

# Reconstruction de surface et régularisation

F. Brunet<sup>1,2,3</sup>   A. Bartoli<sup>2</sup>   R. Malgouyres<sup>1</sup>   N. Navab<sup>3</sup>

brunet@laic.u-clermont1.fr  
adrien.bartoli@univ-bpclermont.fr  
malgouyres@laic.u-clermont1.fr  
navab@cs.tum.edu

<sup>1</sup>LAIC

IUT Clermont-Ferrand  
63172 Aubière CEDEX  
FRANCE

<sup>2</sup>LASMEA

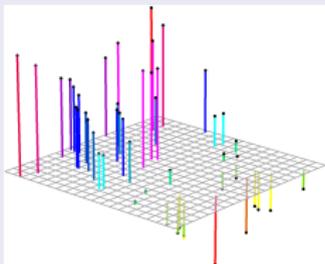
Université Blaise Pascal  
63172 Aubière CEDEX  
FRANCE

<sup>3</sup>CAMPAR

Technische Universität München  
85748 Garching bei München  
ALLEMAGNE

25 février 2008

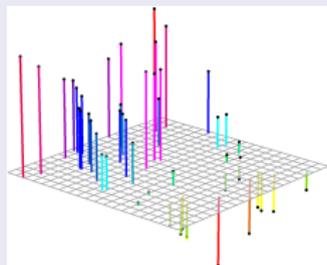
# Introduction



Étant donné un ensemble de points « 2.5D » :

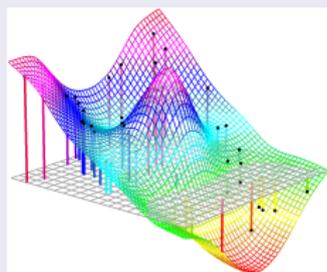
$$(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i$$

# Introduction



Étant donné un ensemble de points « 2.5D » :

$$(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i$$



On recherche la surface

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui approxime *au mieux* l'ensemble de points.

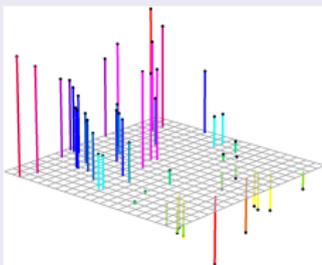
- 1 Reconstruction de surface
  - Les données
  - Modèles de surface
  - Reconstruction : une première approche
  - La régularisation
  
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
  - Validation croisée
  - L-curve

# Plan

- 1 Reconstruction de surface
  - Les données
  - Modèles de surface
  - Reconstruction : une première approche
  - La régularisation
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
  - Validation croisée
  - L-curve

# Les données « 2.5D »

Données  
2.5D

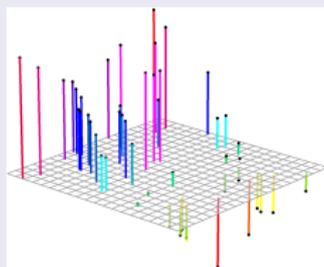


- Centres :  
 $(x_i, y_i) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Élévations :  
 $z_i \in \mathbb{R}$



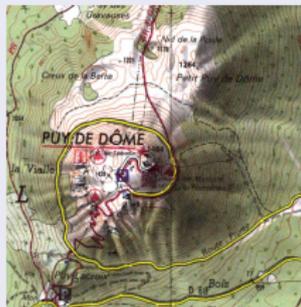
# Les données « 2.5D »

Données  
2.5D



- Centres :  
 $(x_i, y_i) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$
- Élévations :  
 $z_i \in \mathbb{R}$

Néanmoins de réelles  
applications





# Modèles de surface

$$\begin{aligned} f : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y; \mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Modèle de forme connue
- Contrôlé par un *vecteur de paramètres* :  
 $\mathbf{p} = [p_1 \ \dots \ p_h] \in \mathbb{R}^h$

