilde{H}_\alpha \leq 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\tilde{H}_\alpha$ wird also zur Schaltfunktion und man erhält die Implikationen

$$\alpha = \alpha _{\text{min}} \Rightarrow \tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{min}}) \geq 0,$$

$$\alpha = \alpha _{\text{max}} \Rightarrow \tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{max}}) \leq 0.$$  \hspace{1cm} (3.19)

Die umgeformte Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10a) ist damit a priori erfüllt und muss nicht extra überprüft werden.

Im Fall $\tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{min}}) = 0$ findet ein Übergang zwischen Rand- und freier Steuerung bei $\alpha = \alpha _{\text{min}}$ statt und eine dieser beiden Gleichungen kann als Schaltbedingung verwendet werden. Analoges gilt im Fall $\tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{max}}) = 0$. In der Praxis müssen somit zwei Funktionsverläufe als Schaltfunktionen betrachtet werden, nämlich $\tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{min}})$ und $\tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{max}})$.

Würde $\tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{min}}) = \tilde{H}_\alpha (\alpha _{\text{max}}) = 0$ gelten, so wäre evtl. ein Sprung in der Steuerung zwischen den beiden Rändern möglich. Dieser Fall ist jedoch in der Homotopiekette nie aufgetreten.
3.5. Optimale Steuerung

3.5.2. Querneigungswinkel $\mu$

In diesem Abschnitt werden die Optimalitätsbedingungen (3.8) und (3.10b) angewendet, um den Querneigungswinkel $\mu$ zu bestimmen. Das geschieht in ähnlicher Weise wie die Bestimmung von $\alpha$ im vorangegangenen Abschnitt.

**Freies Teilstück**

Gilt

$$\mu_{\psi} \neq 0,$$

so erhält man unter der Voraussetzung, dass stets $C_L(Ma, \alpha) \neq 0$ gilt, aus

$$H_{\mu} = 0$$

die folgende Gleichung für $\mu$:

$$\lambda_\gamma \sin \mu = \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma} \cos \mu$$

Nach Quadrierung von (3.20) folgt unter Ausnutzung der Beziehung $\sin^2 \mu + \cos^2 \mu = 1$ für den Sinus und Kosinus des Querneigungswinkels

$$\sin \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\chi$$

$$
\cos \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\gamma.
$$

Die Wahl der richtigen Vorzeichens ergibt sich durch Einsetzen von (3.21) in (3.20) sowie in (3.10b), das hier die Form

$$H_{\psi \psi} = H_{\mu \mu} M_{\psi}^2 + H_{\mu \psi} M_{\psi} \quad \Rightarrow \quad C_L(Ma, \alpha) \left(-\lambda_\gamma \cos \mu - \frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma} \sin \mu\right) \geq 0$$

hat. Aus Ersterem ergibt sich, dass die beiden Vorzeichen in (3.21) identisch sein müssen, woraufhin letzteres Einsetzen unter der Annahme $C_L(Ma, \alpha) > 0$ negative Vorzeichen erzwingt. Abschließend erhält man also die Gleichungen

$$\sin \mu = - \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\chi,$$

$$\cos \mu = - \frac{1}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \left(\frac{\lambda_\chi}{\cos \gamma}\right)^2}} \lambda_\gamma,$$

1 Falls $C_L(Ma, \alpha) = 0$ gilt, existiert kein Auftrieb, und $\mu$ ist daher unbestimmt. Dieser Fall wird durch diese Annahme ausgeschlossen, da er – wie oben bereits erwähnt – im betrachteten Anstellwinkelbereich nicht eintreten kann.
die den Querneigungswinkel eindeutig bestimmen. Er kann in den meisten Programmiersprachen durch eine Arcustangensfunktion mit zwei Argumenten berechnet werden. Da die Legendre-Clebsch-Bedingung (3.10b) bereits zur Bestimmung der Vorzeichen verwendet wurde, muss sie nicht nachträglich überprüft werden.

**Randstück**

Die Bestimmung des Querneigungswinkels im Falle eines Randstücks erfolgt vollkommen analog zum Anstellwinkel, so dass man hier aus den Optimalitätsbedingungen

\[ \mu \psi = 0 \]

\[ H_{\psi \psi} = H_{\mu \mu} \mu^2 + H_{\mu \psi} \mu \psi \geq 0 \]

die Implikationen

\[
\begin{align*}
\mu = \mu_{\text{min}} & \Rightarrow \bar{H}_\mu(\mu_{\text{min}}) \geq 0 \\
\mu = \mu_{\text{max}} & \Rightarrow \bar{H}_\mu(\mu_{\text{max}}) \leq 0
\end{align*}
\]

für die Randsteuerung des Querneigungswinkels erhält. In den Fällen \( \bar{H}_\mu(\mu_{\text{min/max}}) = 0 \) gelten zum Anstellwinkel analoge Bemerkungen.

### 3.5.3. Zusammenfassung der Schaltbedingungen

Fast man alle im letzten Abschnitt hergeleiteten Optimalitäts- und Schaltbedingungen zusammen, so erhält man folgenden Regelsatz zur Bestimmung der Steuerungen \( \alpha \) und \( \mu \):

\[
\begin{align*}
\bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{min}}) > 0 \land \bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{max}}) > 0 & \Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{min}} \\
\bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{min}}) < 0 \land \bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{max}}) < 0 & \Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{max}} \\
\bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{min}}) < 0 \land \bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{max}}) > 0 & \Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{frei}} \text{ aus (3.14) mit Überprüfung von (3.15)} \\
\bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{min}}) > 0 \land \bar{H}_\alpha(\alpha_{\text{max}}) < 0 & \Rightarrow \alpha = \alpha_{\text{min}} \lor \alpha = \alpha_{\text{max}}
\end{align*}
\]

\[
\begin{align*}
\bar{H}_\mu(\mu_{\text{min}}) > 0 \land \bar{H}_\mu(\mu_{\text{max}}) > 0 & \Rightarrow \mu = \mu_{\text{min}} \\
\bar{H}_\mu(\mu_{\text{min}}) < 0 \land \bar{H}_\mu(\mu_{\text{max}}) < 0 & \Rightarrow \mu = \mu_{\text{max}} \\
\bar{H}_\mu(\mu_{\text{min}}) < 0 \land \bar{H}_\mu(\mu_{\text{max}}) > 0 & \Rightarrow \mu = \mu_{\text{frei}} \text{ aus (3.22)} \\
\bar{H}_\mu(\mu_{\text{min}}) > 0 \land \bar{H}_\mu(\mu_{\text{max}}) < 0 & \Rightarrow \mu = \mu_{\text{min}} \lor \mu = \mu_{\text{max}}
\end{align*}
\]

Übergänge zwischen den jeweils vier möglichen Fällen können also nur an Nullstellen der zugehörigen Schaltfunktionen auftreten. Mehrdeutigkeiten (wie im jeweils letzten Fall obiger
Fallunterscheidungen) können durch Anwendung des Minimumprinzips (1.9) aufgelöst werden.

In Abbildung 3.1 werden einige mögliche Konstellationen von Schaltfunktionen für eine allgemeine Steuerung $u$ beispielhaft dargestellt. Dabei sind die Schaltstrukturen in den Abbildungen 3.1(a)-3.1(c) eindeutig festgelegt.