# Modèles de surface

$$\begin{aligned} f : [0, 1]^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y; \mathbf{p}) \end{aligned}$$

- Modèle de forme connue
- Contrôlé par un *vecteur de paramètres* :  
 $\mathbf{p} = [p_1 \ \dots \ p_h] \in \mathbb{R}^h$
- On s'intéresse plus particulièrement aux modèles linéaires :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad \exists \mathbf{v}_{x,y} \in \mathbb{R}^h \quad \text{t.q.} \quad f(x, y; \mathbf{p}) = \mathbf{v}_{x,y}^T \mathbf{p}$$

- Ne présume en rien de la linéarité en  $(x, y)$

# Exemple de modèles

## Surface de Bézier

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_{i(m+1)+j+1} B_{i,n}(x) B_{j,m}(y)$$

## Base polynomiale de Bézier

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n \quad x \in [0, 1]$$

# Exemple de modèles

## Produit tensoriel de B-splines

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=-a}^b \sum_{j=-c}^d p_{(i+a)(d+c+1)+j+c+1} N_{i,a+1}(x) N_{j,c+1}(y)$$

## Base des B-splines

$$\begin{cases} N_{i,1}(x) = 1 & \text{si } x \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}[ \\ N_{i,1}(x) = 0 & \text{si } x \notin [\lambda_i, \lambda_{i+1}[ \\ N_{i,k+1}(x) = \frac{x-\lambda_i}{\lambda_{i+k}-\lambda_i} N_{i,k}(x) + \frac{\lambda_{i+k+1}-x}{\lambda_{i+k+1}-\lambda_{i+1}} N_{i+1,k}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

# Exemple de modèles

## Fonctions à base radiale

$$f(x, y; \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^h p_i \rho \left( \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right)$$

## Base radiale

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \rho(r) \end{aligned}$$

$$\rho(r) = r^2 \log(r) \quad \rho(r) = \exp(-r^2)$$

# Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

# Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

et un modèle de surface :

$$f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

# Reconstruction exacte

Étant donné un ensemble de points

$$\{(x_i, y_i) \leftrightarrow z_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

et un modèle de surface :

$$f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

trouver le vecteur de paramètres  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h$  tel que :

$$\begin{cases} f(x_1, y_1; \mathbf{p}) = z_1 \\ \vdots \\ f(x_n, y_n; \mathbf{p}) = z_n \end{cases}$$

# Reconstruction exacte

En supposant que le modèle est linéaire en  $\mathbf{p}$

$$\begin{cases} f(x_1, y_1; \mathbf{p}) = z_1 \\ \vdots \\ f(x_n, y_n; \mathbf{p}) = z_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_{x_1, y_1}^T \mathbf{p} = z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{x_n, y_n}^T \mathbf{p} = z_n \end{cases}$$

Le problème revient à résoudre

$$M\mathbf{p} = \mathbf{z}$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x_1, y_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{x_n, y_n}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{h \times n} \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

# Reconstruction exacte

Mais...

le système linéaire

$$M\mathbf{p} = \mathbf{z}$$

n'a généralement pas de solution exacte.

# Un problème de minimisation

On transforme donc notre problème en *problème de minimisation*

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \mathcal{E}_d(\mathbf{p})$$

où  $\mathcal{E}_d$  est un terme *d'attache aux données* qui quantifie l'écart entre les données et la surface.

# Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données  $\mathcal{E}_d$  peut prendre plusieurs formes.

# Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données  $\mathcal{E}_d$  peut prendre plusieurs formes.

L'erreur uniforme

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i|$$

# Un problème de minimisation

Le terme d'attache aux données  $\mathcal{E}_d$  peut prendre plusieurs formes.