Einzig in Abbildung 3.1(d) sind zwei unterschiedliche Steuerungen denkbar: Entweder es wird auf dem gesamten dargestellten Intervall mit $u_{\text{min}}$ gesteuert, oder die Steuerung springt zwischenzeitlich von $u_{\text{min}}$ auf $u_{\text{max}}$ und wieder zurück. Die Entscheidung, welche der beiden Möglichkeiten optimal ist, kann in diesem Fall z.B. durch Anwendung des Minimumprinzips getroffen werden. Dazu müssen die Werte der Hamiltonfunktion für minimale und maximale Steuerung im strittigen Bereich verglichen werden. Diejenige Steuerung, die – bei Festhalten der anderen Argumente der Hamiltonfunktion – den kleineren Wert liefert, ist optimal. Eine weitere Möglichkeit, die optimale Lösung zu bestimmen, wäre, bei festgehaltenen Randwerten die Steuerung auf einem kleinen Teilintervall des strittigen Bereichs zu wechseln und den resultierenden Wert des Zielfunktionals mit dem ursprünglichen Wert zu vergleichen.
Kapitel 3. Optimalsteuerungsproblem

Abbildung 3.1.: Beispiele für verschiedene Verläufe von Schaltfunktionen und zugehörige mögliche Schaltstrukturen
Kapitel 4
Formulierung des Randwertproblems

Seien die Bewegungsdifferentialgleichungen (1.2) mit den Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen (3.6) zu einem System

\[ \dot{y} = f(y, u) \]

zusammengefasst, wobei

\[ y: \left\{ \begin{array}{c} [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{12} \\ t \mapsto (x(t), \lambda(t))^T \end{array} \right. \]

den Vektor der Zustände und Adjungierten darstellt. Die Steuerungen \( u \) hängen dabei über die Optimalitätsbedingungen von \( y \) ab. Aus der allgemeinen Variation (1.5d) und (1.5f) folgt, dass bei fester Anfangs- und freier Endzeit 13 Bedingungen

\[ r_m(y_0, y_f) = 0 \]

an die Randwerte von \( y \) gestellt werden. (12 Randwerte für die Zustände bzw. Adjungierten und die Bedingung \( H_f = 0 \).) Somit handelt es sich um ein Randwertproblem für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Werden außerdem die verfeinerten Approximationen für Schallgeschwindigkeit oder aerodynamische Beiwerte verwendet, so führt das zum einen zu einer abschnittweise definierten rechten Seite und zum anderen zu Punktbedingungen

\[ r_j(y^+_j, y^-_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m-1 \]

an den nichtglatten inneren Punkten \( t_1, \ldots, t_{m-1} \). An diesen inneren Punkten müssen wieder jeweils 13 Bedingungen erfüllt sein. Es gilt also

\[ r_j: \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^{13}, \quad j = 1, \ldots, m, \]


Beim Aufstellen des Mehrpunktrandwertproblems ist zu beachten, dass die Skalierung der Differentialgleichungsvariablen die Kondition des Problems wesentlich beeinflusst. Bei Betrachtung der Hamiltonfunktion (3.2) wird klar, dass die Skalierung der adjungierten Variablen
Kapitel 4. Formulierung des Randwertproblems

proportional von der Skalierung des Wärmeflusses \( \dot{q} \) abhängt. Daher wurde für den Wärmefluss die Einheit MW m\(^{-2}\) gewählt. Die resultierende untere Schranke für die Kondition der Mehrzielmatrix liegt dann im Bereich \( 5 \cdot 10^2 \) bis \( 3 \cdot 10^3 \).

Vor Aufruf des Lösners wird das gesamte Problem durch Einführung einer trivialen Differentialgleichung für \( t_f \) auf das feste Zeitintervall \([0, 1]\) transformiert, so dass die inneren Punkte durch eine veränderte Endzeit \( t_f \) nicht zu stark verschoben werden müssen. Es ist zu beachten, dass diese Transformation lediglich zur Übergabe an JANUS durchgeführt wird. An den Optimalitätsbedingungen ändert sich also nichts, weil \( t_f \) nicht als neuer Zustand und die Endzeit immer noch als frei betrachtet werden.

Zuletzt sei noch eine Bemerkung zur Überprüfung der von der Mehrzielmethode errechneten Lösungen im Verlauf der im nächsten Kapitel beschriebenen Homotopieketten erlaubt: Sollte die Mehrzielmethode konvergieren, so ist damit nicht automatisch sichergestellt, dass die errechnete Lösung optimal ist. Wurde beispielsweise eine durch Homotopien veränderte neue Schaltstruktur noch nicht berücksichtigt, so ist der Fehler im Allgemeinen erst a posteriori festzustellen und muss dann korrigiert werden. Folgende Maßnahmen wurden getroffen, um sicherzustellen, dass die errechneten Lösungen optimal sind:

- **Beobachtung des Zielfunktionsals:** Aus leicht einsehbaren Gründen muss der Wert des Zielfunktionsals kleiner werden, sobald die Problemstellung mehr Freiheiten zulässt. Das ist z.B. bei der Freigabe der Steuerungen und Vergrößerung der Steuerbereiche der Fall.\(^1\)

- **Hamiltonfunktions-Test:** Vor allem Fehler in der Herleitung der adjungierten Differentialgleichungen sowie Fehler bei der Umsetzung des Problems in ein Programm können durch Überprüfung der Hamiltonfunktion nach Folgerung 1.7 schnell erkannt werden.

- **Minimumprinzip:** Durch die leichte Variation der Steuerungen um ihre errechneten Werte darf der Wert der Hamiltonfunktion bei gleichzeitigem Festhalten der anderen Argumente laut (1.9) nur zunehmen. Wird er dagegen kleiner, so ist die berechnete Steuerung nicht optimal und muss verworfen werden.

\(^1\)Diese Beobachtung gilt nicht, wenn während der Freigabe einer Steuerung der Randwert einer adjungierten Variablen auf einem Wert ungleich Null festgehalten wird, da dann der zugehörige Zustand weder fest noch frei ist.
Kapitel 5

Homotopiekette

Definition 5.1 (Homotopie)
Eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen $f, g : X \to Y$ ist eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \to Y$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in X$

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(x, 1) = g(x)$$

gilt.

Betrachtet man in obiger Definition den zweiten Parameter als Zeitvariable, so kann $H$ als kontinuierliche Verformung von $f$ zu $g$ angesehen werden.

Im Falle der numerischen Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen der optimalen Steuerung bezieht sich der Begriff der Homotopie auf den Übergang von einem Problem zu einem anderen unter Änderung eines Problemparameters. Die Änderung des Problemparameters erfolgt dabei nicht kontinuierlich, sondern in kleinen Schritten. Diese dürfen höchstens so groß sein, dass das veränderte Problem mit der Lösung des Vorgängerproblems als Startschätzung gelöst werden kann. Sie sollten aber auch nicht zu klein sein, um nicht zu viele Probleme lösen zu müssen.

Eine Homtopiekette ist eine Aneinanderreihung mehrerer Homotopien, um verschiedene Problemparameter anzupassen.