L'erreur uniforme

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i|$$

La moyenne des résidus au carré

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2$$

# Reconstruction par moindres carrés

Si l'on considère la moyenne des résidus au carré comme terme d'attache aux données :

$$\mathcal{E}_d(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2$$

La reconstruction de surface peut alors être vu comme un problème de *moindres carrés linéaire*

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \frac{1}{n} \|M\mathbf{p} - \mathbf{z}\|_2^2$$

# Reconstruction par moindres carrés

Un problème de moindres carrés linéaire est facilement résolu :

$$\mathbf{p}^* = M^\dagger \mathbf{z}$$

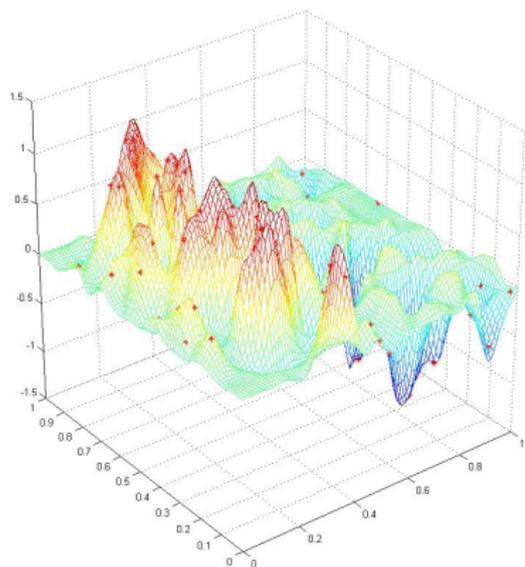
où

$$M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$$

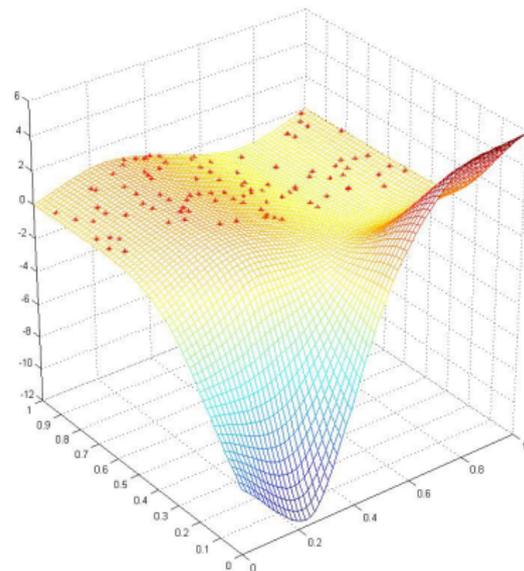
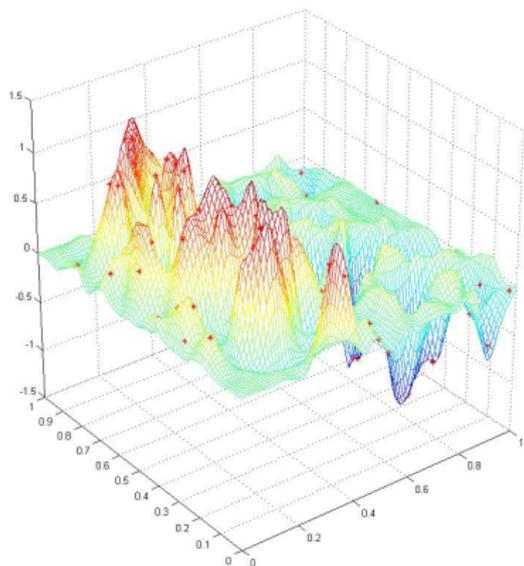
est la matrice pseudo-inverse de  $M$ .

Cependant, cette première approche n'est pas suffisante.

Pendant, cette première approche n'est pas suffisante.



Pendant, cette première approche n'est pas suffisante.