Während des Lösens dieser Kette von Problemen müssen Veränderungen der Schaltstruktur, das Auftreten oder Wegfallen von Randstücken usw. erkannt und die entsprechenden Bedingungen im Randwertproblem angepasst werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Steuerung der Schrittweite für den Homotopieparameter entwickelt. Mit ihr gelingt es, die Anzahl der Newton-Iterationen pro Homotopieschritt bei ca. 10 zu halten. Dadurch wird wird einerseits verhindert, dass zu kleine Homotopieschritte gemacht werden und sich dadurch die Rechenzeit verlängert, andererseits wird die Anzahl der fehlgeschlagenen Mehrzielschritte möglichst klein gehalten. Eine solche Schrittweitensteuerung erleichtert insbesondere dem unerfahrenen\(^1\) Anwender die Arbeit beim Anpassen der Problemparameter. So ist z.B. in diesem Kapitel von insgesamt 11 Homotopien von der Start- bis zur Referenzlösung die Rede. Das ist allerdings nur ein winziger Bruchteil der tatsächlich durchgeführten Homotopieversuche. Die allermeisten Versuche mussten verworfen werden, weil

\(^1\)im Sinne von ungeübt in der Behandlung des vorliegenden Problems
Kapitel 5. Homotopiekette

sie entweder auf einen Lösungsast führten, der irgendwann nicht mehr zur Konvergenz gebracht werden konnte oder weil während der Homotopie Änderungen der Schaltstruktur auftraten, die nach anschließender Verkleinerung des Homotopieparameters berücksichtigt werden mussten.

5.1. Errechnung einer Startlösung mit fester Steuerung

Der Ausgangspunkt der oben erwähnten Homotopiekette ist eine sog. Startlösung, also die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, das nur verwandt mit der vorliegenden Problemstellung ist. Da sich der Übergang von einer Lösung des ähnlichen Optimalsteuerungsproblems [20] (Eintritt einer Kapsel in die Erdatmosphäre) zu einer Lösung für den Eintritt eines Gleiters in die Marsatmosphäre als nicht gangbar erwies, musste eine neue Startlösung errechnet werden. Dafür sind aus der Literatur z.B. folgende Verfahren bekannt:


- Eine weitere Methode beruht auf dem Übergang von direkten zu indirekten Verfahren. In ([43, 44]) wird die Lösung eines direkten Verfahrens so fein diskretisiert, dass sie als Startlösung eines indirekten Verfahrens verwendet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wurde ein weiteres Verfahren entwickelt, das sich insbesondere für stark beschränkte Steuerungen (wie es hier der Anstellwinkel ist) eignet. Es beruht auf der Beobachtung, dass eine mit fest vorgegebener Steuerung berechnete Trajektorie als die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems betrachtet werden kann, wenn die Steuerung durch die Problemstellung auf die zur Errechnung der Startlösung verwendete Steuerung beschränkt ist.

5.1.1. Allgemeines Vorgehen

1. Festlegen der Steuerung: Wird die Steuerung konstant, also zeitanabhängig gewählt und ist das Problem ansonsten ebenfalls autonom, so kann der Hamiltonfunktions-Test wie in Folgerung 1.7 beschrieben durchgeführt werden. Wird die Steuerung dagegen zeitanabhängig gewählt\(^2\), so müsste das Problem zuerst autonomisiert werden, um diesen Test verwenden zu können.

2. Festlegen der Zustände an einem Rand: Es ist zunächst einer der beiden Ränder auszuwählen, von dem aus eine Trajektorie für die Zustandsvariablen errechnet wird. Dazu wird derjenige Rand verwendet, von dem aus eine Starttrajektorie durch Lösen eines

\(^2\)Als zeitanabhängige Steuerung wäre auch eine einfache Approximation einer, zuvor durch ein direktes Verfahren gewonnenen, Steuerung denkbar.
5.1. Errechnung einer Startlösung mit fester Steuerung

Anfangswertproblems leichter zu bestimmen ist. Welcher der beiden Ränder das ist, hängt von den geforderten Randbedingungen sowie den Zustandsdifferentialgleichungen ab.

3. Integration der Bewegungs-differentialgleichungen: Da nun sowohl Anfangs- oder Endwerte als auch eine Steuerung definiert sind, können zumindest die Zustandstrajektorien durch Lösen eines Anfangswertproblems bestimmt werden. Durch Variation der Steuerung, Randwerte und Endzeit in den vorangegangenen Schritten sollte es gelingen, eine Starttrajektorie zu finden, die die Randbedingungen am anderen Intervallende zumindest nicht grob verletzt.

4. Festlegen der Randwerte für die adjungierten Variablen: Da aus der vorangegangen Integration nun an beiden Rändern Werte für die Zustandsvariablen vorliegen, können auch ihre Ableitungen bestimmt werden. Damit ist es möglich, wiederum einen Rand auszuwählen, an dem die adjungierten Variablen festgelegt werden. Dazu sollte derjenige Rand verwendet werden, an dem laut Problemstellung mehr Zustände frei sind. Das erleichtert die Schätzung der adjungierten Variablen, da sie für freie Zustände laut (1.5d) bzw. (1.5f) verschwinden müssen. Bei der Festlegung der Adjungierten an diesem Rand ist zu beachten, dass bei freier Endzeit $t_f$ die Bedingung $H(t_f) = 0$ erfüllt sein muss.

5. Integration, um die adjungierten Variablen zu berechnen: Da nun Anfangs- oder Endwerte für alle adjungierten Variablen vorliegen, können die Werte der adjungierten Variablen im gesamten Intervall wieder durch Lösen eines Anfangswertproblems bestimmt werden.

**Bemerkung.** Welche Ränder in den Schritten 2 und 4 ausgewählt werden und welche der adjungierten Variablen so berechnet werden, dass die Randbedingung für freie Endzeit erfüllt ist, hängt vom Konvergenzverhalten des entstehenden Randwertproblems ab. Ist die Endzeit nicht frei sondern fest, so kann die Integrationszeit in Schritt 3 nicht variiert werden oder sie muss nachträglich auf den gewünschten Wert homotopiert werden. Außerdem kann die Hamiltonfunktion dann einen beliebigen Wert annehmen.

5.1.2. Konkretisierung der Arbeitsschritte für das vorliegende Problem

Zunächst wurden die beiden groben Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte verwendet (siehe Abschnitt 2.3.2). Die beiden Steuerungen wurden konstant zu $\alpha \equiv 40^\circ$ und $\mu \equiv -1^\circ$ und die Anfangszustände wie folgt gewählt:

\[
\begin{align*}
\Theta(t_0) &= -145^\circ \\
\Lambda(t_0) &= 0^\circ \\
h(t_0) &= 500 \text{ km} \\
v(t_0) &= 7 \text{ km s}^{-1} \\
\gamma(t_0) &= -35^\circ \\
\chi(t_0) &= 70^\circ
\end{align*}
\]

Lösen eines Anfangswertproblems in positiver Zeitrichtung lieferte die Zustandstrajektorien. Die resultierenden Endwerte der Zustandsvariablen sollten dabei möglichst nahe an den gewünschten Endwerten liegen, damit die Startlösung bereits in der Nähe der gesuchten

\footnote{Durch die Wahl von $\mu \equiv -1^\circ$ wurde sichergestellt, dass die Bahn der Startlösung nicht in einer Großkreisebene liegt, da das bei nachfolgenden Homotopien erwartungsgemäß [7] zu numerischen Problemen durch eine singuläre Mehrzielmatrix führt.}
optimalen Lösung ist. Insbesondere musste dazu beim vorliegenden Problem darauf geachtet werden, dass beim ersten Eintritt in die Marsatmosphäre so viel Energie abgebaut wurde, dass die Fluchtgeschwindigkeit von ca. 5 km s\(^{-1}\) unterschritten wird und die Trajektorie bei relativ niedriger Geschwindigkeit in Bodennähe endet.