# Régularisation

On introduit un terme de régularisation  $\mathcal{E}_r$  au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

# Régularisation

On introduit un terme de régularisation  $\mathcal{E}_r$  au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

$\mathcal{E}_r : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}_+$  *quantifie la régularité de la surface.*

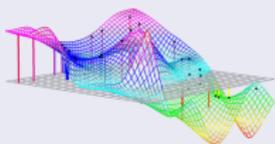
$$\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$$

# Régularisation

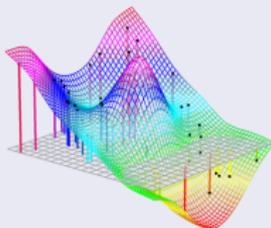
On introduit un terme de régularisation  $\mathcal{E}_r$  au problème :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right) \quad \lambda \in [0, 1[$$

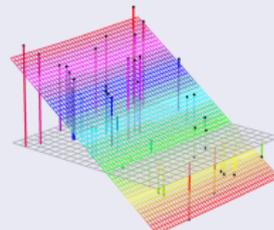
$\lambda$  : compromis entre attache aux données et régularisation.



$\lambda = 0.0002$

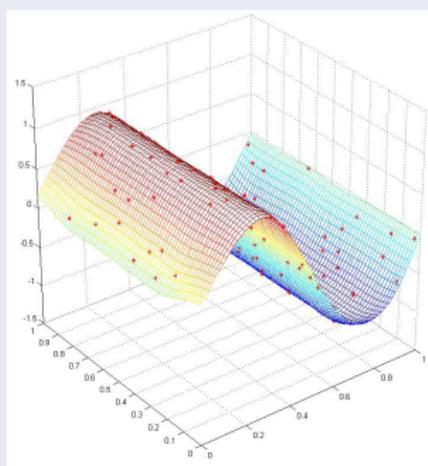
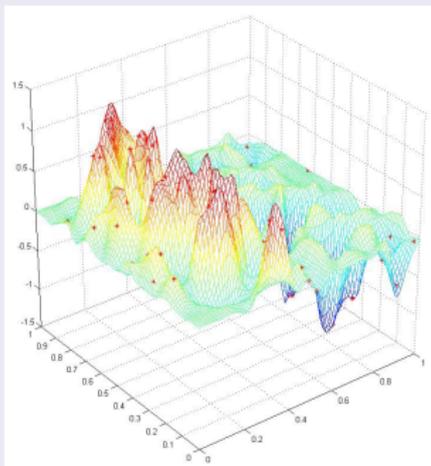


$\lambda = 0.005$

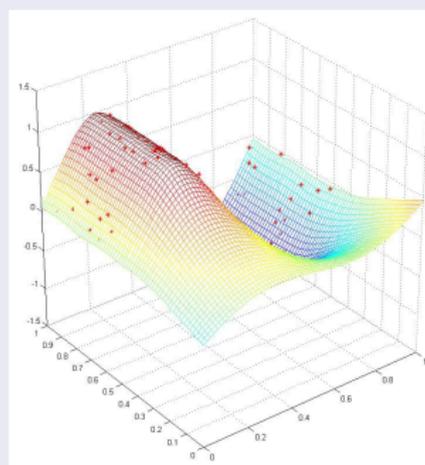
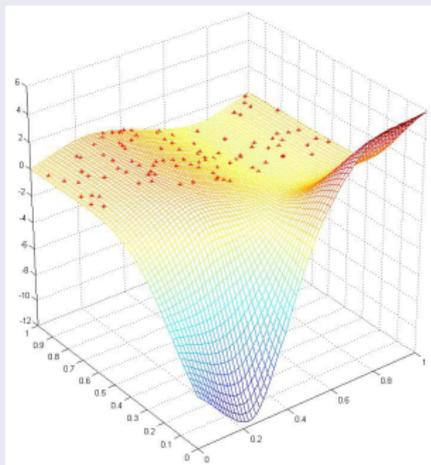


$\lambda = 0.99$

# Exemple



# Exemple



# Résolution du problème régularisé

De la même manière que pour l'attache aux données :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}) - z_i)^2 \\ &= \frac{1}{n} \|\mathbf{M}\mathbf{p} - \mathbf{z}\|_2^2\end{aligned}$$