Anschließend wurden die Endwerte der adjungierenden Variablen so gewählt, dass die Hamiltonfunktion zu Null wird. Da \(\dot{q}(t_f) \neq 0\) gilt, können beim vorliegenden Zielfunktional nicht alle adjungierten Variablen gleichzeitig zu Null gewählt werden. Hier wurde \(v(t_f)\) als fest angenommen, so dass zumindest \(\lambda_v(t_f) \neq 0\) gilt. Durch die Wahl von \(\lambda_v(t_f) = -1\) und \(\lambda_v(t_f) = 0\) wurde erreicht, dass die Optimalitätsbedingungen am Endpunkt einen Querneigungswinkel von \(\mu = 0^\circ\) ergeben\(^4\). Um eine sinnvolle Schaltstruktur zu erhalten wurde außerdem \(\lambda_{\Theta}(t_f) = -50\) gewählt. \(\lambda_v(t_f)\) wurde schließlich aus

\[
\lambda_v(t_f) = -\dot{q} + \lambda_{\Theta} \dot{\Theta} + \lambda_{\gamma} \dot{\gamma}
\]

errechnet, so dass die Hamiltonfunktion verschwindet. Man erhält also neben den bereits errechneten Endwerten für die Zustände folgende Endwerte für die Adjungierten:

\[
\lambda_{\Theta}(t_f) = -50 \\
\lambda_A(t_f) = 0 \\
\lambda_h(t_f) = 0 \\
\lambda_v(t_f) \approx 0,208 \\
\lambda_{\gamma}(t_f) = -1 \\
\lambda_{\chi}(t_f) = 0
\]

Zuletzt wurde rückwärts in der Zeit integriert, um die adjungierten Variablen auf dem gesamten Intervall zu bestimmen.

**Bemerkung.** Das so beschriebene Vorgehen würde sich evtl. auch für die Lösung des in \([4, 5]\) beschriebenen Problems anbieten, da dort Anfangswerte für alle Zustände sowie ein Endwert gegeben wären.

Nach Durchführung der oben beschriebenen Schritte ergeben sich also die Randbedingungen aus Tabelle 5.1 beim Übergang zu einem Randwertproblem.

Zur Charakterisierung der errechneten Startlösung sollen hier nur der Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf abgebildet werden. (Eine ausführliche numerische und graphische Lösungsbeschreibung ist in Anhang A.1 zu finden.) Abbildung 5.1 zeigt eine Trajektorie mit zwei sog. „Skips“, also Wiederaufstiegen, von denen der erste wesentlich ausgeprägter ist. Beim ersten Eintritt wird bereits mehr als die Hälfte der Geschwindigkeit abgebaut und die entsprechende kinetische Energie in Wärme umgewandelt.

In mehreren Homotopien wurde anschließend die bisher konstant gehaltene Steuerung freigegeben, die Modelle für Schallgeschwindigkeit und aerodynamische Beiwerte verfeinert, sowie die Randwerte angepasst. Die Freigabe der Steuerung ist dabei der erste und entscheidende Schritt

\(^4\) Eine Festlegung von \(\lambda_{\gamma}(t_f) = 0\) würde zu einer Singularität in den Optimalitätsbedingungen für \(\mu\) führen, die zwar im Allgemeinen nur punktweise bestünde, den Querneigungswinkel am Ende aber äußerst sensitiv auf Problemanänderungen reagieren lassen würde. Das wiederum würde zu häufigen Änderungen in der Schaltstruktur in der Homotopiekette führen.
5.1. Errechnung einer Startlösung mit fester Steuerung

<table>
<thead>
<tr>
<th>Tabelle 5.1.: Randbedingungen für die Startlösung</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Anfangsbedingungen</td>
</tr>
<tr>
<td>Θ(t₀) = −145°</td>
</tr>
<tr>
<td>Λ(t₀) = 0°</td>
</tr>
<tr>
<td>h(t₀) = 500 km</td>
</tr>
<tr>
<td>v(t₀) = 7 km s⁻¹</td>
</tr>
<tr>
<td>γ(t₀) = −35°</td>
</tr>
<tr>
<td>χ(t₀) = 70°</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Nicht in den Randwerttabellen aufgeführte Differentialgleichungsvariablen sind jeweils frei.

Abbildung 5.1.: Höhen- und Geschwindigkeitsverlauf der Startlösung
Kapitel 5. Homotopiekette

des Übergangs von der „optimalen“ Startlösung mit festgeschriebener Steuerung zur Lösung eines echten Optimalsteuerungsproblems mit variabler Steuerung und wird daher im folgenden Abschnitt ausführlich beschrieben.

5.2. Freigabe der Steuerungen

Da bei der Errechnung einer Startlösung die konstanten Steuerungen $\alpha \equiv 40^\circ$ und $\mu \equiv -1^\circ$ verwendet wurden, entspricht das einer Wahl von $\alpha_{\text{min}} = \alpha_{\text{max}} = 40^\circ$ bzw. $\mu_{\text{min}} = \mu_{\text{max}} = -1^\circ$. Die Optimalitätsbedingungen für $\varphi$ und $\psi$ liefern die Schaltstruktur, die zur Freigabe der Steuerung benötigt wird.

Die Freigabe einer Steuergröße soll exemplarisch für eine allgemeine Steuerung $u$ gezeigt werden. Das im Folgenden beschriebene Vorgehen lässt sich sowohl für $\alpha$ als auch für $\mu$ verwenden.

Jeder Nullldurchgang der Schaltfunktion $H_u$ kennzeichnet einen Wechsel von minimaler zu maximaler Steuerung oder umgekehrt. Die Steuerbeschränkungen sind anfangs identisch, so dass auch nur eine Schaltfunktion $H_u(u_{\text{max}}) = H_u(u_{\text{min}}) = H_u(u_{\text{fest}})$ existiert. Bei der Freigabe der Steuerung ($u_{\text{max}} > u_{\text{min}}$) erhält man aber zwei Schaltfunktionen, eine für minimale, eine für maximale Steuerung. Im Allgemeinen gilt an den neuen Schaltpunkten $H_u(u_{\text{max}}) \neq H_u(u_{\text{min}})$, so dass der Wechsel am Schaltpunkt durch einen Übergangsbereich mit freier Steuerung erfolgen muss (siehe Abschnitt 3.5.3). Den Übergang zwischen fester und freier Steuerung erreicht man wie folgt:

1. **Anfangssituation:** Da die Steuerung ursprünglich auf einen Wert $u_{\text{fest}}$ festgelegt ist, muss $u_{\text{max}} = u_{\text{min}} = u_{\text{fest}}$ gewählt werden.

2. **Einfügen von je zwei Schaltpunkten pro Nullstelle von $H_u$:** Die beiden pro Nullstelle eingefügten, neuen Schaltpunkte müssen dabei so gering wie möglich auseinander liegen. Ist ihr Abstand zu groß, so liefert die Optimalitätsbedingung auf dem freien Zwischenstück eine Steuerung, die die neuen Grenzen $u_{\text{max}}/\text{min}$ deutlich verletzt, so dass die Mehrzielmethode nicht mehr konvergiert. Andererseits dürfen die beiden Schaltpunkte nicht zu nahe beieinander liegen, da die Mehrzielmatrix sonst singulär wird. Werden die neuen Schaltpunkte also beispielsweise an den durch die Bedingungen $H_u(\pm \varepsilon = 0$ definierten Punkten eingefügt, so ist ein „gutes“ $\varepsilon$ zu wählen.

3. **Homotopie zur Freigabe der Steuerung:** Führe gleichzeitig folgende Schritte durch:
   a) Vergrößere das, bisher nur einen Punkt umfassende, Intervall $[u_{\text{fest}}, u_{\text{fest}}] \rightarrow [u_{\text{min}}, u_{\text{max}}]$.
   b) Wähle als Steuerung auf dem Zwischenstück $u_{\text{max}} + u_{\text{min}} \rightarrow u_{\text{frei}}$.
   c) Verschiebe die durch $H_u(u_{\text{max}/\text{min}}) \pm \varepsilon = 0$ festgelegten Schaltpunkte durch $\varepsilon \rightarrow 0$ auf ihre optimalen Positionen.

4. **Überprüfung der Lösung:** Nach Durchführung der Homotopie sollten wieder alle Schaltbedingungen sowie der Hamiltonfunktionstest erfüllt und die errechnete Lösung optimal sein.
5.3. Verfeinerung der Approximationen und Einführung einer Bremsklappe – Referenzlösung

Dieses Verfahren kann evtl. vereinfacht werden, indem schon zu Beginn der Homotopie in Schritt 3b) die freie Steuerung verwendet und in Schritt 3c) \( \varepsilon = 0 \) gewählt wird. Der oben beschriebene langsame Übergang auf das freie Zwischenstück ist tatsächlich nur notwendig, wenn das Problem schlecht skaliert ist oder die Schaltfunktion extrem steil verläuft.

**Bemerkung (Lineare Steuerungen).** Für den Fall einer linearen Steuerung, wie sie oft in der Robotik auftritt, vereinfacht sich das Freigeben der Steuerung erheblich. Da die Schaltfunktion \( H_u \) dann unabhängig von \( u \) ist, liegt eine bang-bang Steuerung vor. Bei der Freigabe der Steuerung muss daher nur ein Schaltpunkt pro Nulldurchgang eingefügt werden, und die Steuerung springt ohne freies Teilstück zwischen den beiden Extremalwerten. Damit entfällt das oben erwähnte Problem der nahe beieinanderliegenden Schaltpunkte.

Das oben vorgestellte Verfahren wurde zuerst zur Freigabe des Anstellwinkels und anschließend zur Freigabe des Querneigungswinkels verwendet. Der Anstellwinkel \( \alpha \) konnte in einer einzigen Homotopie mit 17 Schritten freigegeben werden und die Schaltstruktur ergab sich zu

\[
\alpha_{\text{max}} | \alpha_{\text{frei}} | \alpha_{\text{min}} | \alpha_{\text{frei}} | \alpha_{\text{max}}.
\]

Die Freigabe des Querneigungswinkels \( \mu \) erwies sich als komplizierter und erforderte 6 Homotopien mit zusammen 110 Schritten. Im Falle eines zweideutigen Verlaufs der Schaltfunktionen \( H_\mu(\mu_{\text{max/min}}) \) konnte eine unstetige Steuerung ausgeschlossen werden. Dazu wurden zum einen Vergleichslösungen errechnet, bei denen die Steuerung auf sehr kleinen Intervallen geändert wurde. Da das Zielfunktional dadurch zunahm, konnten die Vergleichslösungen verworfen werden. Zum anderen wurde das Minimumprinzip verwendet. Die Schaltstruktur änderte sich während der Homotopiekette wie folgt:

\[
\mu_{\text{max}} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\text{min}} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\text{max}}
\]

\[
\mu_{\text{frei}} | \mu_{\text{min}} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\text{min}} | \mu_{\text{frei}} | \mu_{\text{max}}
\]

Zur Freigabe der Steuerungen waren insgesamt 7 Homotopien mit zusammen 127 Schritten notwendig.

5.3. Verfeinerung der Approximationen und Einführung einer Bremsklappe – Referenzlösung

Die nächsten Anpassungen umfassten die Verfeinerung der Modelle für die Schallgeschwindigkeit und die aerodynamischen Beiwerte sowie die Einführung der in Abschnitt 2.3.2 erwähnten Bremsklappen bei \( Ma = 5 \). Die dadurch auftretenden inneren Punktbedingungen wurden in Abschnitt 3.3 hergeleitet.

Die Verfeinerung der Modellfunktionen verursachten dabei keine wesentlichen Veränderungen der Lösung, wohingegen die Hinzunahme der Bremsklappen erst die notwendige Reduzierung der Endgeschwindigkeit ermöglichte.

\[\text{Diese 7 Homotopien sind aber – wie oben bereits erwähnt – nur ein Bruchteil der eigentlich durchgeführten Homotopieversuche.}\]
Kapitel 5. Homotopiekette

Tabelle 5.2.: Randbedingungen für die Referenzlösung

<table>
<thead>
<tr>
<th>Anfangsbedingungen</th>
<th>Endbedingungen</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>( \Theta(t_0) = \Theta(0) = -170^\circ )</td>
<td>( \Theta(t_f) = \Theta(f) = -33,5^\circ )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \Lambda(t_0) = \Lambda(0) = 0^\circ )</td>
<td>( \Lambda(t_f) = \Lambda(f) = 19,1^\circ )</td>
</tr>
<tr>
<td>( h(t_0) = h(0) = 500 \text{ km} )</td>
<td>( h(t_f) = h(f) = 7,4 \text{ km} )</td>
</tr>
<tr>
<td>( v(t_0) = v(0) = 7 \text{ km s}^{-1} )</td>
<td>( v(t_f) = v(f) = 0,5 \text{ km s}^{-1} )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda(0) = \lambda(0) = -10 )</td>
<td>( \lambda(0) = \lambda(0) = -0,1 )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda(0) = \lambda(0) = 0 )</td>
<td>( \lambda(0) = \lambda(0) = 0 )</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Die Randbedingungen für die Referenzlösung sind Tabelle 5.2 zu entnehmen. Hier wurde berücksichtigt, dass der Landeplatz von Pathfinder, 33,5° westliche Länge und 19,1° nördliche Breite, erreicht werden sollte (vgl. [28]). Die Anfangsgeschwindigkeit \( v(t_0) \) wird – wie in Tabelle B.2 erwähnt – im rotierenden Marssystem angegeben. Daher ist die eigentliche Eintrittsgeschwindigkeit (betrachtet im Inertialsystem) etwas höher und liegt bei ca. 7,198 km s\(^{-1}\).