On peut approximer le terme de régularisation sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r(\mathbf{p}) &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f(x, y; \mathbf{p})}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \\ &\approx \|\mathbf{R}\mathbf{p}\|_2^2\end{aligned}$$

# Résolution du problème régularisé

Le problème de reconstruction de surface régularisée peut alors s'écrire de manière équivalente comme :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left\| \begin{bmatrix} M \\ \frac{\lambda}{1-\lambda} R \end{bmatrix} \mathbf{p} - \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

qui a pour solution :

$$\mathbf{p}^* = \left( M^T M + \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T \mathbf{z}$$

# Plan

- 1 Reconstruction de surface
  - Les données
  - Modèles de surface
  - Reconstruction : une première approche
  - La régularisation
- 2 Sélection automatique du paramètre de régularisation
  - Validation croisée
  - L-curve

# Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

# Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve

# Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve
- Ces méthodes sont souvent très coûteuses

# Sélection automatique du paramètre de régularisation

Un des défis de la reconstruction de surface :

Sélectionner automatiquement le paramètre de régularisation

- De nombreuses méthodes ont été proposées : validation croisée, L-curve
- Ces méthodes sont souvent très coûteuses
- Leur optimisation est parfois difficile

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal  $\lambda^*$  en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal  $\lambda^*$  en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

$\lambda^*$  va donc être le minimiseur d'une nouvelle fonction de coût  $V : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0, 1[} V(\lambda)$$

On ne peut pas déterminer le paramètre de régularisation optimal  $\lambda^*$  en minimisant directement :

$$(\mathbf{p}^*, \lambda^*) = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h, \lambda \in [0, 1[} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

$\lambda^*$  va donc être le minimiseur d'une nouvelle fonction de coût  $V : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0, 1[} V(\lambda)$$

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h} \left( \mathcal{E}_d(\mathbf{p}) + \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \mathcal{E}_r(\mathbf{p}) \right)$$

# La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

# La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

Qu'est ce qu'une surface bien reconstruite ?

C'est une surface qui *généralise correctement*.

# La validation croisée

- Une des méthodes les plus employées : la validation croisée [Wahba, 1979].

Qu'est ce qu'une surface bien reconstruite ?

C'est une surface qui *généralise correctement*.

- La validation croisée tente de quantifier cette capacité à généraliser.

# Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation  $\lambda$  donné

# Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation  $\lambda$  donné
- Ajuster la surface en omettant le  $i$ -ième point

# Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation  $\lambda$  donné
- Ajuster la surface en omettant le  $i$ -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis

# Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation  $\lambda$  donné
- Ajuster la surface en omettant le  $i$ -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis
- Répéter pour tous les points de l'ensemble de données

# Validation croisée : principe

- Pour un paramètre de régularisation  $\lambda$  donné
- Ajuster la surface en omettant le  $i$ -ième point
- Prendre l'écart entre la surface ajustée et le point omis
- Répéter pour tous les points de l'ensemble de données
- Faire la moyenne de tous les écarts élevés au carré

# Validation croisée : principe

De manière plus concise :

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}_\lambda^{[i]}) - z_i)^2$$

où  $\mathbf{p}_\lambda^{[i]}$  est le vecteur de paramètres optimal pour l'ensemble de points réduit.

# Validation croisée : principe

De manière plus concise :

$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i; \mathbf{p}_\lambda^{[i]}) - z_i)^2$$

où  $\mathbf{p}_\lambda^{[i]}$  est le vecteur de paramètres optimal pour l'ensemble de points réduit.

**Il n'est pas possible d'utiliser directement cette formule !**

Le calcul de

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in [0,1[} V(\lambda)$$

serait bien trop coûteux.

# Validation croisée

[Wahba, 1979]

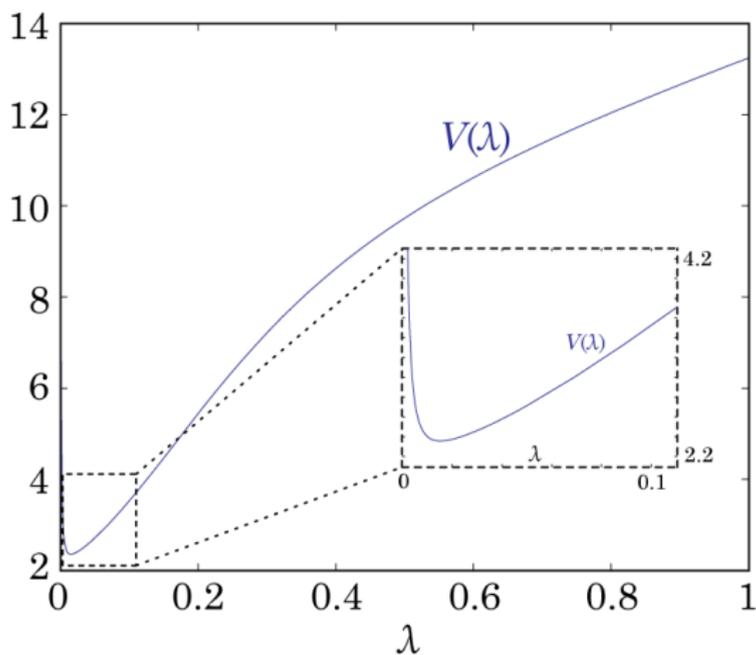
$$V(\lambda) = \frac{1}{n} \left\| \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \text{diag}(H)} \right) (I - H)\mathbf{z} \right\|_2^2$$

où  $H$  est la « hat matrix » :

$$H = M \left( M^T M + \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}^* &= \left( M^T M + \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \right)^2 R^T R \right)^{-1} M^T \mathbf{z} \\ \hat{\mathbf{z}} &= M \mathbf{p}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\mathbf{z}} = H \mathbf{z}$$

# Exemple



# Validation croisée

## Bonne approche pour

- de petits ensembles de données
- les cas monodimensionnels

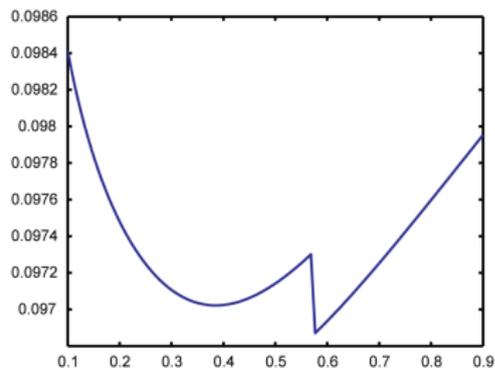
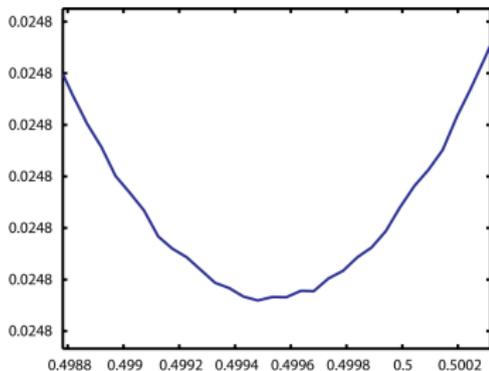
## Bien souvent très (trop) coûteux