Abbildung 5.2(a) zeigt im Vergleich zur Startlösung einen noch ausgeprägteren ersten Wiederanstieg. Der hohe und lang andauernde Skip ermöglicht die Abstrahlung eines großen Teils der beim ersten Eintritt aufgenommenen Wärmemenge an die Umgebung. Dieser Effekt wurde jedoch nicht simuliert, so dass er in Abbildung 5.2(b) auch nicht beobachtbar ist. Die gesamte aufgenommene Wärme reduzierte sich im Vergleich zur Startlösung nur unwesentlich, was v.a. an der Anpassung der Endbedingungen liegt: Die Randbedingungen der Referenzlösung erzwingen beispielsweise eine um ca. 40 % niedrigere Endgeschwindigkeit.

Die Abbildungn 5.2(c) und 5.2(d) weisen deutlich auf den unterschiedlichen Charakter der beiden Steuerungen hin. So war die Freigabe des Anstellwinkels (im vorigen Abschnitt) wesentlich einfacher als die des Querneigungswinkels. Das liegt zum einen daran, dass der für \( \alpha \) zulässige Winkelbereich viel kleiner ist als der für \( \gamma \); zum anderen kann für den Querneigungswinkel im Allgemeinen nicht ausgeschlossen werden, dass er von einer Grenze zur anderen springt. Dieser Fall trat jedoch, wie oben bereits erwähnt, nicht ein.

5.4. Einführung einer punktweisen Höhenbeschränkung

Um den Abbau der kinetischen Energie und damit die Aufheizung des Gleiters besser auf die beiden Skips zu verteilen, wurde versucht, die minimale Höhe beim ersten Eintritt zu vergrößern. Damit würde der erste Skip in einem Bereich geringerer Luftdichte verlaufen und die Aufheizung wäre geringer. Um dieses Ziel zu erreichen, wurde die in Abschnitt 3.1.2 beschriebene Punktbedingung gewählt [7]. Die sich ergebenden inneren Punktbedingungen wurden in Abschnitt 3.3.3 hergeleitet. Die am Ende dieses Abschnitts gefolgerte Stetigkeit von \( \lambda_\gamma \) konnte a posteriori bestätigt werden.
5.4. Einführung einer punktweisen Höhenbeschränkung

Abbildung 5.2.: Lösungskurven zur Referenzlösung
Diese Strategie brachte keinen wesentlichen Erfolg, da die Höhe dadurch nur um ca. 44 m auf 6,379 km vergrößert werden konnte, so dass sich der maximale Wärmefluss nur um ca. 1 % verringernte. Da keine wesentlichen Änderungen an der Referenzlösung erreicht wurden, wird diese Lösung hier auch nicht näher beschrieben.
Anhang A

Graphen und Stützwerte der Lösungstrajektorien


A.1. Startlösung

Die in Abschnitt 5.1 beschriebene Startlösung hat folgende Randwerte:

<table>
<thead>
<tr>
<th>Variable</th>
<th>$t_0 = 0\ s$</th>
<th>$t_f = 2780.007259.3\ s$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$\Theta$ (rad)</td>
<td>$-0.253\ 072\ 741\ 54 \cdot 10^1$</td>
<td>$-0.684\ 641\ 551\ 85 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Lambda$ (rad)</td>
<td>$0.136\ 310\ 515\ 61 \cdot 10^{-26}$</td>
<td>$0.301\ 191\ 494\ 11 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$h$ (km)</td>
<td>$0.500\ 000\ 000\ 00 \cdot 10^3$</td>
<td>$0.550\ 303\ 486\ 07 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$v$ (km s$^{-1}$)</td>
<td>$0.700\ 000\ 000\ 00 \cdot 10^1$</td>
<td>$0.843\ 250\ 385\ 83 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\gamma$ (rad)</td>
<td>$-0.610\ 865\ 238\ 20 \cdot 10^0$</td>
<td>$-0.206\ 807\ 038\ 96 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\chi$ (rad)</td>
<td>$0.122\ 173\ 047\ 64 \cdot 10^1$</td>
<td>$0.171\ 592\ 061\ 24 \cdot 10^1$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_\Theta$</td>
<td>$-0.500\ 000\ 000\ 00 \cdot 10^2$</td>
<td>$-0.500\ 000\ 000\ 00 \cdot 10^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_\Lambda$</td>
<td>$-0.140\ 256\ 433\ 33 \cdot 10^2$</td>
<td>$0.167\ 373\ 588\ 97 \cdot 10^{-14}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_h$</td>
<td>$-0.217\ 879\ 492\ 23 \cdot 10^0$</td>
<td>$0.171\ 057\ 974\ 15 \cdot 10^{-14}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_v$</td>
<td>$-0.216\ 945\ 468\ 23 \cdot 10^1$</td>
<td>$0.207\ 806\ 189\ 37 \cdot 10^0$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_\gamma$</td>
<td>$-0.621\ 761\ 182\ 94 \cdot 10^3$</td>
<td>$-0.100\ 000\ 000\ 00 \cdot 10^1$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lambda_\chi$</td>
<td>$-0.550\ 057\ 025\ 96 \cdot 10^1$</td>
<td>$0.126\ 978\ 321\ 68 \cdot 10^{-13}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Der Wert des Zielfunktionals ist $q(t_f) = 188,382\ 301\ 62$ MJ m$^{-2}$.

Das Randwertproblem wurde mit 51 äquidistanten Mehrzielknoten errechnet und besitzt keine Schaltpunkte.
Abbildung A.1.: Startlösung – Zustände
Abbildung A.2.: Startlösung – Adjungierte Variablen
Abbildung A.3.: Startlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen
Abbildung A.4.: Startlösung – Sonstige Größen
A.2. Referenzlösung

Die in Abschnitt 5.3 beschriebene Referenzlösung besitzt die Randwerte:

\begin{align*}
\Theta (\text{rad}) &= -0.29670597284 \cdot 10^1 & -0.58468529942 \cdot 10^0 \\
\Lambda (\text{rad}) &= 0.96610632553 \cdot 10^{-28} & 0.33335788713 \cdot 10^0 \\
h (\text{km}) &= 0.5000000000 \cdot 10^3 & 0.7400000000 \cdot 10^1 \\
v (\text{km s}^{-1}) &= 0.7000000000 \cdot 10^4 & 0.5000000000 \cdot 10^0 \\
\gamma (\text{rad}) &= -0.57195713496 \cdot 10^0 & -0.42691815572 \cdot 10^0 \\
\chi (\text{rad}) &= 0.10060282031 \cdot 10^1 & 0.14709620783 \cdot 10^1 \\
\lambda_\Theta &= -0.20520876593 \cdot 10^2 & -0.20520876593 \cdot 10^2 \\
\lambda_\Lambda &= -0.15936521945 \cdot 10^1 & -0.24076105929 \cdot 10^1 \\
\lambda_h &= 0.15722455175 \cdot 10^{-2} & -0.12075848654 \cdot 10^{-1} \\
\lambda_v &= 0.30508969468 \cdot 10^2 & 0.12278717623 \cdot 10^1 \\
\lambda_\gamma &= -0.10000000000 \cdot 10^2 & -0.10000000000 \cdot 10^0 \\
\lambda_\chi &= -0.10525151982 \cdot 10^{-28} & 0.15055527790 \cdot 10^{-13} \\
\end{align*}

Der Wert des Zielfunktionals ist \(q(t_f) = 188,20295136 \text{ MJ m}^{-2}\).