- inversion de matrices
- perte des matrices éparse

# Validation croisée

## Difficile à optimiser

- oscillations aux petites échelles
- cas pathologiques



# L-curve

## Ce que l'on cherche

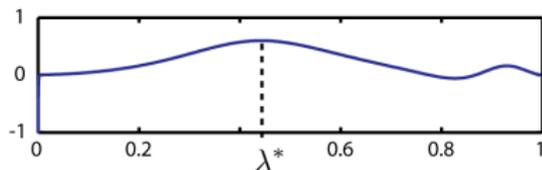
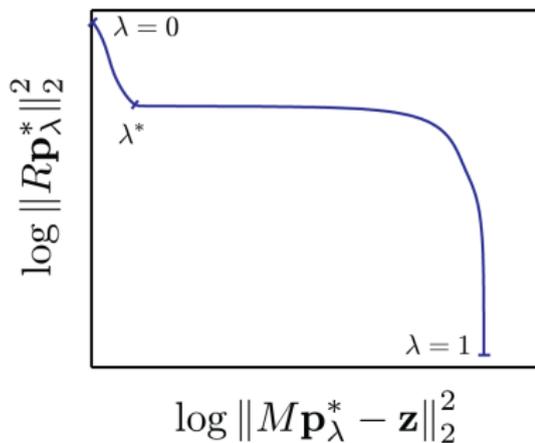
Un bon *compromis* entre attache aux données et régularisation.

- $\mathcal{E}_d(\mathbf{p}_\lambda^*)$  ne doit pas être trop grand
- $\mathcal{E}_r(\mathbf{p}_\lambda^*)$  ne doit pas être trop grand non plus

# L-curve

Idee [Lawson et Hanson, 1974]

Mettre en relation l'attache aux données et la régularité.



# L-curve : plus formellement

$$\rho(\lambda) = \log \|M\mathbf{p}_\lambda^* - \mathbf{z}\| \quad \eta(\lambda) = \log \|R\mathbf{p}_\lambda^*\|$$

$$\left\{ (\rho(\lambda), \eta(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in [0, 1[ \right\}$$

$$\kappa(\lambda) = 2 \frac{\rho'(\lambda)\eta''(\lambda) - \rho''(\lambda)\eta'(\lambda)}{(\rho'(\lambda)^2 + \eta'(\lambda)^2)^{3/2}}$$

$$\lambda^* = \arg \max_{\lambda \in [0, 1[} \kappa(\lambda)$$

# L-curve

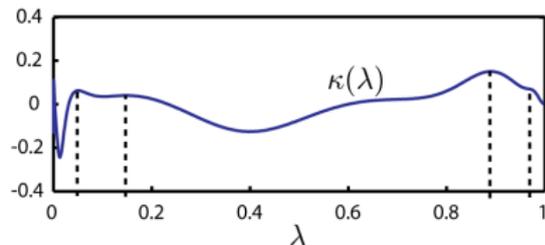
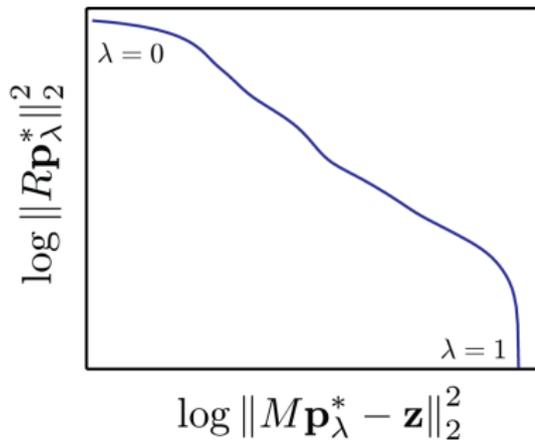
## Bien plus rapide que la validation croisée

- pas de matrice à inverser (dans le critère)
- exploitation des matrices éparsees

## Très souvent « pathologique »

- nombreux maxima

# L-curve



# Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

# Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)

# Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)
- Les méthodes actuelles fonctionnent bien pour de petits ensemble de données

# Conclusion

La sélection automatique du paramètre de régularisation reste un problème ouvert.

- Elle est pourtant nécessaire (reconstruction d'objets 3D par vision, etc.)
- Les méthodes actuelles fonctionnent bien pour de petits ensemble de données
- De nouvelles approches rapides sont possibles en exploitant le compromis entre attache aux données et régularisation.