Das Randwertproblem wurde mit 67 Mehrzielknoten gelöst wovon 16 Schaltpunkte waren. Diese 16 Schaltpunkte teilen sich wie folgt auf:\footnote{Die Indizes der Schaltpunkte sind dem Programm entnommen und ergeben keine fortlaufende Nummerierung.}

- **4 Schaltpunkte für den Anstellwinkel \(\alpha\) \((t_2, \ldots, t_5)\):** Hier treten keine Sprünge in den adjungierten Variablen auf.

- **4 Schaltpunkte für den Querneigungswinkel \(\mu\) \((t_9, \ldots, t_{12})\):** keine Sprünge

- **6 innere Punkte durch die nichtglatte Approximation der Schallgeschwindigkeit \((t_{20}, \ldots, t_{25})\):** Hier treten Sprünge in \(\lambda_h\) auf.

- **1 innerer Punkt durch die nichtglatte Approximation der aerodynamischen Beiwerte \((t_{30})\):** Hier treten Sprünge in \(\lambda_h\) und \(\lambda_v\) auf.

- **1 innerer Punkt durch die Zuschaltung einer Bremsklappe \((t_{31})\):** Hier treten ebenfalls Sprünge in \(\lambda_h\) und \(\lambda_v\) auf.

Die Lagen der Schaltpunkte und die entsprechenden Sprunghöhen sind:
A.2. Referenzlösung

<table>
<thead>
<tr>
<th>$t_i$</th>
<th>$\lambda^+ - \lambda^-$</th>
<th>$\lambda^+ - \lambda^-$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$t_2 = 168,575,041,13$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_3 = 171,495,079,01$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_4 = 869,903,817,69$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_5 = 940,020,542,53$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_9 = 93,128,011,727$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{10} = 122,370,514,70$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{11} = 2164,018,595,5$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{12} = 3190,114,784,2$ s</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{20} = 106,106,424,01$ s</td>
<td>$0,000,003,837,74 \cdot 10^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{21} = 125,853,319,74$ s</td>
<td>$-0,000,000,007,78 \cdot 10^0$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{22} = 249,064,965,44$ s</td>
<td>$0,000,000,003,43 \cdot 10^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{23} = 304,647,110,48$ s</td>
<td>$-0,000,000,099,30 \cdot 10^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{24} = 2998,819,762,5$ s</td>
<td>$0,000,000,993,96 \cdot 10^{-2}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{25} = 3054,403,732,1$ s</td>
<td>$-0,000,000,002,94 \cdot 10^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{30} = 3185,720,670,6$ s</td>
<td>$0,000,000,026,23 \cdot 10^{-1}$</td>
<td>$0,000,000,379,46 \cdot 10^1$</td>
</tr>
<tr>
<td>$t_{31} = 3198,158,492,6$ s</td>
<td>$-0,017,327,965,10 \cdot 10^{-1}$</td>
<td>$-0,185,309,160,60 \cdot 10^1$</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Bei der Berechnung der Sprunghöhen wurden die Zehnerpotenzen der beiden Grenzwerte beibehalten, so dass die relative Sprunghöhe deutlicher wird. Eine leere Tabellenzelle bedeutet, dass Stetigkeit gefordert wurde.

Die Schaltstrukturen für die beiden Steuerungen werden durch

$$
\begin{array}{cccccccc}
\alpha_{\text{max}} & \alpha_{\text{frei}} & \alpha_{\text{min}} & \alpha_{\text{frei}} & \alpha_{\text{max}} & \mu_{\text{frei}} & \mu_{\text{min}} & \mu_{\text{frei}} \\
\hline
^t_2 & ^t_3 & ^t_4 & ^t_5 & ^t_9 & ^t_{10} & ^t_{11} & ^t_{12} \\
\end{array}
$$

beschrieben.
Abbildung A.5.: Referenzlösung – Zustände
Abbildung A.6.: Referenzlösung – Adjungierte Variablen
Abbildung A.7.: Referenzlösung – Steuerungen und Optimalitätsbedingungen
Abbildung A.8.: Referenzlösung – Sonstige Größen
Abbildung A.9.: Referenzlösung – 3D-Visualisierung der Trajektorie
Anhang B

Nomenklatur und Konstanten

Die in diesem Dokument verwendete Notation kann Tabelle B.1 entnommen werden.


Die Vektoren
\[
\mathbf{x} = (\Theta, \Lambda, h, v, \gamma, \chi)^T,
\]
\[
\lambda = (\lambda_\Theta, \lambda_\Lambda, \lambda_h, \lambda_v, \lambda_\gamma, \lambda_\chi)^T \quad \text{und}
\]
\[
\mathbf{u} = (\varphi, \psi)^T
\]

bezeichnen die Zustände, die adjungierten Variablen sowie die transformierten Steuergrößen (siehe Tabelle B.2).

<table>
<thead>
<tr>
<th>Tabelle B.1.: Notation</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>Bez.</td>
</tr>
<tr>
<td>------</td>
</tr>
<tr>
<td>( m )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \mathbf{m} )</td>
</tr>
<tr>
<td>( M )</td>
</tr>
<tr>
<td>( m )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \dot{h} )</td>
</tr>
<tr>
<td>( g'(h) )</td>
</tr>
<tr>
<td>( H_u, \frac{\partial H}{\partial u} )</td>
</tr>
<tr>
<td>( H_u, \nabla_u H )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \left( \frac{d}{dt} \right)_S )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \mathbf{x}_f )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \mathbf{x}_S )</td>
</tr>
<tr>
<td>( \mathbf{x}^\top )</td>
</tr>
</tbody>
</table>

\(^a\)In einigen Ausnahmefällen werden auch Skalare mit Großbuchstaben bezeichnet, wenn sich die entsprechende Notation in der Literatur durchgesetzt hat. So bezeichnen \( H \) die Hamiltonfunktion, \( Ma \) die Machzahl, \( C_L \) den Auftriebs- und \( C_D \) den Widerstandsbeiwert.
### Tabelle B.2.: Variablen

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bez.</th>
<th>Beschreibung</th>
<th>Einheit</th>
<th>Gruppe</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>( t )</td>
<td>Zeit im Bereich ([0, t_f])</td>
<td>s</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \Theta )</td>
<td>östliche Länge</td>
<td>rad</td>
<td>Zustandsvariablen</td>
</tr>
<tr>
<td>( A )</td>
<td>nördliche Breite im Bereich ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])</td>
<td>rad</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( h )</td>
<td>Höhe über der Oberfläche</td>
<td>km</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( v )</td>
<td>Geschwindigkeit im rotierenden Marssystem</td>
<td>km s(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \gamma )</td>
<td>Bahnneigungswinkel (\text{(Winkel zwischen der Tangentialebene an die Marsoberfläche und der Bewegungsrichtung, positiv für Aufstieg)})</td>
<td>rad</td>
<td>adjungierte Variablen*</td>
</tr>
<tr>
<td>( \chi )</td>
<td>Bahnazimut (\text{(Winkel zwischen der Nord-Richtung und der Bewegungsrichtung, im Uhrzeigersinn positiv)})</td>
<td>rad</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_{\Theta} )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) rad(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_A )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) rad(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_h )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) km(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_v )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) km(^{-1}) s</td>
<td>adjungierte Variablen*</td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_{\gamma} )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) rad(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \lambda_{\chi} )</td>
<td></td>
<td>MJ m(^{-2}) rad(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( q )</td>
<td>Wärmelast</td>
<td>MJ m(^{-2})</td>
<td>Zielfunktional</td>
</tr>
<tr>
<td>( H )</td>
<td>Hamiltonfunktion</td>
<td>MJ m(^{-2}) s(^{-1})</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \alpha )</td>
<td>Anstellwinkel (\text{(Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Längsachse des Gleiters, positiv für eine „angehobene“ Nase)})</td>
<td>rad</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>( \mu )</td>
<td>Querneigungswinkel (\text{(Winkel zwischen der Horizontalen und der Querachse des Gleiters, positiv für eine Neigung des Gleiters nach rechts)})</td>
<td>rad</td>
<td>Steuergrößen</td>
</tr>
<tr>
<td>( \varphi )</td>
<td>transformierter Anstellwinkel (\text{rad)})</td>
<td>rad</td>
<td>transformierte Steuergrößen</td>
</tr>
<tr>
<td>( \psi )</td>
<td>transformierter Querneigungswinkel (\text{rad)})</td>
<td>rad</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

*Die Einheiten der adjungierten Variablen werden im Folgenden der Einfachheit halber vernachlässigt.
### Tabelle B.3.: Modellfunktionen

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bezeichnung</th>
<th>Beschreibung</th>
<th>Einheit</th>
<th>Modell</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$g(h)$</td>
<td>Gravitationsbeschleunigung</td>
<td>km s$^{-2}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\varrho(h)$</td>
<td>Atmosphärenrendichte</td>
<td>kg km$^{-3}$</td>
<td>Marsmodell</td>
</tr>
<tr>
<td>$a(h)$</td>
<td>Schallgeschwindigkeit</td>
<td>km s$^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$C_L(Ma, \alpha)$</td>
<td>Auftriebsbeiwert</td>
<td>1</td>
<td>X-38-Modell</td>
</tr>
<tr>
<td>$C_D(Ma, \alpha)$</td>
<td>Widerstandsbeiwert</td>
<td>1</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\dot{q}(v, \varrho)$</td>
<td>Wärmestrom</td>
<td>MW m$^{-2}$</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

### Tabelle B.4.: Modellkonstanten (Quellen: [33], [34], [35] und [26])

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bez.</th>
<th>Beschreibung</th>
<th>Wert</th>
<th>Modell</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$R_0$</td>
<td>mittlerer volumetrischer Radius$^a$</td>
<td>3390 km</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$g_0$</td>
<td>Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche$^b$</td>
<td>3,727 63 · 10$^{-3}$ km s$^{-2}$</td>
<td>Marsmodell</td>
</tr>
<tr>
<td>$\varrho_0$</td>
<td>Atmosphärenrendichte an der Oberfläche</td>
<td>1,754 88 · 10$^7$ kg km$^{-3}$</td>
<td>Marsmodell</td>
</tr>
<tr>
<td>$\beta$</td>
<td>Atmosphärenexponent</td>
<td>0,093 138 7 km$^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\Omega$</td>
<td>Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation$^c$</td>
<td>7,088 24 · 10$^{-5}$ rad s$^{-1}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$m$</td>
<td>Masse</td>
<td>11 339,81 kg</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$S$</td>
<td>aerodynamisch wirksame Fläche</td>
<td>22 672 · 10$^{-6}$ km$^{-2}$</td>
<td>X-38-Modell</td>
</tr>
<tr>
<td>$r_N$</td>
<td>Nasenradius</td>
<td>3,666 · 10$^{-3}$ km</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$K$</td>
<td>Wärmekoeffizient$^d$</td>
<td>0,146 838 · 10$^{-6}$</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

$^a$Der Polarradius beträgt 3375 km und der Radius am Äquator 3397 km.

$^b$Diese errechnete Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche ist etwas größer, als die in [33] angegebene Gravitationsbeschleunigung am Äquator, da der Mars abgeflacht ist.

$^c$Die hier verwendete Zeit pro Umdrehung beträgt 24 h 37 min 22,44 s, wohingegen die Tageslänge (bedingt durch den Umlauf um die Sonne) 24 h 39 min 34,92 s beträgt.


### Tabelle B.5.: Variable Splineparameter für die nichtglatten Modelle

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bezeichnung</th>
<th>Beschreibung</th>
<th>Modell</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$k_h$ $\in$ N</td>
<td>Ordnung der B-Spline-Basis</td>
<td>Schallgeschw.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\eta_h$ $\in$ R$^{2k_h+l_h}$</td>
<td>Knoten in h</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\alpha$ $\in$ R$^{k_h+l_h}$</td>
<td>Koeffizienten für die Schallgeschwindigkeit</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$k_{Ma}$ $\in$ N</td>
<td>Ordnung der B-Spline-Basis in Ma-Richtung</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$k_\alpha$ $\in$ N</td>
<td>Ordnung der B-Spline-Basis in α-Richtung</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\eta_{Ma}$ $\in$ R$^{2k_{Ma}+l_{Ma}}$</td>
<td>Knoten in Ma</td>
<td>aerodyn.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\eta_\alpha$ $\in$ R$^{2k_\alpha+l_\alpha}$</td>
<td>Knoten in α</td>
<td>Beiwerte</td>
</tr>
<tr>
<td>$L$ $\in$ R$^{(2k_{Ma}+l_{Ma})\times(k_\alpha+l_\alpha)}$</td>
<td>Koeffizienten für den Auftriebsbeiwert</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$D$ $\in$ R$^{(2k_{Ma}+l_{Ma})\times(k_\alpha+l_\alpha)}$</td>
<td>Koeffizienten für den Widerstandsbeiwert</td>
<td></td>
</tr>
</tbody>
</table>

Es wurden jeweils eine Grob- und eine Feinapproximation erstellt, deren Parameter den Abschnitten 2.2.2 und 2.3.2 entnommen werden können.
### Tabelle B.6.: Verwendete physikalische Konstanten (Quelle: [30])

<table>
<thead>
<tr>
<th>Bezeichnung</th>
<th>Beschreibung</th>
<th>Wert</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$G$</td>
<td>Gravitationskonstante</td>
<td>$6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$R$</td>
<td>universelle Gaskonstante</td>
<td>$8,314472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$</td>
</tr>
</tbody>
</table>
Literaturverzeichnis


